ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2009, том 19, № 2, с. 80–84

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

УДК 534.29; 534.138

© Б. П. Шарфарец

К ВОПРОСУ О РАДИАЦИОННОМ ДАВЛЕНИИ В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В работе доказана истинность выражения для перекрестной составляющей радиационного давления в случае плоской бегущей или близкой к ней волне в случае произвольных включений. Впервые получены точные выражения для радиационного давления на сложных включениях в плоской бегущей волне в идеальной жидкости. В частности, доказано, что перекрестная составляющая радиационного давления с точностью до постоянного множителя равна сумме мнимых составляющих коэффициентов при зональных гармониках в разложении амплитуды рассеяния включения по сферическим функциям. Приведен расчет для классической частицы малых волновых размеров.

Кл. сл.: радиационное давление, плоская бегущая волна, идеальная жидкость, амплитуда рассеяния, поле рассеяния

ВВЕДЕНИЕ

Из всех типов волн, для которых изучается радиационное давление, повышенное внимание уделяется плоской бегущей волне. Связано это не только со сравнительной простотой задачи, но и с важностью этого типа падающего поля. Многие типы волн, такие как сферическая, цилиндрическая, гауссов пучок и т. д., в волновой зоне становятся близкими к плоской бегущей волне. Поэтому важно правильно рассчитывать радиационное давление в плоской бегущей волне, в том числе и на сложных включениях с заданной амплитудой рассеяния. К написанию данной статьи побудил тот факт, что в основополагающей работе [1] полученное общее выражение для радиационного давления в случае общего вида падающей волны оказывается несправедливым в частном случае плоской бегущей волны и автор работы [1] приводит частное альтернативное выражение, справедливое только в этом случае. Поэтому представляется целесообразным выявить причину того, что совершенно справедливое общее выражение для расчета радиационного давления, полученное в [1], не "срабатывает" в таком важном частном случае, каким является случай плоской бегущей волны.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Целью настоящей работы является доказательство того, что упомянутое общее выражение работы [1] является справедливым и в случае плоской бегущей волны, а также выявление причины его неудачного применения к этому частному случаю в работе [1].

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В работе [1] показано, что радиационное давление в квадратичном приближении в идеальной однородной жидкости для случая произвольного падающего поля может быть представлено в виде суммы двух слагаемых — перекрестного слагаемого с входящими в него первичным и рассеянным полями, а также слагаемого, квадратичного по рассеянному полю. Запишем эти составляющие в терминах работы [2]. Пусть давление рассеянного гармонического поля в волновой зоне имеет вид (рассеиватель расположен в начале координат):

$$p_s(r,\theta,\varphi) = f_0(\theta,\varphi)\frac{e^{ikr}}{r},$$

тогда справедливы следующие выражения для составляющих радиационного давления: для перекрестного

$$\overline{F}_i^{(is)} = = \frac{-1}{4\rho\omega^2}\int\limits_V \left(\frac{\partial p_{inc}(\mathbf{x})}{\partial x_i}\left(\Delta + k^2\right)p_s^*(\mathbf{x}) + \text{к.с.}\right)\mathrm{d}V \qquad (1)$$

и квадратичного по рассеянному полю

$$\overline{F}_i^{(ss)} = = -\frac{1}{2\rho c^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left|f_0(\theta,\varphi)\right|^2\cos\theta_i\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi. \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) = (r, \theta, \varphi)$ — точка наблюдения соответственно в декартовых и сферических координатах; $p_{inc}(\mathbf{x})$ — поле давления в падающей волне; $f_0(\theta,\varphi)$ — амплитуда рассеяния включения в поле $p_{inc}(\mathbf{x})$; $\cos\theta_i$ — направляющий косинус радиус-вектора точки на сфере относительно i-й оси координат (отметим, что $\theta_3=\theta$); $i=\overline{1,3}$; ρ, c — плотность и скорость звука окружающей однородной среды, $k=\omega/c$ — волновое число; V — охватывающий включение объем.

Кроме того, в [1] предложено выражение для суммарного радиационного давления, справедливое только в случае падающей плоской бегущей волны. В случае падающей волны вида $p_{inc}(\mathbf{x})=p_0 e^{ikz}$, $p_0=\mathrm{const}$, это выражение вновь в терминах работы [2] имеет вид

$$\overline{F}_i=\overline{E}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|f_0(\theta,\varphi)\right|^2\left(\delta_{i3}-\cos\theta_i\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi,\quad i=\overline{1,3}. \tag{3}$$

Здесь δ_{i3} — символ Кронекера; $\overline{E}=\dfrac{p_0{}^2}{2\rho c^2}$ — средняя плотность энергии в падающей волне; $f_0(\theta,\varphi)$ — амплитуда рассеяния включения в поле плоской волны $p_{inc}(\mathbf{x})=e^{ikz}$. Отметим, что в этом случае $p_s(r,\theta,\varphi)=f_0(\theta,\varphi)\dfrac{p_0 e^{ikr}}{r}$.

Вместе с тем в [1] в силу принятых там допущений выражение (1) дает ложный результат в случае падающего поля, идентичного или близкого к плоской бегущей волне, а в [3] истинность (1) для этого поля не подвергается сомнению, но рассматривается только случай включения в виде монополя или диполя.

Целью настоящей работы является доказательство истинности выражения (1) в том числе и для случая плоской бегущей или близкой к ней волне для произвольных включений с заданной амплитудой рассеяния, а также вывод точных выражений для радиационного давления на включениях в плоской бегущей волне.

Таким образом, необходимо доказать идентичность выражения (3) сумме выражений (1) и (2) в случае плоской бегущей волны.

Легко видеть, что эта задача эквивалентна доказательству того, что сумма $\overline{F}_i^{(is)}+\overline{F}_i^{(ss)}$ из (1), (2) равна $\overline{F}_i$ из (3) для случая $p_{inc}(\mathbf{x})=p_0 e^{ikz}$. Для составляющих силы при $i=1,2$ это очевидно, т. к. $\overline{F}_{1,2}{}^{(is)}=0$, а $\overline{F}_{1,2}{}^{(ss)}=\overline{F}_{1,2}$. Кроме того, вычленяя в (3) квадратичную составляющую (2) $\overline{F}_3{}^{(ss)}=-\overline{E}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|f_0(\theta,\varphi)\right|^2\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, приходим к необходимости доказательства следующего равенства

$$\frac{-1}{2k^2}\int_V\left(\frac{\partial e^{ikz}}{\partial z}\left(\Delta+k^2\right)f_0^*(\theta,\varphi)\frac{e^{-ikr}}{r}+\text{к.с.}\right)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|f_0(\theta,\varphi)\right|^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi. \tag{4}$$

Стоящий в (4) справа интеграл равен полному поперечному сечению рассеяния включения Q [4]. Имеет место следующая оптическая теорема [4, с. 69], справедливая в том числе и в системах с потерями [5, с. 241]:

$$Q=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|f_0(\theta,\varphi)\right|^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}(f_0(\theta=0)). \tag{5}$$

Рассмотрим разложение амплитуды рассеяния f_0 по сферическим функциям:

$$f_0(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l^0P_l(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{l}\left[A_l^m\cos m\varphi+B_l^m\sin m\varphi\right]P_l^m(\cos\theta)\right].$$

Учитывая, что $P_l(1)=1$ и $P_l^m(1)=0$ при $m=1,2,\ldots$, получаем для Q:

$$Q=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|f_0(\theta,\varphi)\right|^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{Im}(A_l^0). \tag{6}$$

Наконец пользуясь методикой работы [2], получаем

$$\frac{-1}{2k^2}\int_V\left(\frac{\partial e^{ikz}}{\partial z}\left(\Delta+k^2\right)f_0^*(\theta,\varphi)\frac{e^{-ikr}}{r}+\text{к.с.}\right)\mathrm{d}V=\frac{4\pi}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{Im}(A_l^0). \tag{7}$$

Сравнение (6) и (7) доказывает справедливость (4). Как видно, выражение в (7) просто аннулируется при $\mathrm{Im}(A_l^0)\equiv 0$, $l=0,1,2,\ldots$

Можно показать, по крайней мере, для сферически симметричных жидких включений без потерь аналогично тому, как это проделано в работе [6, с. 224], что справедливо следующее равенство:

$$A_l^0=(2l+1)\frac{e^{2i\delta_l}-1}{2ik},\quad l=0,1,2,\ldots$$

Здесь δ_l — действительные числа. Отсюда очевидно, что в общем случае $\mathrm{Im}(A_l^0) \neq 0$.

Из (1), (7) очевидно, что если по каким-либо соображениям оставлять в коэффициентах A_l^0 только реальные составляющие (т. е. по умолчанию полагать $\mathrm{Im}(A_l^0) \equiv 0$), то выражение (7), а значит и (1), будет тождественно равно нулю при любых $\mathrm{Re}(A_l^0)$. Вызвано это тем, что в случае плоской волны слагаемые, соответствующие $\mathrm{Re}(A_l^0)$, $l = 0,1,2,...$, обнуляют само подынтегральное выражение в (7) и соответственно в (1). Ровно это и произошло в работе [1], из чего и было сделано заключение о непригодности (1) в случае плоской бегущей волны. Отметим, что в случае волны, близкой к плоской бегущей, также будет присутствовать эффект практического обнуления подынтегрального выражения в (1) для слагаемых, содержащих реальные составляющие амплитуды рассеяния, что обусловлено близостью $p_{inc} \approx p_0 e^{ikz}$.

Таким образом, можно записать точное выражение для радиационного давления на включение с заданной амплитудой рассеяния в плоской бегущей волне $p_{inc}(\mathbf{x}) = p_0 e^{ikz}$ для отличной от нуля компоненты перекрестной составляющей силы

$$\overline{F}_z^{(is)} = \frac{-p_0^2}{4\rho\omega^2} \times$$
$$\times \int_V \left(\frac{\partial e^{ikz}}{\partial z} \left(\Delta + k^2\right) f_0^*(\theta,\varphi) \frac{e^{-ikr}}{r} + \text{к.с.} \right) \mathrm{d}V =$$
$$= \overline{E} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left| f_0(\theta,\varphi) \right|^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi =$$
$$= \overline{E} \frac{4\pi}{k} \mathrm{Im}(f_0(\theta = 0)) = \overline{E} \frac{4\pi}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{Im}(A_l^0) \qquad (8)$$

и для каждой квадратичной составляющей

$$\overline{F}_i^{(ss)} = -\overline{E} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left| f_0(\theta,\varphi) \right|^2 \cos\theta_i \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi, \; i = \overline{1,3}. \qquad (9)$$

После получения описанного результата совершенно резонно перепроверить классический случай расчета радиационного давления на жидкий шарик в поле плоской волны при условии малости его волновых размеров $ka \ll 1$, где a — радиус шарика. При этих условиях в амплитуде рассеяния необходимо удерживать только монопольный и дипольный моменты, а сама она обладает азимутальной симметрией

$$f_0(\theta) = A_0^0 + A_1^0 \cos\theta. \qquad (10)$$

Пусть c_1 и ρ_1 — скорость и плотность шарика соответственно; $n = c/c_1$ — показатель преломления; $\beta = \rho_1/\rho$ — отношение плотности включения к плотности пространства; $k_1 = \omega/c_1$. Пользуясь техникой, изложенной в [6, задача 82], получаем после несложных вычислений для A_l^0, $l = 0,1$:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Re}(A_0^0) &= \frac{(n^2-\beta)k^2a^3}{3\beta} + O(k^4a^5),\\
\mathrm{Im}(A_0^0) &= \frac{(n^2-\beta)^2k^5a^6}{9\beta^2} + O(k^7a^8);\\
\mathrm{Re}(A_1^0) &= \frac{(\beta-1)k^2a^3}{(2\beta+1)} + O(k^4a^5),\\
\mathrm{Im}(A_1^0) &= \frac{(\beta-1)^2k^5a^6}{3(2\beta+1)^2} + O(k^7a^8).
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Получим из (3) продольное радиационное давление $\overline{F}_z$ для включения с амплитудой рассеяния (9), (10) по старой методике $\overline{F}_z^{'}$ с помощью прямых вычислений, где доминирующими являются реальные составляющие, и с учетом полученных выше соотношений (8) для перекрестной составляющей $\overline{F}_z^{''}$. Согласно (11), квадратичная составляющая также определяется реальными составляющими. Окончательно имеем:

$$\overline{F}_z^{'} = \frac{4\pi}{3}\overline{E} \times$$
$$\times \left(3\,\mathrm{Re}(A_0^0)^2 + \mathrm{Re}(A_1^0)^2 - 2\,\mathrm{Re}(A_0^0)\,\mathrm{Re}(A_1^0)\right), \qquad (12)$$

$$\overline{F}_z^{''} = 4\pi\overline{E} \times$$
$$\times \left(\frac{\mathrm{Im}(A_0^0)}{k} + \frac{\mathrm{Im}(A_1^0)}{k} - \frac{2}{3}\mathrm{Re}(A_0^0)\,\mathrm{Re}(A_1^0) \right). \qquad (12a)$$

Сам результат в (12), (12а) имеет порядок $O(k^4a^6)$, что следует из (11). Анализ (12), (12а) с учетом (11) показывает, что в рассматриваемом примере разность $\overline{F}_z^{''} - \overline{F}_z^{'}$ имеет порядок $\overline{F}_z^{''} - \overline{F}_z^{'} = O(k^8a^{10})$ и оба результата $\overline{F}_z^{'}$ и $\overline{F}_z^{''}$ практически тождественны. Это объясняется малостью мнимых составляющих по сравнению с действительными составляющими в данном рассматриваемом случае (11). В общем случае необходимо пользоваться точными выражениями (8) для вычисления перекрестной составляющей. Отметим, кроме того, что $\overline{F}_z^{'}$ из (12) совпадает с результатами, полученными в [1, 7] и др.

Подтвердим, кроме того, подмеченный в [3] факт о том, что если для включения (9) выполняется одно из равенств $A_0^{\,0} = 0$ или $A_1^{\,0} = 0$, то квадратичная составляющая радиационного давления равна нулю. Это следует непосредственно из (10).

В заключение остановимся на другом особом случае первичного поля — случае стоячей плоской волны. Приведем выражение работы [2, (16)] для перекрестной составляющей силы в случае включений с амплитудой рассеяния вида $f_0(\theta,\varphi) = f_0(\pi-\theta,\varphi)$, что справедливо в данном случае:

$$\overline{F}_z^{(is)} = \frac{-4\pi\overline{E}_{st}}{k}\sin 2kh \times$$

$$\times\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{Re}\left(A_l^{\,0}\right)\left\{\sum_{n=0}^{[l/2]}(-1)^{l-n}\frac{(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}\right\} =$$

$$= \frac{-4\pi\overline{E}_{st}}{k}\sin 2kh\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\,\mathrm{Re}\left(A_l^{\,0}\right). \qquad (13)$$

Здесь удалось свернуть конечную сумму в фигурных скобках, т. к. легко показать, пользуясь разложением в ряд для полиномов Лежандра и свойством $P_l(1) = 1$, что имеет место равенство

$$\sum_{n=0}^{[l/2]}(-1)^{l-n}\frac{(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!} = (-1)^l.$$

Таким образом, выражение (1) в этом случае аннулирует все слагаемые, содержащие $\mathrm{Im}(A_l^{\,0})$, оставляя только слагаемые, содержащие $\mathrm{Re}(A_l^{\,0})$. Отсюда следует, что радиационное давление на такое включение в поле стоячей плоской волны должно отличаться от давления в бегущей волне пропорционально различиям между реальными $\mathrm{Re}(A_l^{\,0})$ и мнимыми составляющими $\mathrm{Im}(A_l^{\,0})$. Из (11) сразу следует классический результат: для включения (9) соотношение между силами имеет порядок $O((ka)^3)$. Отметим, что это соотношение в работе [3] также из свойств включения было получено иначе. Кроме того, отметим структурную схожесть результатов (8) и (13) для перекрестных составляющих сил в бегущей и стоячей волнах.

ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе доказана истинность выражения (1) для перекрестной составляющей радиационного давления в плоской бегущей или близкой к ней волне в случае произвольных включений. Впервые получены точные выражения для радиационного давления на сложных включениях в плоской бегущей волне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горьков Л.П.* О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле в идеальной жидкости // Доклады АН СССР. 1961. Т. 140, № 1. С. 88–91.
2. *Курочкин В.Е., Шарфарец Б.П.* Связь радиационного давления с амплитудой рассеяния сложных включений в идеальной жидкости // Доклады РАН. Физика. 2008. Т. 419, № 3. С. 324–327.
3. *Данилов С.Д., Миронов М.А.* О силе радиационного давления, действующей на малую частицу в звуковом поле // Акуст. журн. 1984. Т. 30, № 4. С. 467–473.
4. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960. 860 с.
5. *Ву Т.Ю., Омура Т.* Квантовая теория рассеяния. М.: Наука, 1969. 452 с.
6. *Флюгге З.* Задачи по квантовой механике. Т. 1. М.: Мир, 1974. 341 с.
7. *Yosioka K., Kavasima Y.* Acoustic Radiation Pressure on Compressible Sphere // Acustica. 1955. V. 5. P. 167–173.

Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург

Материал поступил в редакцию 6.02.2009.

TO THE PROBLEM OF RADIATION PRESSURE IN THE FIELD OF PROGRESSIVE WAVE IN IDEAL FLUID

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation RAS, Saint-Petersburg

The work proves the validity of the expression for a cross component of radiation pressure in case of flat progressive or close to it wave in case of random closing. Exact expressions for radiation pressure on complex closings in a flat progressive wave in an ideal fluid were obtained for the first time. Thus, it was proved, that the cross component of radiation pressure within a constant factor is equal to the total of imaginary component coefficients at zonal harmonics in decomposition of a scattering amplitude of closing on spherical functions. Calculation for a classical particle of small wave sizes is presented.

Keywords: radiation pressure, flat progressive wave, ideal fluid, scattering amplitude, scattering field