ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2010, том 20, № 1, с. 78–86

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ

УДК 534.131.2

© Б. П. Шарфарец

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НАПОЛНЕННОГО ЖИДКОСТЬЮ УПРУГОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КАПИЛЛЯРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ. I. ТЕОРИЯ

В работе в теоретическом плане рассматривается задача о собственных упруго-акустических колебаниях неоднородного цилиндра, состоящего из упругой трубки конечной длины, заполненной жидкостью. Задача поставлена в наиболее общем виде. Решение ищется в классическом стиле методом разделения переменных. Показано, что удовлетворение граничных условий на торцах трубки в рамках этого метода невозможно. Предложен алгоритм определения собственных частот колебательной системы. Результаты работы могут быть использованы в случаях применения ультразвука в задачах коагуляции частиц.

Кл. сл.: резонанс, собственные частоты колебания, собственные функции, собственные значения

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] была рассмотрена задача о собственных акустических колебаниях неоднородного цилиндра, состоящего из стеклянной трубки, заполненной жидкостью. При этом учитывались только объемные (продольные) колебания в стенках трубки. Для выяснения правомерности такого допущения в настоящей работе сделана попытка учета упругих свойств стенок трубки, т. е. рассмотрены еще и сдвиговые волны, а следовательно, получена возможность выявить степень расхождения со случаем пренебрежения упругими свойствами стенок трубки, рассмотренным в [1].

Вопросу рассмотрения упругих колебаний в полых цилиндрах посвящено достаточно много работ. Так, в работе [2] рассматриваются аксиально-симметричные, а в работе [3] — произвольные упругие гармонические волны в бесконечном полом цилиндре в вакууме; результаты сравниваются с аналогичными, полученными из теории оболочек. В работах [4–6] изучаются резонансные явления в бесконечном полом цилиндре в идеальной жидкости под воздействием различных нагрузок. В работе [7] рассматриваются упругие колебания сплошного цилиндра конечной длины в вакууме.

В настоящей работе изучаются резонансные явления в системе, состоящей из полого упругого цилиндра конечной длины, заполненного изнутри жидкостью, а снаружи контактирующего с вакуумом.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Пусть дан круговой кольцевой цилиндр, высотой l, внутренним радиусом a_1 и внешним радиусом a, состоящий из некоторого материала плотностью ρ и со скоростями продольных c_l и поперечных (сдвиговых) c_t волн. Внутри кольцевого цилиндра находится основная жидкость, с постоянной плотностью ρ_w и скоростью звука c_w. На границах цилиндра справедливы однородные условия Дирихле. Необходимо оценить собственные колебания описанного объема.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Остановимся на уравнениях колебания в упругой полой трубке конечной длины. Выпишем уравнения Ламе для линейно-упругой однородной изотропной среды в отсутствие внешних источников [7]

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\ \mathrm{grad\ div}\ \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u}\,. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор смещения; λ и μ — упругие постоянные Ламе. Если представить

$$\mathbf{u} = \mathrm{grad}\ \Phi + \mathrm{rot}\ \mathbf{\Psi} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t\,, \qquad (2)$$

где

$$\mathbf{u}_l = \mathrm{grad}\ \Phi, \qquad \mathbf{u}_t = \mathrm{rot}\ \mathbf{\Psi}\,,$$

то уравнение (1) распадается на два уравнения для скалярного Φ и векторного $\mathbf{\Psi}$ потенциалов:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=c_l^{\,2}\Delta\Phi,\quad c_l^{\,2}=\frac{\lambda+2\mu}{\rho},$$
$$\frac{\partial^2\mathbf{\Psi}}{\partial t^2}=c_t^{\,2}\Delta\mathbf{\Psi},\quad c_t^{\,2}=\frac{\mu}{\rho}. \tag{3}$$

Перепишем систему (3) применительно к цилиндрической системе координат, т. е. преобразуем $(x,y,z)\to(r,\varphi,z)$ [8, с. 358, 361]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=c_l^{\,2}\Delta\Phi,\\
&\frac{\partial^2\Psi_r}{\partial t^2}=c_t^{\,2}\left(\Delta\Psi_r-\frac{1}{r^2}\left(2\frac{\partial\Psi_\varphi}{\partial\varphi}+\Psi_r\right)\right),\\
&\frac{\partial^2\Psi_\varphi}{\partial t^2}=c_t^{\,2}\left(\Delta\Psi_\varphi+\frac{1}{r^2}\left(2\frac{\partial\Psi_r}{\partial\varphi}-\Psi_\varphi\right)\right),\\
&\frac{\partial^2\Psi_z}{\partial t^2}=c_t^{\,2}\Delta\Psi_z;
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(r\Psi_r\right)}{\partial r}+\frac{\partial\Psi_\varphi}{\partial\varphi}\right]+\frac{\partial\Psi_z}{\partial z}=0; \tag{5}$$

$$\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{6}$$

Связь поля смещений с потенциалами следующая:

$$\begin{aligned}
&u_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial\Psi_\varphi}{\partial z},\\
&u_\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}+\frac{\partial\Psi_r}{\partial z}-\frac{\partial\Psi_z}{\partial r},\\
&u_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(r\Psi_\varphi\right)}{\partial r}-\frac{\partial\Psi_r}{\partial\varphi}\right].
\end{aligned} \tag{7}$$

Приведем также выражения для тензоров напряжения и деформации [8, с. 360]:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\qquad \varepsilon_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_r}{r},\qquad \varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},\\
&\varepsilon_{r\varphi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}-\frac{u_\varphi}{r}\right),\\
&\varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right),\\
&\varepsilon_{\varphi z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}\right);
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rr}=\left(\lambda+2\mu\right)\varepsilon_{rr}+\lambda\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}+\varepsilon_{zz}\right),\\
&\sigma_{\varphi\varphi}=\left(\lambda+2\mu\right)\varepsilon_{\varphi\varphi}+\lambda\left(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{zz}\right),\\
&\sigma_{zz}=\left(\lambda+2\mu\right)\varepsilon_{zz}+\lambda\left(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\varphi\varphi}\right),\\
&\sigma_{r\varphi}=2\mu\varepsilon_{r\varphi},\qquad \sigma_{rz}=2\mu\varepsilon_{rz},\qquad \sigma_{\varphi z}=2\mu\varepsilon_{\varphi z};
\end{aligned} \tag{9}$$

и выражения напряжений через потенциалы [9, с. 36]:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rr}=\lambda\Delta\Phi+2\mu\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial\Psi_\varphi}{\partial z}\right)\right],\\
&\sigma_{\varphi\varphi}=\lambda\Delta\Phi+2\mu\frac{1}{r}\times\\
&\times\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Psi_r}{\partial\varphi\partial z}-\frac{\partial\Psi_\varphi}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial^2\Psi_z}{\partial r\partial\varphi}\right),\\
&\sigma_{zz}=\lambda\Delta\Phi+2\mu\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi_\varphi}{\partial z}\right)-\frac{\partial^2\Psi_r}{\partial\varphi\partial z}\right]\right\},\\
&\sigma_{r\varphi}=\mu\left\{2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)+r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Psi_r}{\partial z}-\frac{\partial\Psi_z}{\partial r}\right)\right]+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi_z}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi_\varphi}{\partial\varphi\partial z}\right\};\\
&\sigma_{\varphi z}=\mu\left\{\frac{2}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi\partial z}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi_\varphi}{\partial\varphi}\right)-\frac{\partial^2\Psi_r}{\partial\varphi^2}\right]+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial^2\Psi_r}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\Psi_z}{\partial r\partial z}\right\};\\
&\sigma_{rz}=\mu\left[2\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z}-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_r}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Psi_\varphi}{r}\right)+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial^2\Psi_\varphi}{\partial r^2}-\frac{\partial^2\Psi_\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi_z}{\partial z\partial\varphi}\right].
\end{aligned} \tag{9a}$$

Далее поставим краевые условия на внутренней и внешней поверхностях цилиндрической трубки, а также на ее торцах. Внешняя поверхность при $r=a$ граничит с вакуумом (свободная граница), внутренняя поверхность при $r=a_1$ граничит с жидкостью. На свободной границе равны нулю компоненты тензора упругого напряжения

$$\sigma_{rr}=\sigma_{r\varphi}=\sigma_{rz}=0. \tag{10}$$

Внутренняя поверхность трубки граничит с идеальной жидкостью. В этом случае справедливы следующие граничные условия [10, с. 442].

– Нормальное напряжение на границе равно давлению в жидкости, взятому с обратным знаком;

касательные напряжения равны нулю; нормальные скорости твердого тела и жидкости на границе равны между собой:

$$\sigma_{rr}\big|_{r=a_1} = -P_w\big|_{r=a_1}, \quad \sigma_{r\varphi}\big|_{r=a_1} = \sigma_{rz}\big|_{r=a_1} = 0, \qquad \dot{u}_r\big|_{r=a_1} = v_{wr}\big|_{r=a_1}. \tag{11}$$

– На торцах трубки равны нулю компоненты тензора упругого напряжения:

$$\sigma_{zz}\big|_{z=0} = \sigma_{z\varphi}\big|_{z=0} = \sigma_{rz}\big|_{z=0} = \sigma_{zz}\big|_{z=l} = \sigma_{z\varphi}\big|_{z=l} = \sigma_{rz}\big|_{z=l} = 0. \tag{12}$$

В жидкости поле для потенциала колебательной скорости описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial t^2} = c_w{}^2 \Delta \Phi_w. \tag{13}$$

Здесь Φ_w — потенциал колебательной скорости $\mathbf{v}_w$ в жидкости. Колебательная скорость и давление P_w в жидкости выражаются следующим образом:

$$\mathbf{v}_w = \mathrm{grad}\Phi_w, \qquad P_w = -\rho_w \frac{\partial \Phi_w}{\partial t}. \tag{14}$$

Краевые условия на границе с полым цилиндром приведены в (11); на торцах цилиндра при $z = 0,\ l$ равно нулю давление в жидкости

$$P_w\big|_{z=0} = P_w\big|_{z=l} = 0. \tag{15}$$

Полагаем, что рассматривается стационарный гармонический процесс. Поскольку ниже амплитуда колебаний рассматривается в вещественной форме, временной множитель принимаем в форме $\cos\omega t$. Для потенциалов смещения в упругой трубке (оставлены те же обозначения для простоты изложения) получаем из (4) следующую систему:

$$\Delta\Phi + \frac{\omega^2}{c_l^2}\Phi = 0, \qquad \Delta\Psi_z + \frac{\omega^2}{c_t^2}\Psi_z = 0; \tag{16}$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{r^2} + \frac{\omega^2}{c_t^2}\right)\Psi_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \qquad \left(\Delta - \frac{1}{r^2} + \frac{\omega^2}{c_t^2}\right)\Psi_\varphi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \Psi_r}{\partial r} = 0. \tag{17}$$

Для давления в жидкости имеем:

$$\Delta P_w + \frac{\omega^2}{c_w{}^2} P_w = 0. \tag{18}$$

Здесь лапласиан Δ имеет вид (6). Решение системы (17), (18) ищем в виде произведения функций от одной переменной, что является стандартным для отыскания собственных колебаний.

В работе [3] для полого, а следом и в [11] для сплошного бесконечного цилиндра предложено искать решение свободных колебаний в следующем виде:

$$\Phi = f(r)\ \cos m\varphi\ e^{i\xi z}, \quad \Psi_r = g_r(r)\ \sin m\varphi\ e^{i\xi z}, \quad \Psi_\varphi = g_\varphi(r)\ \cos m\varphi\ e^{i\xi z}, \quad \Psi_z = g_z(r)\ \sin m\varphi\ e^{i\xi z}, \qquad m = 0,1,2,\ldots$$

В работе [1] применительно к случаю жидких слоев давление искалось в виде

$$P_w = f_w(r)\ e^{im\varphi}\ \sin\xi_k z,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Учитывая, что на интервале $\varphi \in [0, 2\pi]$ полной является либо система функций $\{e^{im\varphi}\}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, либо система $\{\cos m\varphi,\ \sin m\varphi\}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, решение задачи будем искать двояко.

В первом случае ставим задачу во внутренней жидкости

$$P_w = f_w(r) \cdot \cos m\varphi \cdot \sin\xi_k z, \quad r \in [0, a_1] \tag{19}$$

и в полом упругом конечном цилиндре:

$$\begin{aligned} &\Phi^c = f^c(r) \cdot \cos m\varphi\ \cdot L^c(\xi_k z), \\ &\Psi_r{}^c = g_r{}^c(r)\ \cdot \sin m\varphi\ \cdot L_r{}^c(\xi_k z), \\ &\Psi_\varphi{}^c = g_\varphi{}^c(r)\ \cdot \cos m\varphi\ \cdot L_\varphi{}^c(\xi_k z), \\ &\Psi_z{}^c = g_z{}^c(r)\ \cdot \sin m\varphi\ \cdot L_z{}^c(\xi_k z), \\ &r \in [a_1, a]. \end{aligned} \tag{20}$$

Во втором случае соответственно

$$P_w = f_w(r) \cdot \sin m\varphi \cdot \sin\xi_k z, \quad r \in [0, a_1], \tag{19a}$$

$$\begin{aligned} &\Phi^s = f^s(r) \cdot \sin m\varphi\ \cdot L^s(\xi_k z), \\ &\Psi_r{}^s = g_r{}^s(r) \cdot \cos m\varphi\ \cdot L_r{}^s(\xi_k z), \\ &\Psi_\varphi{}^s = g_\varphi{}^s(r) \cdot \sin m\varphi\ \cdot L_\varphi{}^s(\xi_k z), \\ &\Psi_z{}^s = g_z{}^s(r) \cdot \cos m\varphi\ \cdot L_z{}^s(\xi_k z), \\ &r \in [a_1, a]. \end{aligned} \tag{20a}$$

Здесь $L(\xi_k z) = \begin{cases} \cos\dfrac{k\pi}{l} z, \\ \sin\dfrac{k\pi}{l} z, \end{cases}$ $z \in [0, l]$ — неопределенная пока в каждом конкретном случае функция, равная либо $\cos\xi_k z$, либо $\sin\xi_k z$, выбор которой будет пояснен ниже; $\xi_k = \dfrac{k\pi}{l}$, $k = 1, 2, ...$ — дискретные значения продольной составляющей волнового вектора, выбранные таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия (15) на торцах трубки в столбе жидкости. Верхний индекс c и s в выражениях (19)–(20а) зависит от того, какая функция — cos или sin — взята в азимутальном сомножителе выражения для давления в жидком цилиндре. Теперь, следуя технике [3], получаем уравнения для радиальных составляющих из (20):

$$\begin{aligned} &\mathrm{B}_{m,\alpha_k r}\left[f^c(r) \right] = 0, \\ &\mathrm{B}_{m,\beta_k r}\left[g_z{}^c(r) \right] = 0, \\ &\mathrm{B}_{m+1,\beta_k r}\left[g_r{}^c(r) - g_\varphi{}^c(r) \right] = 0, \\ &\mathrm{B}_{m-1,\beta_k r}\left[g_r{}^c(r) + g_\varphi{}^c(r) \right] = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

где оператор B определяется следующим образом:

$$\mathrm{B}_{m,x} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{m^2}{x^2} - 1 \right) \right];$$

$$\alpha_k{}^2 = \frac{\omega^2}{c_l{}^2} - \xi_k{}^2; \ \beta_k{}^2 = \frac{\omega^2}{c_t{}^2} - \xi_k{}^2.$$

Действуя аналогично, получаем уравнения для радиальных составляющих из (20а):

$$\begin{aligned} &\mathrm{B}_{m,\alpha_k r}\left[f^s(r) \right] = 0, \\ &\mathrm{B}_{m,\beta_k r}\left[g_z{}^s(r) \right] = 0, \\ &\mathrm{B}_{m-1,\beta_k r}\left[g_r{}^s(r) - g_\varphi{}^s(r) \right] = 0, \\ &\mathrm{B}_{m+1,\beta_k r}\left[g_r{}^s(r) + g_\varphi{}^s(r) \right] = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Функции $f_w(r)$ из (19), (19а), а также общее решение (21), (22) выражается в терминах цилиндрических функций Бесселя J и Y или модифицированных функций Бесселя I и K от аргументов $\bar{\alpha}_k r = |\alpha_k r|$ и $\bar{\beta}_k r = |\beta_k r|$, как показано в таблице (в первых двух строках таблицы принято обозначение $\bar{\sigma}_k = |\sigma_k|$, $\sigma_k{}^2 = \dfrac{\omega^2}{c_w{}^2} - \xi_k{}^2$).

Введем обозначения: $2g_1 = g_r - g_\varphi$, $2g_2 = g_r + g_\varphi$, $g_3 = g_z$. Тогда общими решениями уравнений (21), (22) будут соответственно

Функции, используемые при решении уравнений (19), (19а), (21), (22)

Интервал по частоте	Используемые функции
$\omega < \xi_k c_w$	$I(\bar{\sigma}_k r)$
$\omega > \xi_k c_w$	$J(\sigma_k r)$
$\omega < \xi_k c_t$	$I(\bar{\alpha}_k r)$, $K(\bar{\alpha}_k r)$, $I(\bar{\beta}_k r)$, $K(\bar{\beta}_k r)$
$\xi_k c_t < \omega < \xi_k c_l$	$I(\bar{\alpha}_k r)$, $K(\bar{\alpha}_k r)$, $J(\beta_k r)$, $Y(\beta_k r)$
$\omega > \xi_k c_l$	$J(\alpha_k r)$, $Y(\alpha_k r)$; $J(\beta_k r)$, $Y(\beta_k r)$

$$
\begin{aligned}
&f^c(r) = AZ_m(\bar{\alpha}_k r) + BW_m(\bar{\alpha}_k r),\\
&g_3{}^c(r) = A_3 Z_m(\bar{\beta}_k r) + B_3 W_m(\bar{\beta}_k r),\\
&2g_1{}^c(r) = \left(g_r{}^c(r) - g_\varphi{}^c(r)\right) =\\
&\qquad = 2A_1 Z_{m+1}(\bar{\beta}_k r) + 2B_1 W_{m+1}(\bar{\beta}_k r),\\
&2g_2{}^c(r) = \left(g_r{}^c(r) + g_\varphi{}^c(r)\right) =\\
&\qquad = 2A_2 Z_{m-1}(\bar{\beta}_k r) + 2B_2 W_{m-1}(\bar{\beta}_k r)
\end{aligned}
\tag{23}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&f^s(r) = AZ_m(\bar{\alpha}_k r) + BW_m(\bar{\alpha}_k r),\\
&g_3{}^s(r) = A_3 Z_m(\bar{\beta}_k r) + B_3 W_m(\bar{\beta}_k r),\\
&2g_1{}^s(r) = \left(g_r{}^s(r) - g_\varphi{}^s(r)\right) =\\
&\qquad = 2A_1 Z_{m-1}(\bar{\beta}_k r) + 2B_1 W_{m-1}(\bar{\beta}_k r),\\
&2g_2{}^s(r) = \left(g_r{}^s(r) + g_\varphi{}^s(r)\right) =\\
&\qquad = 2A_2 Z_{m+1}(\bar{\beta}_k r) + 2B_2 W_{m+1}(\bar{\beta}_k r),
\end{aligned}
\tag{23a}
$$

где Z символизирует функции Бесселя J и I, а W — соответственно Y и K.

Как известно [12], согласно принципу калибровочной (градиентной) инвариантности, существует возможность определять векторный потенциал смещения с точностью до градиента произвольной скалярной функции. В работе [3] для удобства расчетов это реализуется приравниванием нулю функции $g_2{}^c(r)$ из (23). Окончательно это приводит к равенству

$$g_r = -g_\varphi = g_1. \tag{24}$$

Отсюда имеем

$$
\begin{aligned}
&g_r{}^c = -g_\varphi{}^c = g_1{}^c = A_1 Z_{m+1}(\bar{\beta}_k r) + B_1 W_{m+1}(\bar{\beta}_k r),\\
&g_r{}^s = -g_\varphi{}^s = g_1{}^s = A_1 Z_{m-1}(\bar{\beta}_k r) + B_1 W_{m-1}(\bar{\beta}_k r).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Окончательный вид решений определяется видом решений в жидком слое (19), (19а), где продольная составляющая обязательно должна быть равна $\sin\xi_k z$ для удовлетворения краевых условий на торцах жидкого слоя. Кроме того, исходя из первого и последнего краевых условий (11) на границе слоев, а также исходя из вида решений в жидкости для поля давления (19) и (19а), возможность сопрягать парциальные решения для всех m и k появляется лишь при совпадении тригонометрических сомножителей в обеих средах. Как легко получить, рассматривая первое и последнее краевые условия (11), выражения для напряжений (9а) и соответствующих (20), (20а) смещений, таковыми являются решения для потенциалов в упругом слое

$$
\begin{aligned}
&\Phi^c = f^c(r)\ \cos m\varphi\ \sin\xi_k z,\\
&\Psi_r{}^c = g_r{}^c(r)\ \sin m\varphi\ \cos\xi_k z,\\
&\Psi_\varphi{}^c = g_\varphi{}^c(r)\ \cos m\varphi\ \cos\xi_k z,\\
&\Psi_z{}^c = g_z{}^c(r)\ \sin m\varphi\ \sin\xi_k z,\\
&r \in [a_1, a]
\end{aligned}
\tag{26}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&\Phi^s = f^s(r)\ \sin m\varphi\ \sin\xi_k z,\\
&\Psi_r{}^s = g_r{}^s(r)\ \cos m\varphi\ \cos\xi_k z,\\
&\Psi_\varphi{}^s = g_\varphi{}^s(r)\ \sin m\varphi\ \cos\xi_k z,\\
&\Psi_z{}^s = g_z{}^s(r)\ \cos m\varphi\ \sin\xi_k z,\\
&r \in [a_1, a].
\end{aligned}
\tag{26a}
$$

соответственно для решений в жидком слое (19) и (19а). Отсюда из (7) получаем выражения для смещений:

$$
\begin{aligned}
&u_r{}^c = \left(\left(f^c\right)' + \frac{m}{r} g_3{}^c - \xi_k g_1{}^c\right)\cos m\varphi \sin\xi_k z,\\
&u_\varphi{}^c = \left(-\frac{m}{r} f^c - \xi_k g_1{}^c - \left(g_3{}^c\right)'\right)\sin m\varphi \sin\xi_k z,\\
&u_z{}^c = \left(f^c \xi_k - \left(g_1{}^c\right)' - \frac{m+1}{r} g_1{}^c\right)\cos m\varphi \cos\xi_k z
\end{aligned}
\tag{27}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&u_r{}^s = \left(\left(f^s\right)' - \frac{m}{r} g_3{}^s - \xi_k g_1{}^s\right)\sin m\varphi \sin\xi_k z,\\
&u_\varphi{}^s = \left(\frac{m}{r} f^s - \xi_k g_1{}^s - \left(g_3{}^s\right)'\right)\cos m\varphi \sin\xi_k z,\\
&u_z{}^s = \left(f^s \xi_k - \left(g_1{}^s\right)' + \frac{m-1}{r} g_1{}^s\right)\sin m\varphi \cos\xi_k z.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Здесь штрих означает дифференцирование по r.

Из (9а) и (26), (26а) найдем выражения для напряжений на торцах трубки и на боковой поверхности σ_{rr}, $\sigma_{r\varphi}$, σ_{rz}, σ_{zz} и $\sigma_{z\varphi}$:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{rr} = &\left\{\lambda\left(-k_l^2 f\right) + 2\mu\left[f'' \mp \frac{m}{r^2} g_3 - \xi_k g_1' \pm \frac{m}{r} g_3'\right]\right\}\times\\
&\times\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}\ \sin\xi_k z,
\end{aligned}
\tag{29}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{r\varphi} = \mu\Bigg\{&\frac{2m}{r}\left(\mp f' \pm \frac{f}{r}\right) + \left(\frac{1}{r}\left(1 \pm m\right) g_1 - g_1'\right)\xi -\\
&-\left(\beta^2 g_3 + 2g_3''\right)\Bigg\}\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}\sin\xi_k z,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

$$\sigma_{rz} = \mu\left\{\left(\frac{1\pm m}{r^2} - \xi_k^{\,2}\right)g_1 - \frac{1\pm m}{r}g_1' - \right.$$
$$\left. -g_1'' \pm \frac{m\xi_k}{r}g_3 + 2\xi f'\right\}\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}\cos\xi_k z, \qquad (31)$$

$$\sigma_{zz} =$$
$$= \left\{-\lambda k_l^2 f + 2\mu\left[-\xi^2 f + \frac{\xi_k}{r}(1\pm m)g_1 + \xi_k g_1'\right]\right\}\times$$
$$\times\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}\sin\xi_k z, \qquad (32)$$

$$\sigma_{z\varphi} = \mu\left\{\mp\frac{2m\xi_k f}{r} + g_1\left(\frac{m(m\pm 1)}{r^2} - \xi_k^{\,2}\right)\pm\right.$$
$$\left.\pm\frac{2mg_1'}{r} - \xi_k g_3'\right\}\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}\cos\xi_k z. \qquad (33)$$

Верхний знак или функция в (29–33) относится к решению (26), нижний — к решению (26а).

Первые три граничные условия (11) принимают вид:

$$\left\{-\lambda k_l^2 f + 2\mu\left[f'' \mp \frac{m}{r^2}g_3 - \xi_k g_1' \pm \frac{m}{r}g_3'\right]\right\}\Bigg|_{r=a_1} =$$
$$= -f_w\,\Big|_{r=a_1}, \qquad (34)$$

$$\mu\left\{\frac{2m}{r}\left(\mp f' \pm \frac{f}{r}\right) + \left(\frac{1}{r}(1\pm m)g_1 - g_1'\right)\xi_k - \right.$$
$$\left. -\left(\beta_k^{\,2}g_3 + 2g_3''\right)\right\}\Bigg|_{r=a_1} = 0, \qquad (35)$$

$$\mu\left\{\left(\frac{1\pm m}{r^2} - \xi_k^{\,2}\right)g_1 - \frac{1\pm m}{r}g_1' - g_1'' \pm \right.$$
$$\left. \pm\frac{m\xi}{r}g_3 + 2\xi_k f'\right\}\Bigg|_{r=a_1} = 0. \qquad (36)$$

Четвертое условие получаем из (27), (28), а также из уравнения Эйлера для идеальной жидкости

$$\left(f' \pm \frac{m}{r}g_3 - \xi_k g_1\right)\Bigg|_{a_1} = \left(\frac{1}{\rho_w\omega^2}f_w'\right)\Bigg|_{a_1}. \qquad (37)$$

Краевые условия (10) на внешней боковой поверхности $r = a$ имеют вид (см. (34)–(36)):

$$\left\{-\lambda k_l^2 f + 2\mu\left[f'' \mp \frac{m}{r^2}g_3 - \xi_k g_1' \pm \frac{m}{r}g_3'\right]\right\}\Bigg|_{r=a} = 0, \qquad (38)$$

$$\mu\left\{\frac{2m}{r}\left(\mp f' \pm \frac{f}{r}\right) + \left(\frac{1}{r}(1\pm m)g_1 - g_1'\right)\xi_k - \right.$$
$$\left. -\left(\beta_k^{\,2}g_3 + 2g_3''\right)\right\}\Bigg|_{r=a} = 0, \qquad (39)$$

$$\mu\left\{\left(\frac{1\pm m}{r^2} - \xi_k^{\,2}\right)g_1 - \frac{1\pm m}{r}g_1' - g_1'' \pm \right.$$
$$\left. \pm\frac{m\xi}{r}g_3 + 2\xi_k f'\right\}\Bigg|_{r=a} = 0. \qquad (40)$$

В (34)–(40) необходимо различать g_1 для случаев (c) и (s).

Обратимся к краевым условиям на торцах (12). Как видно из (32), напряжение σ_{zz} на торцах трубки равно нулю вследствие наличия множителя $\sin\xi_k z$. Исследуем возможность удовлетворения краевых условий (12) для напряжений σ_{rz} и $\sigma_{z\varphi}$. Из (31) и (33) очевидно, что краевые условия (12) могут быть удовлетворены при произвольных φ и r, а также m и k, только когда радиальное слагаемое в фигурных скобках тождественно равно нулю на интервале $r \in [a_1, a]$, что невозможно вследствие линейной независимости стоящих там комбинаций цилиндрических функций. Таким образом, напряжения σ_{rz} и $\sigma_{z\varphi}$ краевым условиям (12) не удовлетворяют. Однако следует ожидать [7, с. 303], что при условии большой величины отношения длины трубки к ее диаметру и выполнении остальных краевых условий напряжения σ_{rz} и $\sigma_{z\varphi}$ на торцах трубки будут пренебрежимо малыми.

Таким образом, для определения шести неизвестных констант A, B, A_1, B_1, A_3, B_3 из (23), (23а) и (25) при каждом $m = 0,1,2,...$ и $k = 1,2,...$ для случаев (c) и (s) имеется по семь уравнений (34)–(40). Остающееся лишнее уравнение (им будет уравнение (38), являющееся единственным краевым условием на поверхности $r = a$ в предельном случае жидкой трубки) будем использовать для определения резонансных частот, аналогично тому как это делалось в работе [1].

После подстановки в систему (34)–(37), (39), (40) выражений (23), (23а) и (25) получаются две системы для определения констант A, B, A_1, B_1, A_3, B_3 для случаев (c) и (s). Запишем их в матричном виде:

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} A^c \\ B^c \\ A_1^c \\ B_1^c \\ A_3^c \\ B_3^c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -f_w(a_1)=-Z_m(\bar{\sigma}_k a_1) \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{\rho_w\omega^2} f_w'(a_1)=\dfrac{1}{\rho_w\omega^2} Z_m'(\bar{\sigma}_k a_1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (41)$$

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix} A^s \\ B^s \\ A_1^s \\ B_1^s \\ A_3^s \\ B_3^s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -f_w(a_1)=-Z_m(\bar{\sigma}_k a_1) \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{\rho_w\omega^2} f_w'(a_1)=\dfrac{1}{\rho_w\omega^2} Z_m'(\bar{\sigma}_k a_1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Квадратные матрицы **C** и **S** состоят соответственно из элементов c_{ij} и s_{ij}, $i,j=1,2,...,6$. Все элементы уравнений (41), (42) зависят от индексов m, k и частоты ω, что подразумевает необходимость находить соответствующие решения для конкретных значений этих параметров. После громоздких, но несложных вычислений получаем для элементов c_{ij} и s_{ij}:

$$c_{11}=-\lambda k_l^2 Z_m(\bar{\alpha}_k a_1)+2\mu Z_m''(\bar{\alpha}_k a_1), \qquad s_{11}=c_{11},$$

$$c_{12}=-\lambda k_l^2 W_m(\bar{\alpha}_k a_1)+2\mu W_m''(\bar{\alpha}_k a_1), \qquad s_{12}=c_{12},$$

$$c_{13}=-2\mu\xi_k Z_{m+1}'(\bar{\beta}_k a_1), \qquad s_{13}=-2\mu\xi_k Z_{m-1}'(\bar{\beta}_k a_1),$$

$$c_{14}=-2\mu\xi_k W_{m+1}'(\bar{\beta}_k a_1), \qquad s_{14}=-2\mu\xi_k W_{m-1}'(\bar{\beta}_k a_1),$$

$$c_{15}=\frac{2m\mu}{a_1}\left(Z_m'(\bar{\beta}_k a_1)-\frac{Z_m(\bar{\beta}_k a_1)}{a_1}\right), \qquad s_{15}=-c_{15},$$

$$c_{16}=\frac{2m\mu}{a_1}\left(W_m'(\bar{\beta}_k a_1)-\frac{W_m(\bar{\beta}_k a_1)}{a_1}\right), \qquad s_{16}=-c_{16},$$

$$c_{21}=\frac{2m\mu}{a_1^2}\left(Z_m(\bar{\alpha}_k a_1)-a_1 Z_m'(\bar{\alpha}_k a_1)\right), \qquad s_{21}=-c_{21},$$

$$c_{22}=\frac{2m\mu}{a_1^2}\left(W_m(\bar{\alpha}_k a_1)-a_1 W_m'(\bar{\alpha}_k a_1)\right), \qquad s_{22}=-c_{22},$$

$$c_{23}=\frac{\mu\xi_k\left((1+m)Z_{m+1}(\bar{\beta}_k a_1)-a_1 Z_{m+1}'(\bar{\beta}_k a_1)\right)}{a_1}, \qquad s_{23}=\frac{\mu\xi_k\left((1-m)Z_{m-1}(\bar{\beta}_k a_1)-a_1 Z_{m-1}'(\bar{\beta}_k a_1)\right)}{a_1},$$

$$c_{24}=\frac{\mu\xi_k\left((1+m)W_{m+1}(\bar{\beta}_k a_1)-a_1 W_{m+1}'(\bar{\beta}_k a_1)\right)}{a_1}, \qquad s_{24}=\frac{\mu\xi_k\left((1-m)W_{m-1}(\bar{\beta}_k a_1)-a_1 W_{m-1}'(\bar{\beta}_k a_1)\right)}{a_1},$$

$$c_{25}=-\frac{\mu}{a_1^2}\left(m^2 Z_m(\bar{\beta}_k a_1)+a_1\left(a_1 Z_m''(\bar{\beta}_k a_1)-Z_m'(\bar{\beta}_k a_1)\right)\right), \qquad s_{25}=c_{25},$$

$$c_{26}=-\frac{\mu}{a_1^2}\left(m^2 W_m(\bar{\beta}_k a_1)+a_1\left(a_1 W_m''(\bar{\beta}_k a_1)-W_m'(\bar{\beta}_k a_1)\right)\right), \qquad s_{26}=c_{26},$$

$$c_{31} = 2\mu\xi_k Z_m'(\bar{\alpha}_k a_1), \qquad s_{31} = c_{31},$$

$$c_{32} = 2\mu\xi_k W_m'(\bar{\alpha}_k a_1), \qquad s_{32} = c_{32},$$

$$c_{33} = \mu\left(\left(\frac{1+m}{a_1^2} - \xi_k^2\right) Z_{m+1}(\bar{\beta}_k a_1) - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{a_1}(1+m) Z_{m+1}'(\bar{\beta}_k a_1) - Z_{m+1}''(\bar{\beta}_k a_1)\right),$$

$$s_{33} = \mu\left(\left(\frac{1-m}{a_1^2} - \xi_k^2\right) Z_{m-1}(\bar{\beta}_k a_1) - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{a_1}(1-m) Z_{m-1}'(\bar{\beta}_k a_1) - Z_{m-1}''(\bar{\beta}_k a_1)\right),$$

$$c_{34} = \mu\left(\left(\frac{1+m}{a_1^2} - \xi_k^2\right) W_{m+1}(\bar{\beta}_k a_1) - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{a_1}(1+m) W_{m+1}'(\bar{\beta}_k a_1) - W_{m+1}''(\bar{\beta}_k a_1)\right),$$

$$s_{34} = \mu\left(\left(\frac{1-m}{a_1^2} - \xi_k^2\right) W_{m-1}(\bar{\beta}_k a_1) - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{a_1}(1-m) W_{m-1}'(\bar{\beta}_k a_1) - W_{m-1}''(\bar{\beta}_k a_1)\right),$$

$$c_{35} = \frac{\mu m \xi_k}{a_1} Z_m(\bar{\beta}_k a_1), \qquad s_{35} = -c_{35},$$

$$c_{36} = \frac{\mu m \xi_k}{a_1} W_m(\bar{\beta}_k a_1), \qquad s_{36} = -c_{36},$$

$$c_{41} = Z_m'(\bar{\alpha}_k a_1), \qquad s_{41} = c_{41},$$

$$c_{42} = W_m'(\bar{\alpha}_k a_1), \qquad s_{42} = c_{42},$$

$$c_{43} = -\xi_k Z_{m+1}(\bar{\beta}_k a_1), \qquad s_{43} = -\xi_k Z_{m-1}(\bar{\beta}_k a_1),$$

$$c_{44} = -\xi_k W_{m+1}(\bar{\beta}_k a_1), \qquad s_{44} = -\xi_k W_{m-1}(\bar{\beta}_k a_1),$$

$$c_{45} = \frac{m Z_m(\bar{\beta}_k a_1)}{a_1}, \qquad s_{45} = -c_{45},$$

$$c_{46} = \frac{m W_m(\bar{\beta}_k a_1)}{a_1}, \qquad s_{46} = -c_{46}.$$

Коэффициенты c_{5j} и s_{5j}, $j = \overline{1,6}$ равны соответственно коэффициентам c_{2j} и s_{2j}, в которых, однако, фигурирует a в место a_1. То же справедливо соответственно для коэффициентов c_{6j}, s_{6j} и c_{3j}, s_{3j}.

Вернемся к алгоритму вычисления резонансных частот. В оставшемся седьмом краевом условии (38) константы A, B, A_1, B_1, A_3, B_3, являющиеся в частности и функциями частоты, определены из системы (41) или (42). Однако условие (38) будет выполняться только на дискретном множестве частот ω_n, $n = 1, 2, ...$, [1]. Для их определения необходимо, варьируя частоту ω, добиваться выполнения условия (38).

Отметим в заключение, что в силу различия матриц $\mathbf{C} = \{c_{ij}\}$ и $\mathbf{S} = \{s_{ij}\}$ в (41), (42) должны различаться и решения этих уравнений, а следовательно, и резонансные частоты для случаев (c) и (s).

ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе получен алгоритм определения собственных частот ограниченных упругих цилиндров, заполненных жидкостью. Приведены все необходимые выражения для определения резонансных частот рассмотренного объема. Открытым остался лишь вопрос о правомочности пренебрежения невыполнением краевых условий (12) для напряжений σ_{rz} и $\sigma_{z\varphi}$. Этому вопросу, изучению свойств детерминантов матриц $\mathbf{C}$ и $\mathbf{S}$, а

также практическим расчетам резонансных частот на конкретных примерах будет посвящена следующая статья автора.

Для автоматизации простых, но громоздких вычислений в работе использовался пакет "Mathematica-7", лицензия L3259-7547.

Автор выражает благодарность Н.Н. Князькову за постановку проблемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарфарец Б.П.* О собственных колебаниях жидкости в ограниченном цилиндре // Научное приборостроение. 2009. Т. 19, № 3. С. 21–27.
2. *Mirsky B., Herrmann G.* Axially Symmetric Motions of Thick Cylindrical Shells // J. Appl. Mech. 1958. V. 25, N 1. P. 97–102.
3. *Gazis D.* Tree-Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinders. Part 1, 2 // J. Acoust. Soc. Am. 1959. V. 31, N 5. P. 568–578.
4. *Greenspon J.* Axially Symmetric Vibrations of a Thick Cylindrical Shell in an Acoustical Medium // J. Acoust. Soc. Am. 1960. V. 32, N 8. P. 1017–1025.
5. *Айзенберг М.В., Слепян Л.И.* Резонансные волны в полом цилиндре, погруженном в сжимаемую жидкость // Переходные процессы деформации оболочек и пластин. Материалы Всесоюзного симпозиума по переходным процессам деформации оболочек и пластин, Тарту, 1967. Таллин: Изд-во АН ЭССР, 1967. С. 13–22.
6. *Айзенберг М.В.* О резонансных волнах в полом цилиндре // Изв. АН СССР, МТТ. 1969. № 1. С. 84–90.
7. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М., Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
8. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Волны в сплошных средах. М.: Физматлит. 2004. 472 с.
9. *Слепян Л.И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.
10. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука. 1973. 496 с.
11. *Микер Т., Мейтцлер И.* Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинах // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. Т. 1. Часть А. Методы и приборы ультразвуковых исследований. М.: Мир, 1966. С. 140–203.
12. *Морс Ф.М. Фешбах Г.* Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1958, 1960. Т. 1, 2.

Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург

Контакты: *Шарфарец Борис Пинкусович,* sharb@mail.ru

Материал поступил в редакцию 8.09.2009.

EIGENFUNCTIONS OF THE FLUID CHARGED ELASTIC CYLINDRICAL CAPILLARY OF FINAL LENGTH. I. THE THEORY

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation RAS, Saint-Petersburg

The problem of natural elastic-ultrasonic oscillations of the nonuniform cylinder consisting of an elastic tube of final length filled in with fluid is theoretically discussed in the work. The problem is set in the most general way. The solution is searched in classical style by a method of separation of variables. It was shown, that the satisfaction of boundary conditions at ends of a tube is impossible within the frames of this method. The algorithm for definition of natural frequencies of a vibrating system is suggested. The results of the work can be used in cases of ultrasound application for the problems of particle coagulation.

Keywords: resonance, eigenfrequency of vibration, eigenfunctions, eigenvalues