ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2009, том 19, № 2, с. 76–79

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

УДК 534.29; 534.138

© В. И. Ежов, В. Н. Трифанов, М. М. Нестеров

НАСЕЛЕННОСТЬ СПИНОВЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ

В работе рассматривается проблема определения населенности уровней и групп уровней в квантовых ячейках. Эта проблема является ключевой для создания квантовых вычислительных ячеек и определения их физико-информационных свойств. Предложенный в работе метод позволяет определить населенность уровней и групп уровней независимо от формы квантовой ячейки в условиях сильно шумящей среды.

Кл. сл.: населенность уровней, квантовые ячейки, инварианты, статистика

ВВЕДЕНИЕ

Одним из перспективных направлений при разработке квантового компьютера является создание ячеистой структуры, заполненной атомами, находящимися в определенных квантовых состояниях. Предложены различные варианты конкретной реализации подобной пространственной структуры. Ячейки, например, могут быть образованы с помощью электрического или магнитного полей либо кучностями стоячих лазерных волн, однако общей проблемой для всех этих систем является считывание информации о квантовых состояниях, находящихся в ячейках атомов или молекул.

В данной работе изложен метод математической обработки сигналов, используемых для считываний информации о квантовых уровнях [1].

ИНВАРИАНТЫ

Традиционно при обработке экспериментов обращают внимание только на среднее значение и дисперсии данных [2]. Этого недостаточно. Требуется информация о моментах более высокого порядка. Но эти моменты нестабильны. Их значение сильно зависит от числа наблюдений. Можно ли убрать эту зависимость? Оказывается можно. Для этого надо выйти на инварианты, которые не зависят от числа наблюдений (степеней свободы). Таких инвариантов счетное множество. Но в каждом конкретном случае всегда останавливаются на их минимальном уровне по принципу необходимой достаточности.

Чтобы раскрыть сущность инвариантов, рассмотрим два примера.

Среднее значение совокупности (n) независимых наблюдений (X) определяется формулой

$$X_n = \langle X_n \rangle = \left\langle \sum X \right\rangle = n \langle X \rangle .$$

Их дисперсия выражается так:

$$D_n = nD,$$

где D — дисперсия одной наблюдаемой (X).

Отношение дисперсии совокупности к среднему значение этой совокупности будет равно

$$G = D_n / X_n = nD / (nX) = D / X .$$

Как видим, это отношение не зависит от числа независимых событий совокупности.

Этот инвариант называется диссипативным, т. к. он через дисперсию измеряет меру расстояния наблюдаемых событий.

Рассмотрим третий центральный момент независимой совокупности событий:

$$X_n^3 = \left\langle \sum X^3 \right\rangle = n \left\langle X^3 \right\rangle = nX^3 ,\ \ \langle X \rangle = 0 .$$

Беря отношение этого момента к дисперсии, получаем первый инвариант:

$$J_1 = X_n^3 / D_n = nX^3 / (nD) = X^3 / D .$$

Это отношение не зависит от числа независимых событий в совокупности.

Такую процедуру можно продолжить рекурсивно. Оказывается, функции от инвариантов, которые являются также инвариантами, являются коэффициентами при разложении центральных моментов по степеням дисперсии.

Не будем проводить эту достаточно сложную процедуру. Просто выпишем инварианты до моментов седьмого порядка:

$$X_n = \sum X ,\ \ \bar{X}_n \overset{\bar{X}}{=} n ,$$

$$D_n = nD ,\ D = \left\langle \left(X - \bar{X} \right)^2 \right\rangle ,\ D_n = X_n^2 ,$$

где X_n^2 — центральный момент.

Далее все моменты — центральные:

$$X_n^3 = J_1 D_n,$$
$$X_n^4 = J_2 D_n + 3D_n^2,$$
$$X_n^5 = J_3 D_n + 10 J_1 D_n^2,$$
$$X_n^6 = J_4 D_n + \left(15 J_2 + 10 J_1^2\right) D_n^2 + 15 D_n^3,$$
$$X_n^7 = J_5 D_n + \left(21 J_3 + 35 J_1 J_2\right) D_n^2 + 105 J_1 D_n^3.$$

В силу инвариантности эти зависимости справедливы для моментов единичного (неделимого) события.

$\bar{X}_n = \langle X_n \rangle$ — начальный момент,

$\bar{X}_n^{\bar{X}} = n$ — начальные моменты,

$D_n = nD$ — центральные моменты,

$G_n = D_n / \bar{X}_n = D / \bar{X}$ — диссипативный инвариант.

Все остальные моменты — центральные:

$$X^3 = J_1 D,$$
$$X^4 = J_2 D + 3D^2,$$
$$X^5 = J_3 D + 10 J_1 D^2,$$
$$X^6 = J_4 D + \left(15 J_2 + 10 J_1^2\right) D^2 + 15 D^3,$$
$$X^7 = J_5 D + \left(21 J_3 + 35 J_1 J_2\right) D^2 + 105 J_1 D^3.$$

По существу через эти инварианты раскрывается структура восьмимерного пространства с масштабами $\left(\bar{X}_n, D_n\right)$, $\left(\bar{X}, D\right)$ и инвариантами $(G, J_1, J_2, J_3, J_4, J_5)$.

Здесь проявилась одна фундаментальная особенность. Наблюдая совокупность независимых событий $X_n = \sum X$, получим ее инварианты — внешний мир. Эти инварианты справедливы для индивидуального события — внутренний мир. Наблюдая структуру внешнего мира, получаем возможность заглянуть во внутреннюю структуру неделимого внутреннего мира.

Из этого следует и другой фундаментальный вывод. Все процессы природы практически конечно делимы. На каждом уровне сложных процессов можно найти их неделимую часть со своей резонансной структурой.

СТЕПЕНИ СВОБОДЫ И РЕЗОНАНСЫ

Все степени свободы нейтронов в магнитных ловушках можно разделить на два класса.

К первому классу относится населенность неделимого события со своей резонансной структурой. Это принцип расслоения нейтронов по когерентным резонансным группам (оболочкам).

Ко второму классу относится совокупность (n) неделимых событий в магнитной ловушке.

Таким образом, все степени свободы выражаются произведением

$$S = mn,$$

где m — населенность неделимого события, n — число неделимых событий в наблюдаемой совокупности.

Решение этого разбиения имеет много вариантов. Здесь рассмотрим самый простейший вариант диад.

ДИАДЫ

Здесь неделимое событие имеет две когерентные группы с состояниями $\left(X_1, X_2\right)$ и населенностями (m_1, m_2). Эти состояния в центральных моментах подчиняются системе рекуррентных отношений:

$$X^m \left(X - X_1\right)\left(X - X_2\right) = X^m \left(X^2 - S_1 X + S_2\right),$$
$$S_1 = X_1 + X_2, \; S_2 = X_1 X_2 .$$

В терминах определителей эти соотношения приобретают вид:

$$X^m \left(X^2 D - X D_1 + D_2\right) = 0 .$$

Определители D, D_1, D_2 получаются из системы

$$\begin{pmatrix} X & -1 \\ X^2 & -X \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}.$$

Решая эту систему, находим:

$$D = X^2 = D,$$
$$D_1 = X^3 = J_1 D,$$
$$D_2 = X^2 X^2 = D^2.$$

Сокращая на D (случай безгранично делимых процессов при $D = 0$), находим структуру конечно делимых процессов:

$$X^m \left(X^2 - X J_1 - D\right) = 0 .$$

При ($m = 0$) получаем уравнения резонансных состояний когерентных групп:

$$X^2 - J_1 X - D = 0.$$

Пусть максимальное состояние (X_2), а минимальное (X_1). Их размах $S = X_2 - X_1$. Тогда когерентные состояния неделимого события будут равны

$$X_{1,2} = \left(J_1 \pm S\right)/2, \quad S^2 = J_I^2 + 4D .$$

Теперь можно рассмотреть совокупность рекуррентных соотношений для определения дисперсии неделимого события (D):

$$m = 2, \quad X^4 - J_1 X^3 - DX^2 = 0 .$$

Выражая центральные моменты через инварианты, получаем

$$J_2 - J_1^2 + 2D = 0, \; D = \left(J_2 - J_1^2\right)/2 ,$$
$$m = 3, \; X^5 - J_1 X^4 - DX^3 = 0 .$$

В инвариантном выражении имеем

$$J_3 - J_1 J_2 + 6J_1 D = 0, \; D = \left(J_1 J_2 - J_3\right)/\left(6J_1\right).$$
$$m = 4, \; X^6 - J_1 X^5 - DX^4 = 0$$

и получаем

$$12D^2 + 14J_2 D + \left(J_4 - J_1 J_3\right) = 0 .$$

Решая это уравнение, находим D:

$$m = 5, \; X^7 - J_1 X^6 - DX^5 = 0 .$$

Инвариантное выражение имеет вид*)

$$80J_1 D^2 + \left(20J_3 + 20J_1 J_2 - 10J_1^3\right) + \left(J_5 - J_1 J_4\right) = 0 ,$$

D является решением этого уравнения.

В этих уравнениях с каждым ростом m приобретаем дополнительную информацию для определения D. Важно соблюдать условия

$$0 < D < D_n = nD .$$

Во внешнем мире наблюдаются $\overline{X}_n$, D_n и все инварианты. Во внутреннем мире по этим инвариантам находится дисперсионный масштаб неделимого события, привлекая необходимую информацию.

После определения дисперсионного масштаба D неделимого события находятся резонансы когерентных групп (X_1, X_2) и число неделимых событий в наблюдаемом событии

$$n = D_n / D .$$

*) Благодарим за помощь студента 6-го курса СПбГУАП Титова Ю.А., которым была проверена данная формула.

НАСЕЛЕННОСТЬ КОГЕРЕНТНЫХ ГРУПП

Каждый нейтрон имеет спин $\pm 1/2$. Благодаря гиромагнитному отношению он имеет два магнитных момента (μ_1, μ_2). В когерентной группе наблюдается резонансная намагниченность (X_1, X_2). Это намагниченность ориентирована по полю и против поля. Поэтому магнитная энергия в этих экстремальных случаях равна

$$E_\mu = \pm \mu B = -\mu_1 B \div \mu_2 B ,$$

где B — напряженность магнитного поля. Из этого выражения находим:

$$\mu_1 = E_{\mu_1} / B, \quad \mu_2 = E_{\mu_2} / B.$$

Остался последний шаг для определения населенностей резонансных когерентных групп:

$$m_1 = X_1 / \mu_1 , \; m_2 = X_2 / \mu_2 .$$

Здесь знаки X_k, μ_k ($k = 1,2$) совпадают.

СПЕКТР СОСТОЯНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ДИАДАХ

Еще раз обратим внимание на то, что предельные энергии E_{μ_1}, E_{μ_2} и состояния (X_1, X_2) являются экстремальными. В промежуточных состояниях и энергиях наблюдаются смеси

$$X = kX_1 + \left(n - k\right)X_2, \; E = kE_{\mu_1} + \left(n - k\right)E_{\mu_2} .$$

Число таких смесей равно

$$N = \left(n + 1\right).$$

Все это соответствует принципу квантования совокупности n спинов в квантовой механике. Вероятности реализации этих состояний определяются по формулам для состояний когерентных групп:

$$p_1 = D / \left(X_1 \left(X_1 - X_2\right)\right), \; p_2 = D / \left(X_2 \left(X_2 - X_1\right)\right),$$

или

$$p_1 = -D / \left(X_1 S\right), \; p_2 = D / \left(X_2 S\right), \; S = X_2 - X_1 .$$

Для смесей имеем

$$p = \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!} p_1^k p_2^{n-k} .$$

Эти вероятности дают частоту сцинтилляции. В энергетическом плане это выглядит так:

$$p_1 = D_E / \left(E_{\mu_1} \left(E_{\mu_1} - E_{\mu_2}\right)\right),$$

$$p_2 = D_E / \left(E_{\mu_2} \left(E_{\mu_2} - E_{\mu_1} \right) \right).$$

Заметим, что E_1, E_2 — минимальные и максимальные энергии флуктуаций в централизованной системе.

Таким образом, наблюдая энергию сцинтилляции или энергию на фотоприемниках, можно решить ряд проблем, которые не поддаются непосредственному эксперименту. Надо помнить, что

$$E_{\mu_2} = E_2 / n, \quad E_{\mu_1} = E_1 / n.$$

Изложенная схема подсчета населенностей уровней и когерентных групп уровней основана на представлении о так называемых "больших оболочках", развитом в ядерной физике В.И. Струтинским. Она будет применена для интерпретации экспериментов по поведению нейтронов в магнитных ловушках [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Трифанов В.Н., Тарханов В.И., Нестеров М.М.* Физические решатели на спиновых кластерах // Научное приборостроение. 2008. Т. 18, № 1. С. 65–71.
2. *Нестеров М.М., Трифанов В.Н.* Фазовые технологии обработки сигналов. Определение места источника сигнала // Научное приборостроение. 2001. Т. 11, № 3. С. 68–75.
3. *Леонов И.Е., Трифанов В.Н., Шубин В.М., Нестеров М.М.* Инвариантная статистика в масс-спектрометрии // Научное приборостроение. 2008. Т. 18, № 1. С. 60–64.

Петербургский институт ядерной физики им. Б.П. Константинова РАН (*Ежов В.И.*)

Санкт-Петербургское отделение Института химической физики им. Н.Н. Семенова (*Трифанов В.Н., Нестеров М.М.*)

Материал поступил в редакцию 16.03.2009.

SPIN PARTICLES POPULATION DENSITY IN MAGNETIC TRAPS

V. I. Ezhov[1], M. M. Nesterov[2], V. N. Trifanov[2]

[1]*B.P. Konstantinov Petersburg Institute of nuclear physics RAS, Saint-Petersburg*
[2]*Saint-Petersburg branch of N.N. Semenov Institute of chemical physics RAS, Saint-Petersburg*

The problem of estimation of density of population of levels and groups of levels in quantum cells is discussed in the work. This is a key problem for creation of quantum computing cells and determination of their physical-information properties. The method offered in work allows to establish density of population of levels and groups of levels irrespective of forms of a quantum cell in the conditions of high-noise environment.

Keywords: levels population, quantum cells, invariants, statistics