ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

УДК 534.131.2

© Б. П. Шарфарец

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ В ОГРАНИЧЕННОМ ЦИЛИНДРЕ

В работе рассматривается задача о собственных акустических колебаниях неоднородного цилиндра, состоящего из стеклянной трубки, заполненной жидкостью. В работе предложено несколько алгоритмов решения этой задачи и по одному из них проведены расчеты в ряде частных случаев. Результаты работы могут быть использованы в случаях применения ультразвука применительно к задачам коагуляции частиц.

Кл. сл.: резонанс, собственные частоты колебания, собственные функции, собственные значения, задача Штурма—Лиувилля

ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных приложений ультразвука является его использование в целях коагуляции различных частиц под воздействием радиационного давления. В качестве камеры часто используются цилиндрические трубки (например, стеклянные) фиксированной длины, внутри которых находится жидкость. Торцы трубки не заглушены, а жидкость удерживается в ней под воздействием сил натяжения. Под воздействием внешнего ультразвукового облучения на частотах, совпадающих с частотами собственных колебаний совокупного объема трубки, в последней образуются стоячие волны, в узлах или пучностях которых и возникает коагуляция частиц. Настоящая работа посвящена расчету частот собственных колебаний цилиндрической стеклянной трубки, заполненной жидкостью. При этом для упрощения задачи используется простейшая физическая модель идеальной жидкости внутри трубки, а также пренебрегается наличие сдвиговых волн в ее стенках.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Пусть дан круговой кольцевой цилиндр высотой l, внутренним радиусом a_1 и внешним радиусом a, состоящий из некоторого материала плотностью ρ_2 и скоростью продольных волн c_2. При этом полагаем, что сдвиговыми волнами в кольце можно пренебречь. Внутри кольцевого цилиндра находится основная жидкость с постоянной плотностью ρ_1 и скоростью звука c_1. На границах цилиндра справедливы однородные условия Дирихле. Необходимо оценить собственные колебания описанного объема.

Найдем характеристики собственных колебаний описанного цилиндра. Решать задачу будем согласно схеме, описанной в работе [1, с. 444]. Согласно этой работе, задача о колебании ограниченных объемов сводится к решению уравнения

$$L_{\mathbf{x}}[u(\mathbf{x},t)] = \frac{\partial^2 u(\mathbf{x},t)}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Здесь $u(\mathbf{x},t)$ — некоторая функция, характеризующая колебательный процесс; $L_{\mathbf{x}}[]$ — пространственный дифференциальный оператор

Поставим задачу математически. Пусть $p(r,\varphi,z,t)$ — акустическое давление в указанном цилиндре; $\mathbf{x} = (r,\varphi,z)$ — координаты в полярной системе координат. Тогда для свободных колебаний (в случае отсутствия внешних источников) величина p удовлетворяет однородному волновому уравнению, следующему из (1):

$$c^2(r)\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (2)$$

На границах цилиндра справедливы однородные условия Дирихле

$$\begin{aligned} p(r=a,\varphi,z,t) &= p(r,\varphi,z=0,t) = \\ &= p(r,\varphi,z=l,t) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

а на границе между внутренним цилиндром и внешним кольцом справедливы стандартные условия сопряжения двух жидкостей: равенство давлений и нормальных компонент колебательной скорости. Здесь распределение скорости звука $c(r)$ определяется так

$$c(r) = \begin{cases} c_1, & r \in [0, a_1], \\ c_2, & r \in [a_1, a]. \end{cases} \quad (4)$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

По общей схеме [1] решение задачи (2), (3) ищется в виде стоячей волны

$$p(\mathbf{x},t) = P(\mathbf{x})T(t)\,. \tag{5}$$

После подстановки (5) в (2) и разделения переменных получаем два уравнения

$$\Delta P + \frac{\lambda}{c^2(r)}P = 0\,, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}T + \lambda T = 0\,. \tag{7}$$

Согласно [1], константа разделения $\lambda > 0$ имеет смысл собственного значения задачи Штурма—Лиувилля (6). Уравнение гармонического осциллятора (7) имеет решение вида

$$T(t) = Ce^{\pm i\sqrt{\lambda}t}\,. \tag{8}$$

Здесь C — константа. Таким образом, собственные колебания представляют собой стоячие волны (5) колеблющиеся с частотами

$$\omega = \sqrt{\lambda}\,. \tag{9}$$

Далее будем решать задачу Штурма—Лиувилля (6). Приведем свойства собственных функций и собственных значений применительно к этой многомерной задаче [1, с. 446].

1. Существует счетное множество собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ...$, которым соответствуют собственные функции $P_1(\mathbf{x})$, $P_2(\mathbf{x})$,…, $P_n(\mathbf{x})$,... Собственные значения λ_n с возрастанием номера n неограниченно возрастают: $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

2. Все собственные значения положительны

$$\lambda_n > 0\,.$$

3. Собственные функции $\{P_n\}$ ортогональны между собой с весом

$$\mu(\mathbf{x}) = \frac{1}{c^2(\mathbf{x})}, \tag{10}$$

что означает

$$\int\limits_V \mu(\mathbf{x})P_n(\mathbf{x})P_m(\mathbf{x})\mathrm{d}V = 0\,,\quad m \neq n\,.$$

4. Каждому собственному числу соответствует ограниченное число собственных функций.

5. *Теорема разложимости.* Произвольная функция $F(\mathbf{x})$, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая однородным условиям Дирихле на границах, разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям $\{P_n\}$:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n P_n(\mathbf{x})\,, \tag{11}$$

где F_n — коэффициенты разложения.

Задачу (6) переписываем в виде

$$\begin{gathered}\Delta P + \frac{\lambda}{c^2(r)}P = 0,\\ r \in [0,a], \quad \varphi \in [0,2\pi], \qquad z \in [0,l];\end{gathered} \tag{12}$$

$$P\big|_{r=a_1-} = P\big|_{r=a_1+}\,; \qquad \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial P}{\partial r}\bigg|_{r=a_1-} = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial P}{\partial r}\bigg|_{r=a_1+}\,; \tag{13}$$

$$\begin{gathered}P(r=0,\varphi,z) < \infty, \qquad P(r=a,\varphi,z) =\\ = P(r,\varphi,z=0) = P(r,\varphi,z=l) = 0.\end{gathered} \tag{14}$$

Здесь лапласиан в цилиндрической системе координат равен

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

Будем решать задачу (12)–(14) вновь методом разделения переменных:

$$P(r,\varphi,z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)\,. \tag{15}$$

Вначале рассмотрим две задачи Штурма—Лиувилля:

$$\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2} = -\alpha\,\Phi(\varphi)\,,\quad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)\,; \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\beta Z, \qquad Z(0) = Z(l) = 0\,. \tag{17}$$

Собственные значения и функции этих задач равны соответственно

$$\alpha_m = m^2\,,\ \Phi_m(\varphi) = e^{\pm im\varphi}\,,\ \ m = 0, \pm1, \pm2, ...\,; \tag{18}$$

$$\beta_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,\ Z_k(z) = \sin\frac{k\pi}{l}z\,,\ k = 1,2,... \tag{19}$$

и они ортогональны на соответствующих интервалах определения. Зафиксируем некоторые значения m и k из (18) и (19) и запишем для них (15) в форме

$$P_{mk}(r,\varphi,z) = R_{mk}(r)\Phi_m(\varphi)Z_k(z)\,. \tag{20}$$

Тогда для $R_{mk}(r)$ из (12) в цилиндрической системе координат получаем уравнение

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}R_{mk}(r)+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R_{mk}(r)- -\left(\frac{m^2}{r^2}+\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right)R_{mk}(r)+\frac{\lambda}{c^2(r)}R_{mk}(r)=0 \qquad (21)$$

с граничными условиями

$$R_{mk}(0)<\infty,\ R_{mk}(a)=0. \qquad (22)$$

Приведем задачу о собственных значениях и функциях к самосопряженному виду, т. е. к задаче Штурма—Лиувилля, имеющей канонический вид [2, с. 907]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(p(r)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)-q(r)u(r)+\lambda\rho(r)u(r)=0, \qquad (23)$$

с краевыми условиями общего вида

$$u'(l_1)-hu(l_1)=0, \qquad u'(l_2)+Hu(l_2)=0. \qquad (23а)$$

Здесь l_1 и l_2 — левая и правая границы области определения функции $u(r)$; h и H — действительные числа; $p(r)$ и $\rho(r)$ положительны; $q(r)$ действительна, а λ — комплексный параметр. Приведем некоторые свойства одномерной задачи Штурма—Лиувилля [2].

1. Собственные значения граничной задачи (23), (23а) действительны.

2. Каждому собственному значению соответствует единственная собственная функция.

3. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям λ_n и λ_m ортогональны с весом $\rho(r)$ на интервале $[l_1,l_2]$

$$\int_{l_1}^{l_2}u_n(r)u_m(r)\rho(r)\mathrm{d}r=0,\quad n\neq m.$$

4. Существует неограниченно возрастающая последовательность собственных значений $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots$ задачи (23), (23а).

5. Справедлива формула разложения по собственным функциям $f(r)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nu_n(r)$, где ряд сходится в метрике пространства $\mathrm{L}_2[l_1,l_2]$, а a_n равны $a_n=\int_{l_1}^{l_2}f(r)u_m(r)\rho(r)\mathrm{d}r.$

Из этих свойств следует, что в одномерном случае при выполнении краевых условий (23а) в отличие от многомерного случая существует взаимно однозначное соответствие между собственными значениями и функциями.

Уравнение (21) легко приводится к виду (23), а именно

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R_{mk}(r)}{\mathrm{d}r}\right)-r\left(\frac{m^2}{r^2}+\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right)R_{mk}(r)+ +\lambda\frac{r}{c^2(r)}R_{mk}(r)=0, \qquad (24)$$

откуда очевидно, что справедливы равенства

$$p(r)=r,\quad q(r)=r\left(\frac{m^2}{r^2}+\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right), \quad \rho(r)=\frac{r}{c^2(r)}, \qquad (25)$$

что позволяет сделать вывод из общей теории задач Штурма—Лиувилля об ортогональности собственных функций задачи (24), (22) на интервале $[0,a]$ с весом $\rho(r)=\dfrac{r}{c^2(r)}$, а именно

$$\int_0^a R^{n_1}{}_{mk}(r)R^{n_2}{}_{mk}(r)\frac{r}{c^2(r)}\mathrm{d}r=0,\quad n_1\neq n_2, \qquad (26)$$

где $R^n{}_{mk}(r)$ — собственная функция задачи (24), (22), соответствующая собственному значению λ^n_{mk}, а $c(r)$ — произвольное распределение скорости звука на интервале $r\in[0,a]$. Впрочем, весовая функция в (25) не противоречит весу (10), т. к. множитель r появился вследствие перехода в цилиндрическую систему координат.

Приступим к решению проблемы на собственные значения и функции исходной задачи (21), (22). Для этого перепишем уравнение (21) в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}R_{mk}(r)+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R_{mk}(r)-\frac{m^2}{r^2}R_{mk}(r)+ +\left(\frac{\lambda}{c^2(r)}-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right)R_{mk}(r)=0. \qquad (27)$$

При кусочно-постоянном распределении $c(r)$ вида (4) уравнение (27) распадается на два уравнения Бесселя

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}R_{1mk}(r)+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R_{1mk}(r)-\frac{m^2}{r^2}R_{1mk}(r)+ +\left(\frac{\lambda}{c_1{}^2(r)}-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right)R_{1mk}(r)=0,\quad r\in[0,a_1];$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}R_{2mk}(r)+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R_{2mk}(r)-\frac{m^2}{r^2}R_{2mk}(r)+ +\left(\frac{\lambda}{c_2{}^2(r)}-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right)R_{2mk}(r)=0,\quad r\in[a_1,a].$$

Решения этих уравнений с учетом граничных условий (22) равны

$$R_{1mk}(r) = J_m(\sqrt{\sigma_1}r), \quad \sigma_1 = \frac{\lambda}{c_1^2(r)} - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad r \in [0, a_1]; \tag{28}$$

$$R_{2mk}(r) = C_1 J_m(\sqrt{\sigma_2}r) + C_2 N_m(\sqrt{\sigma_2}r), \quad \sigma_2 = \frac{\lambda}{c_2^2(r)} - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad r \in [a_1, a]. \tag{29}$$

Постоянные C_i, $i = 1,2$ находятся из условий сопряжения на границе $r = a_1$

$$R_{1mk}(a_1) = R_{2mk}(a_1), \quad \left.\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial R_{1mk}}{\partial r}\right|_{r=a_1} = \left.\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial R_{2mk}}{\partial r}\right|_{r=a_1} \tag{30}$$

и равны

$$C_1 = \frac{1}{\rho_1 T}\Big[\rho_1 J_m(\sqrt{\sigma_1}a_1)\big(N_m(\sqrt{\sigma_2}a_1)\big)' - \rho_2\big(J_m(\sqrt{\sigma_1}a_1)\big)' N_m(\sqrt{\sigma_2}a_1)\Big],$$
$$C_2 = \frac{1}{\rho_1 T}\Big[\rho_2\big(J_m(\sqrt{\sigma_1}a_1)\big)' J_m(\sqrt{\sigma_2}a_1) - \rho_1\big(J_m(\sqrt{\sigma_2}a_1)\big)' J_m(\sqrt{\sigma_1}a_1)\Big], \tag{31}$$
$$T = J_m(\sqrt{\sigma_2}a_1)\big(N_m(\sqrt{\sigma_2}a_1)\big)' - N_m(\sqrt{\sigma_2}a_1)\big(J_m(\sqrt{\sigma_2}a_1)\big)'.$$

Наконец, осталось отыскать собственные значения задачи (27), (22). Существует несколько подходов при вычислении собственных значений. Укажем некоторые из них.

1. Методом расчета вронскиана. Для этого строятся два решения. Решение, удовлетворяющее левому краевому условию (22), — это решение в точности совпадает с решением (28), (29)

$$R_{mk}(r) = R_{1mk}(r) = J_m(\sqrt{\sigma_1}r), \quad r \in [0, a_1];$$
$$R_{mk}(r) = R_{2mk}(r) = C_1 J_m(\sqrt{\sigma_2}r) + C_2 N_m(\sqrt{\sigma_2}r), \quad r \in [a_1, a], \tag{32}$$

где C_i, $i = 1,2$ определяются из (31).

Второе решение выберем в виде

$$\widehat{R}_{mk}(r) = \widehat{C}_1 J_m(\sqrt{\sigma_2}r) + N_m(\sqrt{\sigma_2}r), \quad r \in [a_1, a], \tag{33}$$

а постоянную $\widehat{C}_1$ такой, чтобы оно удовлетворяло правому граничному условию (22):

$$\widehat{R}_{mk}(a) = \widehat{C}_1 J_m(\sqrt{\sigma_2}a) + N_m(\sqrt{\sigma_2}a) = 0 \Rightarrow \widehat{C}_1 = -\frac{N_m(\sqrt{\sigma_2}a)}{J_m(\sqrt{\sigma_2}a)}.$$

В случае, когда при некоторых λ значение $J_m(\sqrt{\sigma_2}a) = 0$, решение (33) нужно принять таким

$$\widehat{R}_{mk}(r) = J_m(\sqrt{\sigma_2}r), \quad r \in [a_1, a]. \tag{33а}$$

Далее собственные значения $\lambda_{mk}^{(n)}$ задачи (27), (22) будут суть совпадать с нулями вронскиана $W(\lambda)$ решений (32), (33) в какой либо точке r интервала $r \in [a_1, a]$

$$W(\lambda^{(n)}{}_{mk}) = 0,$$
$$W(\lambda) = R_{2mk}(r)\widehat{R}'_{mk}(r) - R'_{2mk}(r)\widehat{R}_{mk}(r).$$

Это означает, что решения $R_{2mk}(r)$ и $\widehat{R}_{mk}(r)$ — линейно зависимы и удовлетворяют обоим краевым условиям (21), а это и есть признак собственной функции.

Выбор области определения функции (33) $r \in [a_1, a]$ достаточен, т. к. функциям $R_{mk}(r)$ из (32) и $\widehat{R}_{mk}(r)$ из (33) при расчете вронскиана достаточно иметь одну общую точку определения.

Тем самым необходимо вычислять нули вронскиана в требуемом диапазоне изменений λ.

2. Второй метод определения собственных значений λ задачи (22), (23) состоит в применении вариационного исчисления. Известно (см., например, [3, с. 275]), что нахождение собственных значений задачи Штурма—Лиувилля (23), (24) эквивалентно нахождению минимумов функционала (в обозначениях уравнения (23))

$$K[u(r)] = \frac{\int_0^a (pu'^2 + qu^2)\mathrm{d}r}{\int_0^a \rho u^2 \mathrm{d}r},$$

или в обозначениях (24) и (25)

$$K[R_{mk}(r)] =$$

$$=\frac{\int_0^a \left(r\left(\frac{\mathrm{d}R_{mk}(r)}{\mathrm{d}r}\right)^2 + r\left(\frac{m^2}{r^2}+\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right)R_{mk}{}^2(r)\right)\mathrm{d}r}{\int_0^a \frac{r}{c^2(r)}R_{mk}{}^2(r)\mathrm{d}r}. \quad (34)$$

Таким образом, алгоритм нахождения собственных значений состоит в вычислении функции $R_{mk}(r)$ и последующего нахождения экстремумов по λ

$$\min_{\lambda} K[R_{mk}(r)].$$

3. Третий метод состоит в том, чтобы отыскать нули решения (32) (зависящего от λ и удовлетворяющего левому краевому условию (22))

$$R_{mk}(\lambda a)=0$$

при некоторых $\lambda=\lambda_{mk}^{(n)}$, $n=1,2,...$ Таким образом, решение (32) при $\lambda=\lambda_{mk}^{(n)}$ удовлетворяет обоим краевым условиям (22) и тем самым является собственной функцией задачи (21) ((24)), (22), а $\lambda=\lambda_{mk}^{(n)}$ — соответствующим собственным значением.

РАЗБОР ПРИМЕРОВ

В качестве примера ниже рассмотрена стеклянная трубка, заполненная водой. Внутренний радиус трубки $a_1=2\cdot10^{-4}$ м, внешний радиус $a=4\cdot10^{-4}$ м, длина трубки $l=3.2\cdot10^{-2}$ м. Плотность воды $\rho_1=1$, плотность стекла $\rho_2=2.5$. Скорость в воде $c_1=1500$ м/с, продольная скорость в стекле $c_2=5500$ м/с. С помощью третьего метода были рассчитаны собственные значения $\lambda=\lambda_{mk}^{(n)}$, $n=1,2$, $m=0,1,2$, $k=5,10$ задачи (27), (22). По этим собственным значениям из выражения (9) далее рассчитаны собственные частоты, которые представлены в табл. 1. В табл. 2 представлены собственные частоты в полностью жидком водяном цилиндре, совпадающем по размерам с рассмотренным неоднородным цилиндром.

На рис. 1–3 в качестве примера представлены распределения радиальных стоячих волн, соответствующих $m=0$ (рис. 1), $m=1$ (рис. 2) и $m=2$ (рис. 3) для первых двух собственных значений при $k=10$. На рис. 4 представлено распределение продольной стоячей волны при $k=10$, которое остается неизменным для разных резонансных частот, соответствующих разным $\lambda_{m,k=10}^{n}$.

Очевидно, что с помощью решения прямой задачи, т. е. при заданной геометрии объема и его физических свойств можно подобрать резонансную частоту таким образом, чтобы добиться нужного распределения стоячих волн, в том числе и внутри столба жидкости в интересах решения задач ультразвуковой коагуляции. Вместе с тем целесообразна постановка и обратной задачи: с помощью подбора геометрии и физических свойств объема обеспечить нужное распределение стоячих волн либо резонансных частот, которые обычно являются фиксированными, что связано с особенностями излучателей.

Табл. 1. Собственные частоты цилиндрической стеклянной трубки, заполненной водой

Порядок m функций Бесселя	Число узлов k по длине трубки	Собственная частота, МГц	
		Номер собственного значения n	
		1	2
0	5	1.19328	4.70019
	10	1.21361	4.70583
1	5	2.6639	6.44506
	10	2.67372	6.44929
2	5	4.11373	8.09614
	10	4.12017	8.09949

Табл. 2. Собственные частоты полностью жидкого цилиндра (тех же размеров, что в табл. 1)

Порядок m функций Бесселя	Число узлов k по длине трубки	Собственная частота, МГц	
		Номер собственного значения n	
		1	2
0	5	1.44005	3.29664
	10	1.45428	3.30288
1	5	2.28988	4.18876
	10	2.29886	4.19367
2	5	3.06744	5.02504
	10	3.07405	5.02914

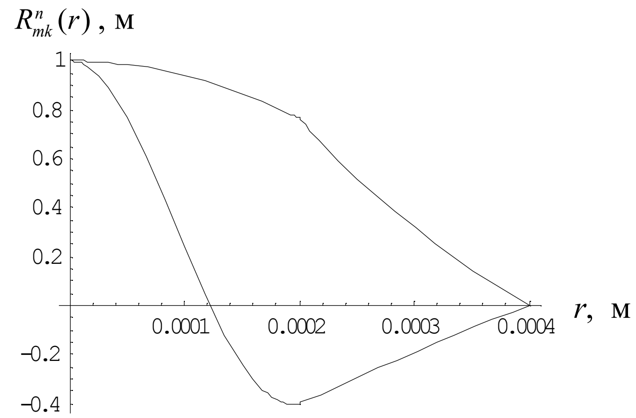

Рис. 1. Собственные функции $R^1_{m=0\ k=10}(r)$ и $R^2_{m=0\ k=10}(r)$

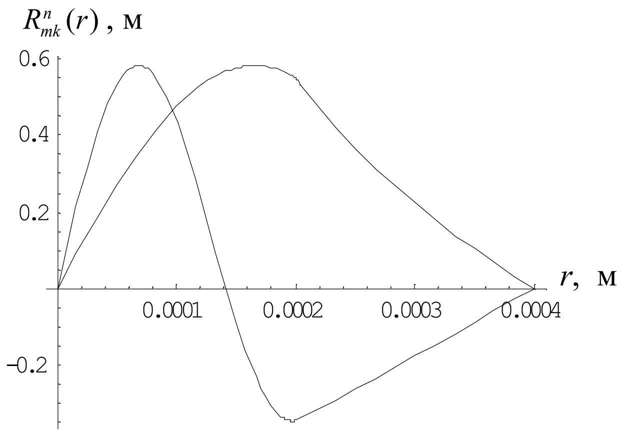

Рис. 2. Собственные функции $R^1_{m=1\ k=10}(r)$ и $R^2_{m=1\ k=10}(r)$

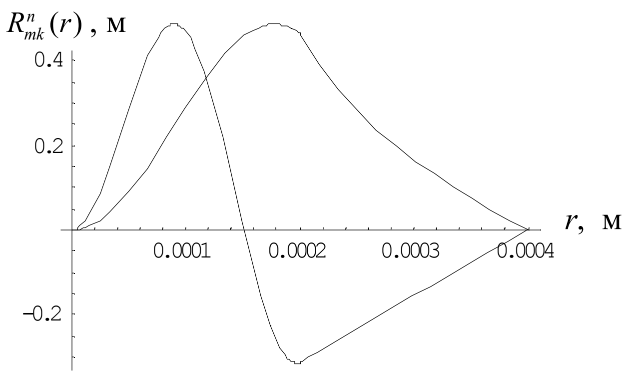

Рис. 3. Собственные функции $R^1_{m=2\ k=10}(r)$ и $R^2_{m=2\ k=10}(r)$

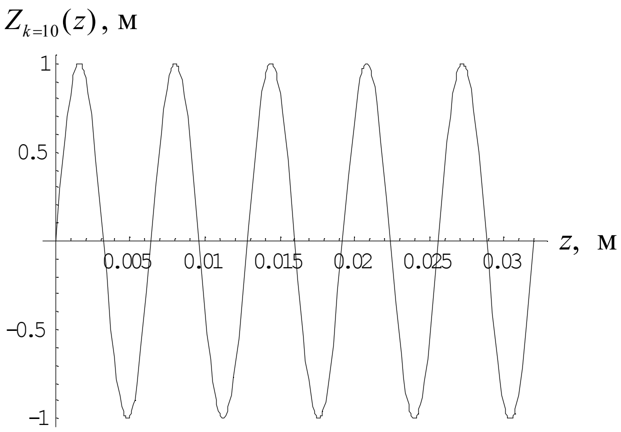

Рис. 4. Продольная собственная функция $Z_{k=10}(z)$. От частоты зависимость отсутствует

ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе получены алгоритмы определения собственных частот цилиндрических неоднородных цилиндров. С помощью одного из алгоритмов проведены численные расчеты для конкретной геометрии и физической модели трубки, заполненной жидкостью.

Расчеты проводились с помощью пакета "Mathematica-7", лицензия L3259-7547.

Автор выражает благодарность Н.Н. Князькову за постановку проблемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004. 798 с.
2. Математическая энциклопедия. Т. 5. М.: Советская энциклопедия, 1985. 1247 с.
3. *Мэтьюз Д., Уокер Р.* Математические методы физики. М.: Атомиздат, 1972. 400 с.

Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург

Материал поступил в редакцию 17.04.2009.

EIGEN FLUID VIBRATIONS IN THE LIMITED CYLINDER

B. P. Sharfanets

Institute for Analytical Instrumentation RAS, Saint-Petersburg

Eigen acoustic vibrations of the nonuniform cylinder, consisting of a glass tube, filled with a fluid are discussed in this article. Several algorithms for the solution of the problem are suggested, and one of the is calculated in some particular cases. The obtained results may be used in ultrasound use for solution of problems of particle coagulation.

Keywords: resonance, eigen frequency of vibration, eigen functions, eigen values, Sturm—Liouville problem