ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2011, том 21, № 1, с. 128–136

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ

УДК 681.519

© Е. Ю. Бутырский

МОДЕЛИ СИСТЕМ И СИГНАЛОВ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ ВРЕМЕНИ

В статье рассмотрены преобразования сигналов, связанные с деформацией области определения. В работе на основе композиции преобразований значительно расширяется класс возможных преобразований. Предлагаемый метод построения групп преобразований носителя сигнала и соответствующих им инфинитезимальных операторов в пространстве с сохраняющейся нормой позволяет использовать мощную технику группового анализа для описания состояний динамических систем.

Кл. сл.: теоретико-групповой подход, преобразования, непрерывные представления, аддитивные преобразования, мультипликативные преобразования, группа Ли, инверсия, оператор, функция, композиция, алгоритм

ВВЕДЕНИЕ

Специфика современного подхода к обработке гидроакустических сигналов требует учета согласования средств обработки с симметрией сигналов, которые возникают в процессе распространения сигнала в океанической среде и отражения от подвижных целей. Простейшими преобразованиями являются преобразования сдвига и сжатия. К примеру, применительно к гидроакустическим сигналам такие преобразования являются следствием пространственного разнесения между источником и приемником сигнала и их кинематикой.

При теоретико-групповом подходе процесс согласования алгоритма обработки гидроакустических сигналов сводится к определению алгоритмов, инвариантных относительно выделенных преобразований.

Рассмотрим преобразования сигналов, связанные с деформацией временнóй области определения состояния. В работах [1–5] такие преобразования рассматривались при разработке абстрактных моделей. Все воздействия среды и объекта локации в работе представлялись в виде двух классов операторов: операторов, учитывающих только преобразования носителя сигнала (времени), и операторов, учитывающих искажения сигналов в области значений. Наибольший интерес представляют операторы первого класса, из которых наиболее известны два вида преобразований: аддитивное $g(\tau): t \to t+\tau$ и мультипликативное $g(\alpha): t \to \alpha t$ (где τ, α — соответственно задержка и допплеровский параметр) [1–5]. Мультипликативное и аддитивное преобразования совместно реализуют линейное преобразование времени $g(\alpha,\ \tau): t \to \alpha t + \tau$. Элемент такого преобразования обозначим через $g(\alpha,\ \tau)$. Тогда $g(\alpha) = g(\alpha,\ 0)$ и $g(\tau) = g(1,\ \tau)$. Элементы $g(\alpha,\ \tau)$ *образуют группу* **R** *линейных преобразований вещественной прямой* [1–7]. К линейным преобразованиям времени приводит не только кинематика источника и приемника, но и неоднородность среды распространения гидроакустических сигналов [1–5].

НЕПРЕРЫВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ R

Представления группы **R** строятся на базе неприводимых одномерных представлений мультипликативной *M* и аддитивной *A* подгрупп. Операторы индуцированного представления для подгруппы *A*, определенные в пространстве *Ф*, имеют вид [1–8]

$$T(g)[S(\omega)] = \sqrt{\alpha} e^{j\omega\tau} S(\alpha\omega) \qquad (1)$$

и строятся в гильбертовом пространстве функций $S(\omega) \in \Phi_c$ заданных на полупрямой $0 \le \omega \le \infty$ и интегрируемых с квадратом относительно меры Лебега $\mathrm{d}\omega$ на ней:

$$\left|T(g)[S(\omega)]\right|^2 = \int \alpha \left|S(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega = \left|S\right|^2. \qquad (2)$$

Представлениями $T_\zeta = \{T_+, T_-)$, $\zeta = [+,-]$ вида

$$T_\zeta(g) = T_\zeta(g)[S(\omega)] = \sqrt{\alpha} e^{j\zeta\omega\tau} S(\alpha\omega) \tag{3}$$

и одномерными представлениями α^{is} исчерпываются все с точностью до эквивалентности унитарные неприводимые представления группы линейных преобразований **R.**

Класс *Ф*, имеющий в пространстве преобразований Фурье $Ф_c$ ограничения вида ($0 \le \omega \le \infty$), известен как класс аналитических сигналов, или более точно как класс функций, граничных к аналитическим. Эти представления допускают также реализацию в пространстве квадратично интегрируемых функций по обычной лебеговой мере $L^2(\mathbf{R}^+, \mathrm{d}\omega)$, связанную с преобразованием Меллина [1, 2, 6, 9].

Представления $T_\zeta(g)$, действующие в пространстве меллиновских спектров по обычной мере Лебега, задаются формулой [6]

$$T_\zeta(g)S(\nu) = \begin{cases} \alpha^{i\nu} S(\nu) \quad \text{при} \quad \tau = 0, \\ \dfrac{\alpha^{i\nu}}{2\pi i} \int \Gamma(i\nu - z)(-\zeta\alpha^{-1} i\tau)^{z - i\nu} S(z)\mathrm{d}z \\ \qquad \text{при} \ \ \tau \ne 0. \end{cases} \tag{4}$$

($\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция).

Унитарное представление группы **R**, индуцированное унитарным характером $\left(\alpha^{is}, \ \alpha \in \mathbf{R}^+\right)$ мультипликативной подгруппы *M*, действует в пространстве $L^2(\mathbf{R})$ и определяется выражением [1, 2]

$$T^s(g)s(t) = \alpha^{is-0.5} s[\alpha^{-1}(t-\tau)], \quad t \in \mathbf{R}, s \in L^2(\mathbf{R}). \tag{5}$$

Преобразование Фурье переводит представление $T^s(g)$ в представление $T_s(g)$, действующее в двойственном пространстве:

$$T_s(g)S(\omega)] = \alpha^{is-0.5} e^{i\omega\tau} S(\omega), \quad \omega \in \mathbf{R}, \ S \in L^2(\mathbf{R}). \tag{6}$$

В работах [1, 2] введено представление группы **R** из класса аналитических сигналов в классе спектральных характеристик по Меллину:

$$T(g)[s * \delta_+] = \\ = \alpha^{0.5-\nu} e^{i0.5(\nu-1)\pi} \Gamma(\nu) \int (s * \delta_+)(0.5\tau - t + i0)^{-\nu} \mathrm{d}t. \tag{7}$$

Выражение (7) определяет представление гидроакустического сигнала в виде интегрального оператора типа свертки.

Множество **R** образует группу Ли относительно операции композиции преобразований, изоморфную группе матриц *2*-го порядка:

$$g(\alpha, \ \tau) = \begin{pmatrix} \alpha & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\alpha \in \mathbf{R}^+, \quad \tau \in \mathbf{R}). \tag{8}$$

Реальное движение источника и приемника, в особенности при использовании длинных широкополосных сигналов, не всегда укладывается в рамки линейной модели преобразования носителя сигнала, т. к. допплеровский параметр сам является функцией времени и поэтому при построении модели сигнала необходимо ввести и параметр, учитывающий скорость его изменения. Известно, что обобщением линейного преобразования прямой является дробно-линейное преобразование, образующее группу вещественных полупростых групп Ли $SL(2, \mathbf{R})$ [9]. Удобство такого представления обусловливается прежде всего тем, что дробно-линейное преобразование может быть выражено в виде произведения непрерывных однопараметрических подгрупп, каждая из которых изоморфна аддитивной группе. С другой стороны, дробно-линейная модель имеет наглядное представление в виде матриц второго порядка, образующих группу $SL(2, \mathbf{R})$. Преобразование времени может быть получено, исходя из модели движения источника и приемника гидроакустических сигналов и динамики текущего расстояния [1–5, 10].

Группа $SL(2, \mathbf{R})$ относится к вещественным полупростым группам Ли. Как топологическая группа она локально-компактна, а как алгебраическая структура —– некоммутативная и допускает разложение на неприводимые и не являющиеся нормальными подгруппы [9].

АЛГЕБРА ЛИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим структуру дробно-линейного преобразования с точки зрения аппарата алгебры Ли. Наиболее простой способ описать структуру данной алгебры состоит в том, чтобы записать ее в виде таблицы. Отметим, что таблица любой алгебры Ли кососимметричная, т. е. $\left[X_k X_j\right] = -\left[X_j X_k\right]$, а все диагональные элементы ее равны нулю. Из таблицы коммутирования легко извлекаются структурные константы, а именно структурная константа C_{kij} — это коэффициент при X_k в (i, j)-м месте таблицы.

Для группы $SL(2, \mathbf{R})$ алгебра Ли состоит из всех матриц размера 2×2 со следом, равным нулю [8, 9]:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таблица коммутирования для матриц A_i имеет вид, представленный здесь. Из таблицы следует, что структурные константы равны

$$C_{112} = C_{313} = -C_{121} = -C_{232} = 1,\ C_{213} = -C_{231} = -2,$$

а все остальные константы равны нулю. Трехмерная алгебра, порожденная матрицами A_i, изоморфна алгебре, порожденной инфинитезимальными операторами

$$X_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t};\ X_2 = t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t};\ X_3 = -t^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}.$$

Оператор X_3 порождает локальную группу "инверсий"

$$t \to \frac{t}{-\beta t + 1}.$$

Таким образом, действие инфинитезимальных образующих X_i приводит к дробно-линейному преобразованию (проективная группа), которое является вещественным аналогом комплексной группы дробно-линейных преобразований.

Пусть в пространстве $L^2(\mathbf{R})$ действует произвольная группа **G**, каждый элемент которой может быть представлен в виде произведения некоторых элементов ее подгрупп: $g = g_1 g_2 ... g_n \in \mathbf{G}$, $i = \overline{1, n}$. Как было показано выше, к примеру, преобразование носителя сигнала можно представить в виде последовательности сдвигов, сжатий, антипараболических сдвигов. Любая точка t пространства $L^2(\mathbf{R})$ в этом случае преобразуется элементом g в точку $t_1 = g_1 g_2 ... g_n t$. Если на преобразованное пространство подействовать обратным элементом g_1^{-1}, то для каждой точки получим преобразование $t_2 = g_1^{-1} t_1 = g_1 g_2 ... g_n t$. Вследствие этого, можно считать, что в линейном

Таблица коммутирования для матриц A_i

$\{A_i\}$	A_1	A_2	A_3
A_1	0	A_1	$-2A_2$
A_2	$-A_1$	0	A_3
A_3	$2A_2$	$-A_3$	0

пространстве $L^2(\mathbf{R})$ действует другая более простая группа преобразований, каждый элемент которой $g' = g_2 ... g_n \in \mathbf{G}$. Преобразование пространства некоторым элементом g_1^{-1}, при котором результирующая группа G' является подгруппой исходной группы G, будем называть нейтрализацией параметра g. При обработке реальных процессов переходят от бесконечных континуальных множеств точек пространства и элементов групп к дискретным множествам. Для этого выполняется дискретизация пространств задания моделей и рассматриваются группы их преобразований со счетным множеством элементов. Для функций, заданных в точках пространства, производится квантование значений, поскольку при цифровой обработке количество разрядов чисел всегда конечно. Таким образом, элемент g_1 (а следовательно, и g_1^{-1}) может быть определен в результате непосредственного перебора. Такой перебор осуществим только на дискретном подмножестве. Качество нейтрализации зависит от того, насколько точно непрерывное множество значений g_1 описывается дискретным множеством их значений. Если группа **G** транзитивна в пространстве $L^2(\mathbf{R})$, а группа G' нетранзитивна либо может быть представлена в виде прямого произведения своих взаимно простых нормальных делителей, нетранзитивных в пространстве $L^2(\mathbf{R})$, то возможно дальнейшее упрощение моделей по методике, описанной выше.

Для задач обнаружения характерным является то, что неизвестен момент прихода сигнала и задача решается при малых отношениях сигнал/помеха (ОСП), поэтому максимум ОСП достижим только в случае одновременной компенсации преобразований. Это возможно осуществить или за счет высокого быстродействия, или за счет параллельной обработки. К примеру, незнание момента прихода сигнала приводит к тому, что через интервалы времени, определяемые верхней частотой спектра принимаемого сигнала и задающие дискретное множество значений задержки, между отсчетами сигнала необходимо провести корреляцию реализации с копиями, отличающимися друг от друга значениями допплеровского параметра и "параметра ускорения". Причем, чем длиннее принятая реализация, тем большее число операций необходимо произвести между отсчетами. При этом параметры входят в преобразование времени под сигналом неаддитивно, в связи с чем непосредственное применение быстрых алгоритмов представляется затруднительным. Но конструктивность теоретико-группового подхода заключается в возможности использования изоморфизма между группами, вследствие чего быстрые алгоритмы, разработанные для аддитивных преобразований, после соответствующего отображения применимы и для произвольной однопараметрической подгруппы.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ИЗМЕНЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

Рассмотрим преобразования, которые индуцируются изменениями шкалы временно́го параметра t состояния $x(t)$. От таких преобразований требуется, чтобы они были группой автоморфизмов сигнала $x(t)$. Элементами такой группы являются преобразования, оставляющие без изменения все структурные отношения. Основная задача — это исследование симметричных конфигураций сигнала, инвариантных относительно некоторой подгруппы группы всех автоморфизмов. При этом целесообразно изучить сами подгруппы, преобразования, их порождающие, и дифференциальные операторы, им соответствующие.

Положим, что преобразования времени выражаются в терминах монотонных вещественных функций $\varphi(t), t \in \mathbf{R}$. Замену времени можно записать как

$$x(t) \to x[\varphi(t)]. \tag{9}$$

Для инвариантности меры относительно преобразований времени необходимо, чтобы индуцируемое им преобразование функции $x(t)$ осуществлялось в соответствии со следующей заменой:

$$x(t) \to \sqrt{\left|\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\right|}\, x[\varphi(t)]. \tag{10}$$

Отображение (10) выполняется автоматически, т. к. при преобразованиях энергия (норма в $L^2(\mathbf{R})$) сигнала не должна меняться (инвариантность нормы):

$$\int x^2(t)\mathrm{d}t = \int x^2[\varphi(t)]\mathrm{d}\varphi(t) = \int x^2[\varphi(t)]\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t. \tag{11}$$

Пространство функций с сохраняемой нормой называется вращением [8]. Обозначим его через D_0, а группу его вращений $G(D_0)$.

Выбор $\varphi(t)$ должен быть согласованным со структурой пространства с сохраняемой нормой D_0. Существует насколько важных однопараметрических подгрупп группы $G(D_0)$, включающих такие преобразования времени. Допустим, что задана функция $\varphi(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда определяемое ею преобразование функции $s(t)$ обозначим g_a:

$$(g_a x)(t) = x[\varphi(t)] \cdot \sqrt{\left|\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\right|}. \tag{12}$$

Для того чтобы g_a $(-\infty < a < \infty)$ была однопараметрической группой необходимо соблюдение следующего соотношения (замкнутость относительно групповой операции):

$$\begin{cases} g_a g_b = g_{a+b}, & -\infty < a,\ b < \infty; \\ g_0 = 1. \end{cases} \tag{13}$$

В терминах функций $\varphi(t)$ можно записать:

$$\begin{cases} \varphi_b(\varphi_a(t)) = \varphi_{a+b}(t), & -\infty < a,\ b < \infty; \\ \varphi_0(t) = t. \end{cases} \tag{14}$$

Математической моделью таких однопараметрических подгрупп группы вращений $G(D_0)$ является аддитивный сдвиг

$$\varphi_a(t) = t - a. \tag{15}$$

Если через $\{\varphi_a(t)\}$ обозначить семейство однопараметрических преобразований времени и положить, что $\varphi_a(t)$ является строго монотонной и непрерывной по переменной t и строго монотонной по параметру преобразования a, то для нее можно записать [3]

$$\varphi_a(t) = L^{-1}\left[L(t) + a\right], \tag{16}$$

где L — строго монотонная функция на $(-\infty, \infty)$, определенная с точностью до постоянной величины. Выражение (16) означает, что $\varphi_a(t)$ — сопряженная к сдвигу функция, а сам сдвиг занимает центральное место в классе $\{\varphi_a(t)\}$.

Возьмем однопараметрическую группу преобразований (ОГП), определяемую соотношением (16), и обозначим через γ ее инфинитезимальный оператор (ИО)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g\big|_{a=0} = \gamma\,, \tag{17}$$

где производная понимается в смысле топологии сильной сходимости. Производящий оператор (инфинитезимальный оператор) γ является дифференциальным оператором первого порядка, зависящим от L из (16). Применим (17) к (12). Имеем:

$$\varphi_a(t) = L^{-1}[L(t)+a] = L^{-1}(y), \quad y = L(t)+a; \tag{18}$$

$$(g_a x)t = x[L^{-1}(y)]\cdot\sqrt{\left|\frac{\mathrm{d}L^{-1}(y)}{\mathrm{d}t}\right|}, \quad y\big|_{a=0} = L(t); \tag{19}$$

$$\frac{\partial(g_a x)}{\partial a}\Big|_{a=0} = \left[\sqrt{\left|\frac{\mathrm{d}\varphi_a(t)}{\mathrm{d}t}\right|}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi_a}\frac{\mathrm{d}\varphi_a}{\mathrm{d}a} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\sqrt{\left|\frac{\mathrm{d}\varphi_a(t)}{\mathrm{d}t}\right|}\right)x\right]\Big|_{a=0}. \tag{20}$$

Рассмотрим каждое из слагаемых в последнем выражении (20).

$$x(\varphi_a)\big|_{a=0} = x(t);$$

$$\frac{\mathrm{d}x(\varphi_a)}{\mathrm{d}\varphi_a}\Big|_{a=0} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\{L^{-1}[L(t)+a]\}}\Big|_{a=0} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t};$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_a}{\mathrm{d}a} = \frac{\mathrm{d}\{L^{-1}[L(t)+a]\}}{\mathrm{d}a} = \frac{\mathrm{d}L^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a}\Big|_{a=0} = \frac{\mathrm{d}L^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\Big|_{a=0} = \left(\frac{\mathrm{d}L^{-1}(t)}{\mathrm{d}t}\right).$$

Обозначим $r'(t) = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \left(\dfrac{\mathrm{d}L^{-1}(t)}{\mathrm{d}t}\right)$.

Тогда имеем:

$$\sqrt{\left|\frac{\mathrm{d}\varphi_a}{\mathrm{d}t}\right|}\Big|_{a=0} = 1; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\sqrt{\left|\frac{\mathrm{d}\varphi_a}{\mathrm{d}t}\right|}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}\varphi_a}{\mathrm{d}t}\right]^{-1}\times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi_a}{\mathrm{d}t}\right)\Big|_{a=0} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi_a}{\mathrm{d}a}\right)\Big|_{a=0} = \frac{1}{2}r'(t).$$

Таким образом, получаем следующий инфинитезимальный оператор:

$$\gamma = r(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}r'(t) = \frac{1}{L'(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\frac{L''(t)}{L'^2(t)}. \tag{21}$$

Для сдвига, в случае если $\varphi_a(t) = t - a$, соответственно имеем формулу

$$r(t) = \left(\frac{\mathrm{d}L^{-1}(t-a)}{\mathrm{d}t}\right)\Big|_{a=0} = \left(\frac{\mathrm{d}(a-t)}{\mathrm{d}t}\right)\Big|_{a=0} = -1, \tag{22}$$

и поэтому производящий оператор сдвига равен

$$\tau = -\mathrm{d}/\mathrm{d}t.$$

ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ПОДГРУППАМИ

Опишем взаимосвязь между сдвигом и другими однопараметрическими подгруппами с помощью коммутативных соотношений между соответствующими производящими операторами. Для операторов γ и τ коммутатор $[\gamma,\tau] = \gamma\tau - \tau\gamma$ равен

$$[\gamma,\ \tau] = -r\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{2}r'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + r'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{2}r'' + \frac{1}{2}r'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = r'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}r''.$$

Таким образом, коммутатор $[\gamma,\ \tau]$ и его действие на функцию $x(t)$ описываются выражениями:

$$[\gamma,\ \tau] = r'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}r'', \tag{23}$$

$$[\gamma,\tau]x = r'\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}r''x. \tag{24}$$

Рассмотрим важные частные случаи формул (23) и (24).

а. $[\gamma,\ \tau] = 0$. Этот случай эквивалентен тому, что $r'(t) = 0$, т. е. $r(t) = c$, и поэтому $\gamma = -c\tau$. Оператор γ по существу совпадает с производящим оператором сдвига.

б. $[\gamma,\ \tau] = -\lambda\tau,\quad \lambda = \mathrm{const}$. Применяя выражение (23), находим

$$[\gamma,\ \tau] = r'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}r'' = -\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{1}{2}r'' = -\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - r'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \text{или} \quad r = -\lambda.$$

Из последнего равенства следует, что $r(t) = -\lambda t + c$, где c — постоянная величина. При $c = 0$ с учетом (21) получаем следующую формулу:

$$\gamma = -\lambda t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\lambda, \quad r(t) = -\lambda t. \tag{25}$$

Подставляя функцию $r(t)$ в формулу (22), найдем значение $L(t)$:

$$r = \left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right)^{-1} = -\lambda t = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}L}.$$

Откуда получаем решение:

$$L(t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{c}{t}\right), \quad \text{или} \quad L^{-1}(t) = ce^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Преобразование функции $x(t)$, определяемое функцией $\varphi_a(t)$, обозначим α, и тогда

$$\alpha x(t) = x\left[te^{-\lambda t}\right]e^{-\lambda t/2}. \qquad (26)$$

Таким образом, мы получили однопараметрическую группу преобразований на D_0, называемую мультипликативной группой (группой дилатаций или растяжений). Подставляя в формулу (26) для простоты $\lambda = -1$, получаем ассоциированный инфинитезимальный оператор

$$\alpha = t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}. \qquad (27)$$

Коммутационное отношение при $\lambda = -1$ имеет вид $[\alpha,\ \tau] = -\tau$.

в. $[\gamma,\ \tau] = \mu\gamma, \quad \mu = \mathrm{const}$. Из этого отношения следует, что

$$r' = \mu r, \quad \text{т. к.} \quad r'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}r'' = \mu r,$$

$$\text{но} \quad \mu\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}r'\right) = r'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}r''.$$

Откуда $r' = \mu r$.

Далее получаем выражение, определяющее функцию $L(t)$:

$$\begin{cases} L(t) = -\dfrac{c}{\mu}e^{-\mu t} + c, \\ L^{-1}(t) = \dfrac{1}{\mu}\ln\left(\dfrac{\mu(t-c)}{c}\right). \end{cases} \qquad (28)$$

Рассмотрим коммутационное соотношение между a и произвольным g. Используя определение коммутатора, нетрудно получить выражение

$$[\alpha,\ \gamma] = (tr' - r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}tr. \qquad (29)$$

Возможные частные коммутаторы имеют вид [8]: 1) $[\alpha,\ \gamma] = 0$, 2) $[\alpha,\ \gamma] = \gamma\tau$, 3) $[\alpha,\ \gamma] = \mu\alpha$, 4) $[\alpha,\ \gamma] = k\gamma$. Не считая тривиальных решений, единственным γ, удовлетворяющим 1) является $\gamma = c\alpha$. В случае 2) $\gamma = c\tau(\mathrm{mod}\,\alpha)$, при этом никаких новых производящих операторов не появляется. Для 3) подходящих решений нет. В случае 4) производящий оператор имеет вид

$$\gamma = t^{k+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}(k+1)t^k, \quad k = \mathrm{const}. \qquad (30)$$

Нетрудно показать, что производящий оператор (30) удовлетворяет коммутационному соотношению

$$[\gamma, \tau] = (k+1)\left[t^k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}kt^{k-1}\right]. \qquad (31)$$

Рассмотрение выражения внутри квадратных скобок приводит к идее семейства производящих операторов, включающего $\tau,\ \alpha,\ \gamma$ и замкнутого относительно коммутационного умножения (31). Действительно, если положить $k = 1$, то из (31) получаем оператор

$$\nu = t^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + t, \quad \text{откуда} \quad [\nu,\ \tau] = 2\alpha. \qquad (32)$$

Оператор (32) является производящим для однопараметрической группы $\{\nu_t\}$ и задается формулой

$$(\nu_t x)(t) = x\left(\frac{t}{-at+1}\right)\frac{1}{|-at+1|}, \quad -\infty < a < \infty. \qquad (33)$$

Дифференциальные операторы $\tau,\ \alpha,\ \gamma$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\tau,\ \alpha] = \tau, \qquad [\nu,\ \tau] = 2\alpha, \qquad [\alpha,\ \nu] = \nu. \qquad (34)$$

Рассмотрим случай, когда на группе сдвигов G_a заданы также операции сжатия и инверсии. Двухпараметрические группы, изоморфные линейной группе преобразований времени, можно получить, используя формулу

$$t \to L^{-1}[\alpha L(t) + L(a)]. \qquad (35)$$

Когда $L(a) = 0$, получаем преобразование, генерирующее множество мультипликативных групп, являющихся сжатием на G_a. Эта группа изоморфна фактор-группе $G_\alpha \sim G_{\alpha a} \setminus G_a$

$$t \to L^{-1}[\alpha L(t)]. \qquad (36)$$

Преобразование, генерирующее множество инверсных групп имеет вид

$$t \to L^{-1}\left[\frac{L(t)}{-bL(t)+1}\right]. \qquad (37)$$

Преобразования времени (16), (36), (37) связаны между собой логарифмическим (экспоненциальным) и инверсным отображениями соответственно. Семейство двухпараметрических групп G_{ab}, задаваемых параметрами a и b, представляется выражением

$$t \to L^{-1}\left[\frac{\alpha L(t)}{-bL(t)+1}\right]. \quad (38)$$

Отметим, что в последнем случае нормальной подгруппой является подгруппа инверсий, и именно она разбивает всю группу G_{ab} на классы эквивалентности, совокупность которых (фактор-группа $G_{\alpha b}$) изоморфна мультипликативной подгруппе G_a: $G_{\alpha b} \setminus G_b \sim G_\alpha$. Аналогично получаем преобразование, изоморфное дробно-линейной функции (проективная группа):

$$t \to L^{-1}\left[\frac{\alpha L(t)+L(a)}{-bL(t)+1}\right]. \quad (39)$$

Найдем операторы Ли (порождающие операторы) (36) и (37). Учитывая нормировку $x(t)$ по энергии и дифференцируя по параметру, соответственно получаем:

$$\lambda = rL\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}r'L = L\left(\frac{1}{L'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{2}\frac{L''}{L'^2}\right),$$

$$\delta = rL^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}r'L^2 = L^2\left(\frac{1}{L'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{2}\frac{L''}{L'^2}\right).$$

С учетом (35) имеем следующие равенства между операторами:

$$\lambda = \gamma L, \qquad \delta = \gamma L^2 = \lambda L. \quad (40)$$

Операторы γ, λ, δ образуют алгебру Ли, удовлетворяющую следующим коммутационным соотношениям:

$$[\gamma, \lambda,] = \gamma, \quad [\delta, \gamma] = 2\lambda, \quad [\lambda, \delta] = \delta. \quad (41)$$

Пусть теперь R — векторное пространство над **R**, натянутое на $(\gamma, \lambda, \delta)$. Введем в R произведение [6], наделяя его структурой алгебры Ли. Коммутационные соотношения (41) показывают, что R изоморфна алгебре Ли инфинитезимальных операторов однопараметрических подгрупп группы преобразований (24), реализованных в пространстве функций D_0, удовлетворяющих условию (21). Коммутационные соотношения устанавливают также связь между сдвигом (31) и другими однопараметрическими подгруппами (36), (37). Задавая функцию $L(.)$, можно реализовать конкретное представление абстрактной группы. Установленная алгебра Ли, определяемая соотношениями (41), является более общей структурой по сравнению с алгеброй (34), т. к. она включает ее частным случаем.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВРЕМЕНИ, ГЕНЕРИРУЕМЫЕ КОМПОЗИЦИЕЙ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим случай когда, функция $L(.)$ представляется как композиция функций $L = L_1 L_2 \cdots L_n$. Тогда преобразование времени, генерирующее однопараметрическую группу преобразований, может быть записано в виде

$$t \to L_n^{-1} L_{n-1}^{-1} \cdots L_1^{-1}\left(L_1 L_2 \cdots L_n t + a\right). \quad (42)$$

Семейство (42) позволяет использовать составные операторы. С учетом (42) инфинитезимальные операторы $\gamma_n, \lambda_n, \delta_n$, соответствующие сдвигу, сжатию и инверсии, записываются в виде следующих выражений:

$$\gamma_n \to \frac{1}{\prod_i^n L_i'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\frac{\prod_i^n L_i''}{\prod_i^n L_i'^2}, \quad (43)$$

$$\lambda_n \to \prod_i^n L_i\left(\frac{1}{\prod_i^n L_i'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\frac{\prod_i^n L_i''}{\prod_i^n L_i'^2}\right), \quad (44)$$

$$\delta_n \to \prod_i^n L_i^2\left(\frac{1}{\prod_i^n L_i'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\frac{\prod_i^n L_i''}{\prod_i^n L_i'^2}\right). \quad (45)$$

Алгебра Ли операторов $\gamma_n, \lambda_n, \sigma_n$ описывается теми же коммутационными соотношениями, что и алгебра Ли операторов τ, α, γ.

Не составляет принципиальных сложностей экстраполировать рассматриваемую методику на случай многомерных состояний $x(t, \mathbf{z})$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$, когда на каждый из аргументов независимо действует однопараметрическая подгруппа. В этом случае семейство однопараметрических подгрупп сдвига, образующих четырехпараметрическую группу сдвига, задается системой преобразований

$$\begin{aligned} \varphi_a(t) &= L^{-1}[L(t)+a], \\ \varphi_{b_i}(z_i) &= L_i^{-1}[L_i(z_i)+b_i]. \end{aligned} \quad (46)$$

Индуцируемое преобразованиями (46), преобразование сигнала $s(t, \mathbf{z})$ в пространстве с сохраняемой нормой имеет вид

$$(g_a g_b)(t, \mathbf{z}) =$$

$$= \mathbf{x}[L^{-1}(y)\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{z})] \cdot \sqrt{\left|\frac{\mathrm{d}L^{-1}(y)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{z})}{\mathrm{d}\mathbf{z}}\right|},$$
$$y\big|_{a=0} = L^{-1}(t), \quad \mathbf{z}\big|_{b_i=0} = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{x}). \qquad (47)$$

Путем несложных вычислений нетрудно выяснить, что соответствующий инфинитезимальный оператор сдвига имеет вид

$$\gamma_{tx} = \frac{1}{L'(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \sum_{1}^{3}\frac{1}{L'(z_i)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_i} - \frac{1}{2}\frac{L''(t)}{L'^2(t)} - \frac{1}{2}\sum_{1}^{3}\frac{L''(z_i)}{L'^2(z_i)}. \qquad (48)$$

Полученное выражение показывает, что оператор не содержит смешанных членов. Последнее объясняется тем, что преобразование (47) является прямым произведением подгрупп, определяющих преобразование во временно́й и пространственной областях соответственно.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВРЕМЕНИ

Таким образом, для построения группы преобразования на заданном множестве операторов L_i, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяющих условию непрерывности и обратимости, необходимо следующее.

1. Задать размерность пространства параметров. Для групп преобразования вещественной прямой она не превышает трех.
2. Используя выражения (16), (36), (37), построить группу преобразований, изоморфную дробно-линейной группе преобразований или ее подгруппам.
3. Применяя формулы (43)−(45), найти инфинитезимальные операторы группы преобразований.
4. С помощью соотношений (40) устанавливаются коммутационные связи между операторами группы преобразований.
5. В случае пространственно-временны́х преобразований использовать выражения (46)–(48).
6. Найти индуцируемое преобразование состояния динамической системы в пространстве с сохраняемой нормой.

Необходимо отметить, что данная методика позволяет строить произвольные группы из уже заданных отображений L_i. Но на практике требуется из физических соображений решать обратную операцию — выделять группы преобразований. Последнее является сложной задачей, требующей большой интуиции, т. к. требование наличия групповых свойств у выделенного преобразования является очень жестким. Использование методики позволяет этот процесс превратить в простой алгоритм, сущность которого состоит в том, что сначала из физического механизма деформации носителя сигнала выделяется преобразование, которое не обязательно является групповым и которое затем аппроксимируется одним из групповых преобразований, получаемых с помощью изложенной выше методики. Так как набор операторов L_i, позволяет реализовать, по сути дела, широкий набор групповых преобразований, то и аппроксимация может быть решена достаточно точно.

Рассмотрим пример. Положим $L_1 = \ln(.)$, а $L_2 = (.)^2$. Тогда, применяя формулы (42), (43), получим преобразование времени и соответствующий ему инфинитезимальный оператор:

$$t \to e^{\sqrt{\ln^2 t + a}}, \quad \gamma_2 \to \frac{t}{2\ln t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \frac{1-\ln t}{\ln^2 t}.$$

Пример наглядно показывает, насколько расширяются возможности теоретико-группового подхода при использовании составных функций, т. к. в распоряжении исследователя оказывается, по сути дела, безграничный набор функций для аппроксимации реальных физических явлений. До последнего времени при рассмотрении деформаций времени ограничивались только дробно-линейными преобразованиями [1, 2, 4, 7–9], что в значительной мере обедняло возможности теоретико-группового подхода. Предлагаемый метод построения групп преобразований носителя сигнала и соответствующих им инфинитезимальных операторов в пространстве с сохраняющейся нормой, по сути дела, снимает эти ограничения, т. к. позволяет использовать не только мощную технику группового анализа состояний динамических систем (определение групп преобразований, поиск инвариантов, анализ дифференциальных уравнений, определение достаточных статистик, инвариантных относительно выделенной группы, и т. д.), но и стимулирует дальнейшие исследования в этой области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сапрыкин В.А., Рокотов С.П.* Теория обработки гидроакустической информации. Петродворец: ВВМУРЭ им. А.С. Попова, 1986. 308 с.
2. *Сапрыкин В.А., Волошин А.К., Рокотов С.П.* К вопросу представления сигналов. Анализ и обработка акустической информации // Тезисы 3-й ДАК "Человек и океан". Владивосток, 1982. Ч. 3. С. 46–50.
3. *Бутырский Е.Ю.* Основные понятия теории систем

и сигналов на группах преобразований // Информация и космос. 2007. № 3. С. 67–80.
4. *Бутырский Е.Ю.* Сигналы, инвариантные в полосе относительно эффекта Доплера // 10-я Всесоюзная конференция по информационной акустике. АН СССР. Москва, 1990.
5. *Бутырский Е.Ю.* Взвешенное преобразование Гильберта // Информация и космос. 2008. № 2. С. 40–46.
6. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. 587 с.
7. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований математической физики. М.: Наука, 1983. 280 с.
8. *Хида Т.* Броуновское движение. М.: Наука, 1987. 303 с.
9. *Ленг С.* SL(2,R). М.: Мир, 1977. 430 с.
10. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 1. М.: Сов. радио, 1977. 662 с.

Военно-морской институт радиоэлектроники им. А.С. Попова, Петродворец

Контакты: *Бутырский Евгений Юрьевич,*
evgenira88@mail.ru

Материал поступил в редакцию 5.07.2010.

SYSTEM AND SIGNAL MODELS INDUCED BY TIME TRANSFORMATIONS

Eu. Yu. Butyrsky

Popov Higher Naval Academy of Radio Electronics, Petrodvorets

Unceasing function of several variables in a form of weighted sum of univariate functions, determined on the generalized basis, formed as a linear superposition of arguments of the initial function is suggested. The given approach is adapted to the structure of the optimum filter and is a basis of the theory of spline-filtration, developed by the author, and can be used in solving the problem of signal reception on the background of noise and hindrances, described by nonlinear stochastic differential equations. The problem will be discussed in details in our future publications.

Keywords: theoretic-group approach, transformations, unceasing presentations, additive transformation, multiplicative transformation, group, inversion, operator, function, composition, algorithm