ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2011, том 21, № 1, с. 97–102

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ

УДК 534.29; 534.138

© Б. П. Шарфарец

О ПРОИЗВОЛЕ В ВЫБОРЕ ПОВЕРХНОСТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ТЕНЗОРА ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ИМПУЛЬСА ПРИ РАСЧЕТАХ СИЛ РАДИАЦИОННОГО ДАВЛЕНИЯ

Рассмотрен вопрос об инвариантности выбора поверхности интегрирования тензора плотности потока импульса при расчетах сил радиационного давления (СРД) в поле монохроматической звуковой волны. Отдельно рассмотрены случаи однородных и неоднородных идеальной и вязкой жидкостей. Подтверждено, что в случае однородной идеальной либо вязкой жидкости, как указывалось ранее рядом авторов, такая инвариантность существует. При наличии плавных или скачкообразных неоднородностей в жидкости такая инвариантность может оказываться несправедливой, несмотря на то что формально усредненная дивергенция тензора плотности потока импульса в области неоднородности может быть тождественно равна нулю. Показано, что причиной этому может служить возникновение рассеянного на этих неоднородностях поля. Рассмотрены конкретные примеры расчетов СРД.

Кл. сл.: радиационное давление, тензор плотности потока импульса, амплитуда рассеяния, вязкая жидкость, идеальная жидкость

ВВЕДЕНИЕ

При расчетах сил радиационного давления (СРД) в идеальных и реальных жидкостях одним из основных приемов, упрощающих их вычисление, является использование произвольности поверхности, охватывающей включение. И если в случае идеальной однородной жидкости этот прием справедлив [1, 2 и др.], то в случае реальных жидкостей [3–10 и др.], в частности уже в случае однородной вязкой жидкости, он требует обоснования. В работах [11, 12] такая возможность в случае вязкой жидкости подверглась сомнению. В качестве источника этого сомнения послужило косвенное доказательство (см. приложение в работе [11]) того, что произвольный выбор поверхности интегрирования для расчетов СРД в случае вязкой однородной жидкости неправомерен. Отметим сразу, что этот пример был автором неверно истолкован для однородных сред, однако является вполне пригодным для неоднородных сред, о чем пойдет речь в данной работе.

Ответ на вопрос о правомерности указанного в заголовке произвола является практически очень важным, т. к. наличие такой возможности позволяет серьезно упростить искомые выражения для СРД, использовать, в частности, при таких расчетах аппарат линейной теории рассеяния.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Настоящая работа посвящена рассмотрению случаев, когда существует возможность произвольно выбирать поверхность, охватывающую включение, при суммировании тензора плотности потока импульса через эту поверхность при расчетах СРД в случае бесконечной однородной или неоднородной идеальной или вязкой жидкости и монохроматического падающего поля частотой ω и временны́м периодом T. СРД будем рассматривать с точностью до второго порядка малости величин, характеризующих акустическое поле, — колебательной скорости $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)=$ $=\mathbf{v}^{(1)}+\mathbf{v}^{(2)}+\ldots$, акустического давления $p=p^{(1)}+$ $+p^{(2)}+\ldots$, плотности среды $\rho=\rho_0+\rho^{(1)}+$ $+\rho^{(2)}+\ldots$ и т. д.

Для точной математической постановки проблемы выпишем закон сохранения импульса в дифференциальной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_i\right)=-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Pi_{ik}\right)=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(T_{ik}-\rho v_i v_k\right), \qquad (1)$$

а также уравнение неразрывности жидкости

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho v_i\right). \qquad (2)$$

Здесь $\Pi_{ik} = T_{ik} - \rho v_i v_k$ — тензор плотности потока импульса; T_{ik} — тензор напряжений вязкой однородной жидкости

$$T_{ik} = -p\delta_{ik} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik}\right) + \varsigma\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik}; \quad (3)$$

μ, ς — коэффициенты сдвиговой и объемной (второй) вязкости соответственно; δ_{ik} — дельта-символ Кронекера. В случае идеальной жидкости $\mu = \varsigma = 0$. Тензор напряжений при этом равен

$$T_{ik} = -p\delta_{ik}. \quad (3а)$$

СРД $\langle \mathbf{F} \rangle$ обычно ищут либо по Рэлею [9, 10, 13 и др.] в виде

$$\langle F_i \rangle = \left\langle \int\limits_{S^p(t)} T_{ik} n_k \mathrm{d}s \right\rangle, \quad i = 1,2,3, \quad k = 1,2,3, \quad (4)$$

либо по Ланжевену—Бриллюэну [1, 5–8 и др.]

$$\langle F_i \rangle = \int\limits_{S_0} \langle T_{ik} - \rho v_i v_k \rangle n_k \mathrm{d}s. \quad (5)$$

Здесь и далее угловые скобки означают усреднение по интервалу времени T; $B^p(t)$ — колеблющийся объем частицы, ограниченный поверхностью $S^p(t)$; S_0 — равновесная поверхность частицы (поверхность покоя); $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — внешняя нормаль к соответствующей поверхности.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Ранее показано, что в случае однородной идеальной жидкости (см., например, [11]) и однородной вязкой жидкости [9, 10] при вычислении СРД с точностью до величин второго порядка малости оценки (4) и (5) совпадают.

Приведем математическое выражение для основного принципа динамики жидкости, носящего название принципа сохранения количества движения [17, с. 20]: "*скорость изменения количества движения жидкости, заключенной в движущемся объеме $B(t)$, равна результирующей сил, действующих на эту жидкость*". Аналитическим выражением этого принципа является уравнение

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{B(t)} \rho\mathbf{v}\mathrm{d}V = \int\limits_{B(t)} \rho\mathbf{f}\,\mathrm{d}V + \int\limits_{S(t)} \mathbf{T}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s.$$

Здесь $\mathbf{f}$ — поле внешних сил, отнесенных к единице массы; $\mathbf{T}$ — тензор напряжений. При отсутствии поля внешних сил последнее выражение сводится к виду

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{B(t)} \rho\mathbf{v}\,\mathrm{d}V = \int\limits_{S(t)} \mathbf{T}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \int\limits_{S(t)} T_{ik} n_k\,\mathrm{d}s. \quad (6)$$

В случае включения, колеблющегося в жидкости, это выражение необходимо уточнять, вставляя в него параметры включения — плотность и колеблющуюся поверхность включения $S^p(t)$. Однако из вида (6) ясно, что корректной является оценка СРД в виде (4) по Рэлею. Тот факт, что оценки (4) по Рэлею и (5) по Ланжевену—Бриллюэну совпадают с точностью до величин второго порядка малости, только облегчает расчет этих оценок.

Доказательство факта совпадения этих оценок опирается на приведенную для гармонических процессов в работе [13] формулу, которую можно записать в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{B(t)} \rho_0 \mathbf{v}^{(1)}\mathrm{d}v = \int\limits_{B(t)} \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}^{(1)}\mathrm{d}v + \int\limits_{S(t)} \rho_0 \mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}v,$$

и тот факт, что

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{B(t)} \rho_0 \mathbf{v}^{(1)}\mathrm{d}V \right\rangle = 0. \quad (7)$$

Тогда с точностью до величин второго порядка малости справедливо равенство

$$\left\langle \int\limits_{B(t)} \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}^{(1)}\mathrm{d}v \right\rangle = -\int\limits_{S} \langle \rho_0 \mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\rangle \mathrm{d}v. \quad (8)$$

Здесь S — равновесная поверхность объема $B(t)$.

Коснемся некоторых деталей доказательства соотношений (7) и (8). Очевидно, что при гармоническом характере колебаний плотности ρ, колебательной скорости $\mathbf{v}$ и нормальной скорости v_n границы $S(t)$ произвольного объема жидкости $B(t)$, имеет место равенство

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{B(t)} \rho\mathbf{v}\,\mathrm{d}V \right\rangle = 0. \quad (7а)$$

Это является следствием того, что интеграл в (7а) есть функция времени, состоящая из суммы временны́х гармонических функций с частотами колебаний $n\omega$, $n = 0,1,2,\ldots$. После дифференцирования этой функции по времени постоянная составляющая исчезает, из чего следует равенство (7а). Очевидно, что из равенства (7а) следует равенство (7), оцененное до величин второго порядка малости. Далее из (6) и из (7а) сразу следует, что средняя сила, действующая на объем жидкости $B(t)$

равна нулю. Из равенства (7), а также кинематической теоремы переноса [17], справедливой для произвольного объема жидкости

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{B(t)}\phi\mathrm{d}v=\int_{B(t)}\frac{\partial}{\partial t}\phi\mathrm{d}v+\oint_{S(t)}\phi(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s \tag{9}$$

(здесь ϕ — некоторая скалярная или векторная характеристика поля), и следует равенство (8).

Пусть $T_{ik}^{(l)}$ — тензоры напряжений порядка $l=1,2,\ldots$, получающиеся при подстановке в (3) величин $p^{(l)}$ и $\mathbf{v}^{(l)}$. В работе [9] с точностью до величин второго порядка малости корректно получена тождественность СРД в виде (4) и (5)

$$\left\langle F_i^{(2)}\right\rangle=\left\langle\int_{S^p(t)}(T_{ik}{}^{(1)}+T_{ik}{}^{(2)})n_k\mathrm{d}s\right\rangle=$$
$$=\left\langle\int_{S^p(t)}T_{ik}{}^{(1)}n_k\mathrm{d}s\right\rangle+\int_{S_0}\left\langle T_{ik}{}^{(2)}\right\rangle n_k\mathrm{d}s=$$
$$=\int_{S_0}\left\langle T_{ik}{}^{(2)}-\rho_0v_i{}^{(1)}v_k\right\rangle n_k\mathrm{d}s. \tag{10}$$

Здесь $\left\langle F_i^{(2)}\right\rangle$ — СРД, вычисленная с точностью до величин второго порядка малости.

Очевидно, что условием инвариантности СРД при использовании выражения (10) по отношению к произвольной поверхности интегрирования S, содержащей внутри себя произвольную поверхность S_1, внутри которой в свою очередь находится поверхность S_0 (отметим, что в частном случае S_1 и S_0 могут совпадать), является равенство

$$\left\langle F_i\right\rangle=\int_{S_1}\left\langle T_{ik}-\rho v_iv_k\right\rangle n_k\mathrm{d}s=\int_{S}\left\langle T_{ik}-\rho v_iv_k\right\rangle n_k\mathrm{d}s. \tag{11}$$

Если теперь рассмотреть объем V, ограниченный поверхностями S_1, и S, то по теореме Остроградского—Гаусса с учетом равенства (11) следует цепочка равенств

$$\int_{S_1\cup S}\left\langle T_{ik}-\rho v_iv_k\right\rangle n_k\mathrm{d}s=\int_{S}\left\langle T_{ik}-\rho v_iv_k\right\rangle n_k\mathrm{d}s-$$
$$-\int_{S_1}\left\langle T_{ik}-\rho v_iv_k\right\rangle n_k\mathrm{d}s=\int_V\frac{\partial}{\partial x_k}\left\langle T_{ik}-\rho v_iv_k\right\rangle\mathrm{d}V=$$
$$=-\int_V\frac{\partial}{\partial x_k}\left\langle \Pi_{ik}\right\rangle\mathrm{d}V=0. \tag{12}$$

Учитывая произвольность объема V и выражение (1), получаем условие, при котором выполняется инвариантность СРД относительно поверхности интегрирования осредненного тензора плотности потока импульса: вне поверхности S_0 должно выполняться тождество

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)\right\rangle=-\left\langle\frac{\partial}{\partial x_k}(\Pi_{ik})\right\rangle=$$
$$=\left\langle\frac{\partial}{\partial x_k}(T_{ik}-\rho v_iv_k)\right\rangle\equiv 0. \tag{13}$$

Очевидно, что член слева в (13) исчезает при осреднении на интервале $[0,T]$ для гармонического сигнала с угловой частотой, кратной $\omega=\frac{2\pi}{T}$, т. к. после дифференцирования по времени в усредняемой функции постоянная составляющая исчезает и остаются только гармоники с частотами, кратными ω. Это перестает быть справедливым вследствие "медленного линейного движения сферы в поле радиационного давления" [9, с. 451], когда после усреднения член слева может отличаться от нуля. Однако вслед за автором работы [15] автор работы [9] пренебрегает этим отличием от нуля члена слева в (8) в акустическом случае. Отметим, что, как показано в работе [16], в случае, когда акустическое поле накладывается на существующее в среде независимое течение, происходит средний обмен импульсом между течением и акустическим полем, что, понятно, приводит к возникновению средних сил, а значит к отличию от нуля члена слева в (13).

Рассмотрим еще одно соображение. Как показано в работах [3, 4, 14], радиационное давление возникает вследствие потери импульса в единицу времени, равной соответствующей разнице между приносимым на препятствие первичной волной импульсом и импульсом, уносимым рассеянной на нем волной. Простейший пример этому приведен в работе [14, с. 364] при возникновении среднего давления, оказываемого звуковой волной на границу раздела между двумя однородными идеальными жидкостями. Поэтому если в жидкости есть предпосылки для возникновения рассеянной волны, то на соответствующей неоднородности происходит потеря импульса, что приводит к возникновению СРД. Эта неоднородность не обязательно должна являться включением со скачкообразным изменением свойств. Рассеяние вызывает и гладкое изменение свойств среды в некотором объеме (см., например [18]). Отметим, что в случае гладкого изменения свойств среды, условие (13) формально остается справедливым, однако указанная инвариантность поверхности интегрирования теряет силу вследствие потери импульса на рассеивающей области.

Возможна соответствующая потеря импульса и в случае, когда на пути первичной волны возникает вязкое включение жидкости, в том числе и при

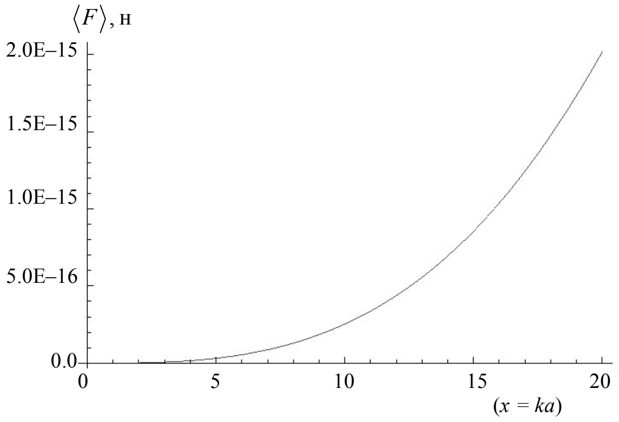

Рис. 1. Зависимость силы радиационного давления от волнового размера шарообразного вязкого включения в идеальной жидкости в поле плоской бегущей волны единичной амплитуды

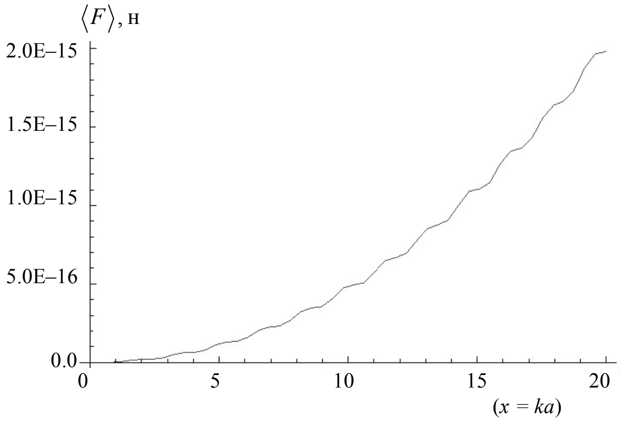

Рис. 2. Зависимость силы радиационного давления от волнового размера шарообразного включения со скачкообразным возмущением скорости звука и плотности в идеальной жидкости в поле плоской бегущей волны единичной амплитуды

плавном изменении свойств среды. Именно этот пример был рассмотрен автором в работе [11], который был не совсем корректно интерпретирован.

Таким образом, рассмотренная инвариантность поверхности интегрирования при расчете СРД верна при условии сохранения однородности жидкости внутри объема, внутри которого варьируется поверхность интегрирования.

ПРИМЕРЫ

Ниже приведены результаты некоторых расчетов. В первом примере рассматривается идеальная жидкость, содержащая в качестве включения вязкую шарообразную область, произвольного радиуса. Плотности включения и идеальной жидкости совпадают, волновое число в идеальной жидкости $k = \dfrac{\omega}{c}$, волновое число во включении из-за вязкости получает положительную мнимую добавку [14, с. 425] $k_1 = \dfrac{\omega}{c} + i\alpha = k + i\alpha$. Окружающая жидкость имеет следующие параметры: скорость звука $c = 1500$ м/с, плотность $\rho = 1000$ кг/м^3; включение имеет ту же плотность и ту же скорость звука, но с малой отрицательной мнимой частью. Кроме того, во включении принято $\alpha = 25 \cdot 10^{-15} f^2$ (коэффициент затухания для воды); $f = 2.5$ МГц — частота (отметим, что в этом случае возмущение исходного волнового числа включения относительно окружающей среды составляет примерно полторы тысячных процента). На включение падает бегущая плоская волна единичной амплитуды. Неоднородное включение вызывает рассеяние в поле первичной волны, вызывающее СРД. На рис. 1 представлено изменение СРД в зависимости от волнового радиуса $x = ka$ описанного неоднородного включения, $a = x / k$ — радиус включения. На рис. 2 представлен аналогичный график для случая, когда во включении отсутствует затухание, однако скорость звука равна $c_1 = 1510$ м/с, а плотность $\rho_1 = 1020$ кг/м^3 (в этом случае возмущение волнового числа составляет уже около семи десятых процента, а плотности — 2 процента). Из рисунков видно, что СРД в обоих случаях практически совпадают.

Как видно, наличие вязкого возмущения жидкости приводит качественно к таким же последствиям, что и соответствующее скачкообразное возмущение параметров включения.

ВЫВОДЫ

В работе рассмотрен вопрос об инвариантности выбора поверхности интегрирования тензора плотности потока импульса при расчетах сил радиационного давления. Отдельно рассмотрены случаи однородной и неоднородной идеальной и вязкой жидкостей. Подтверждено, что в случае однородной идеальной, либо вязкой жидкости, как указывалось ранее рядом авторов, такая инвариантность существует. Однако при наличии плавных или скачкообразных неоднородностей в жидкости такая инвариантность может оказываться несправедливой, несмотря на то что формально усредненная дивергенция тензора плотности потока импульса в области неоднородности может быть тождественно равна нулю (см. выражение (13)). Причиной этому может служить возникновение вдобавок к полю первичной волны рассеянного на этих неоднородностях поля. Рассмотрены конкретные примеры расчетов СРД.

Для вычислений в работе использовался пакет "Mathematica-7", лицензия L3259-7547.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горьков Л.П.* О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле в идеальной жидкости // Доклады АН СССР. 1961. Т. 140, № 1. С. 88–91.
2. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.
3. *Westervelt P.J.* The theory steady forces caused by sound waves // J. Acoust. Soc. Am. 1951. V. 23, N 4. P. 312–315.
4. *Westervelt P.J.* Acoustic radiation pressure // J. Acoust. Soc. Am. 1957. V. 29, N 1. P. 26–29.
5. *Данилов С.Д., Миронов М.А.* О силе радиационного давления, действующей на малую частицу в звуковом поле // Акуст. журн. 1984. Т. 30, № 4. С. 467–473.
6. *Данилов С.Д.* Средняя сила, действующая на малую сферу в поле бегущей волны в вязкой жидкости // Акуст. журн. 1985. Т. 31, № 1. С. 45–49.
7. *Данилов С.Д.* Средняя сила, действующая на малое тело в осесимметричном звуковом поле в реальной среде // Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газа. 1986. № 5. С. 161–169.
8. *Danilov S.D., Mironov M.A.* Mean force on a small in a sound field in a viscous fluid // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 107, N 1. P. 143–153.
9. *Doinikov A.A.* Acoustic radiation pressure on a rigid sphere in a viscous fluid // Proc. R. Soc. Lond. A. 1994. V. 447. P. 447–466.
10. *Doinikov A.A.* Acoustic radiation pressure on a compressible sphere in a viscous fluid // J. Fluid Mech. 1994. V. 267. P. 1–21.
11. *Шарфарец Б.П.* Анализ работ, посвященных вычислению радиационного давления. 1. Идеальная жидкость и случай малых волновых размеров пограничного слоя // Научное приборостроение. 2010. Т. 20, № 3. С. 95–102.
12. *Шарфарец Б.П.* Анализ работ, посвященных вычислению радиационного давления. 2. Вязкая жидкость // Научное приборостроение. 2010. Т. 20, № 3. С. 103–107.
13. *Yosioka K., Kavasima Y.* Acoustic radiation pressure on compressible sphere // Acustica. 1955. V. 5. P. 167–173.
14. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
15. *Lighthill J.* Acoustic streaming // J. Sound Vib. 1978. V. 61, N 3. P. 391–418.
16. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 600 с.
17. *Серрин Дж.* Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963. 256 с.
18. *Colton D., Kress R.* Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. NY.: Springer, 1998.

Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург

Контакты: *Шарфарец Борис Пинкусович*, sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 7.10.2010.

ON ARBITRARINESS IN THE CHOICE OF THE TENSOR SURFACE INTEGRATION OF IMPULSE STREAM DENSITY IN CALCULATIONS OF RADIATING PRESSURE FORCES

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation RAS, Saint-Petersburg

The problem of choice invariance of a tensor surface integration of impulse stream density in calculations of radiation pressure forces (RPS) in the field of monochromatic sound wave is discussed. Cases of homogeneous and heterogeneous ideal and viscous liquids are regarded separately. It is confirmed that in the case of homogeneous ideal or viscous liquid such invariance exists, the fact earlier described by some authors. In case of smooth or intermittent heterogeneity in liquid such invariance seems to be unjust in spite of the fact that formally the averaged divergence of tensor of impulse stream density in the heterogeneity may identically equal to zero. The cause may be the appearance of the field dispersed on this heterogeneity.

Keywords: radiation pressure, momentum flux tensor, scattering amplitude, viscous fluid, ideal fluid