

УДК 517.956.225: 621.319.7

© С. И. Шевченко

МЕТОД АНАЛИТИЧЕСКОЙ ЗАМЕНЫ В ЗАДАЧЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ АКСИАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Приведен алгоритм решения аксиального уравнения Лапласа методом граничных интегральных уравнений, в котором интегральное уравнение с помощью метода коллокации и метода аналитической замены и последующего аналитического интегрирования трансформируется в матричное уравнение, которое решается методом Гаусса.

Кл. сл.: потенциал электростатического поля, уравнение Лапласа, метод граничных интегральных уравнений, метод коллокации, метод аналитической замены.

ВВЕДЕНИЕ

Задача нахождения электростатических полей (вычисление потенциала и компонент напряженности электрического поля) формулируется как задача Дирихле для уравнения Лапласа. Для решения этой задачи метод граничных интегральных уравнений был признан наиболее удачным с точки зрения экономии ресурсов и обладающим хорошей устойчивостью. Этот метод предполагает переход от решения уравнения Лапласа к решению эквивалентного ему интегрального уравнения [1]

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = \int_{(S)} \sigma(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dS, \quad (1)$$

где $\sigma(\mathbf{r})$ — функция плотности поверхностного заряда (ППЗ); $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ — ядро интегрального уравнения; точка \mathbf{r}_0 — точка, в которой ищется потенциал (точка наблюдения, ТН); интеграл в правой части берется по площади поверхности всех электродов (границы), коэффициент $1/4\pi\epsilon_0$, который должен быть перед интегралом в правой части, включен в функцию σ .

Для решения этого уравнения применяется метод коллокации, с помощью которого производится переход от интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений (матричному уравнению). Для этого перехода существуют два основных метода: метод прямого интегрирования и метод "аналитической замены", называемый также методом подстановки.

Первый метод подразумевает в предположении, что подынтегральная функция обладает свойством достаточной гладкости, прямое представление интеграла, стоящего в правой части (1), в виде интегральной суммы (чаще всего по правилу Гаусса [2]). Этот метод решения уравнения (1) для электростатических задач был впервые описан в работе [3] и развит в [4, 5]. Основная его трудность в том, что подынтегральная функция не является

гладкой. Ядро $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ имеет в аксиальном случае логарифмическую сингулярность [4]. Поэтому представление интеграла, стоящего в правой части (1), в виде интегральной суммы не является корректным. Ситуацию несколько исправляет предложенный в [6] метод понижения степени особенности интегрируемой функции.

Второй метод подразумевает выделение сингулярной части и замену оставшейся гладкой части на некоторую достаточно простую, но хорошо аппроксимирующую оставшуюся часть функцию, чтобы в результате выражение, стоящее под знаком интеграла, стало интегрируемым. Данный метод в приложении к задаче нахождения электростатического поля в своей полной (классической) постановке до представленной работы не применялся. Во всех работах, известных автору данной статьи (см. [7]), проводилось интерполирование функции $\sigma(\mathbf{r})$ чаще всего сплайном третьего порядка и далее осуществлялось численное интегрирование с применением метода понижения степени особенности интегрируемой функции [6].

1. РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА АНАЛИТИЧЕСКОЙ ЗАМЕНЫ

Для применения метода аналитической замены требуется провести в стоящей под знаком интеграла в правой части уравнения (1) функции такие преобразования, чтобы интеграл приобрел вид (одного или совокупности) табличных интегралов. Интегрирование в формуле (1) проводится по поверхности (контуру) границы, т. е. вдоль длины этого отрезка. Естественно поэтому представить все функции, стоящие под знаком интеграла, как функции длины, отсчитываемой вдоль рассматриваемого отрезка границы. Переход в подынтегральной функции от зависимости от мировых координат (r, z) к зависимости от длины определяется видом отрезка электрода, по поверхности которого проводится интегрирование. О том, как про-

водить этот переход, подробно описано в работах [4, 5]. Поэтому мы остановимся на этом лишь вкратце.

Везде ниже функцию плотности поверхностных зарядов (ППЗ) $\sigma(\mathbf{r})$ представляем в виде сплайна третьего порядка (на каждом элементарном отрезке шаблона $\zeta_i \leq \zeta \leq \zeta_{i+1}$, $i = 0 \div N-1$)

$$\sigma^{(i)} = \sum_{k=0}^3 S_k^{(i)} \zeta^k, \quad (2)$$

где $\zeta = l - l_0$, l_0 — расстояние вдоль контура границы от начала отрезка границы до точки коллокации (ТК). Верхний индекс i в скобках у функции σ (и далее по тексту у других функций) указывает на то, что равенство (2) справедливо на отрезке шаблона с номером i , N — число точек шаблона.

Для ядра G можно использовать различные выражения для разных расстояний от ТН до рассматриваемого отрезка границы и для различных видов отрезков границы.

Если расстояние от ТН до отрезка границы, по контуру которого проводится интегрирование, велико, то можно считать ядро достаточно гладким и для него можно вдоль контура данного отрезка построить сплайн-представление (на каждом участке шаблона $\zeta_i \leq \zeta \leq \zeta_{i+1}$)

$$G^{(i)} = \sum_{k=0}^3 G_k^{(i)} \zeta^k. \quad (3)$$

Для этого используется стандартная процедура [8].

С использованием формул (2) и (3) выражение для вклада в потенциал (правая часть уравнения (1), записанная для одного отрезка границы) принимает вид

$$\phi_p = \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{k=0}^6 A_k^{(i)} I_k^{(i)}, \quad (4)$$

где $I_k^{(i)} = \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \zeta^k d\zeta = \frac{\zeta_{i+1}^{k+1} - \zeta_i^{k+1}}{k+1}$, а коэффициенты

$A_k^{(i)}$ определяются соотношениями, характерными для перемножения двух кубических полиномов (2) и (3) (с коэффициентами B и C):

$$\begin{aligned} A_6 &= B_3 C_3, \\ A_5 &= B_3 C_2 + B_2 C_3, \\ A_4 &= B_3 C_1 + B_2 C_2 + B_1 C_3, \\ A_3 &= B_3 C_0 + B_2 C_1 + B_1 C_2 + B_0 C_3, \\ A_2 &= B_2 C_0 + B_1 C_1 + B_0 C_2, \\ A_1 &= B_1 C_0 + B_0 C_1, \\ A_0 &= B_0 C_0. \end{aligned} \quad (5)$$

В эти соотношения следует подставить $A_k = A_k^{(i)}$, $B_k = S_k^{(i)}$, $C_k = G_k^{(i)}$.

Если расстояние от ТН до рассматриваемого отрезка границы становится недостаточным для того, чтобы считать ядро достаточно гладким для его сплайн-представления, то можно предложить два основных подхода:

- 1) применение для интерполяции ядра более частого шаблона,
- 2) выделение негладкой части.

Опыт показал хорошую работоспособность алгоритмов, разработанных с применением данных подходов. Причем оказалось, что эти два алгоритма имеют перекрывающиеся, но несколько различные диапазоны расстояний, на которых они применимы.

Использование более частого шаблона

Для построения сплайн-интерполяции ядра каждый элементарный участок шаблона делится на n равных (а можно, и неравных) отрезков, и получается новый шаблон с $N_2 = N \cdot n$ элементарными отрезками. На этом новом шаблоне осуществляется сплайн-представление ядра (на каждом участке шаблона $\zeta_j \leq \zeta \leq \zeta_{j+1}$, $j = 0 \div N \cdot n - 1$)

$$G^{(j)} = \sum_{k=0}^3 G_k^{(j)} \zeta^k. \quad (6)$$

С учетом этого для вклада в потенциал получается похожее на формулу (4) выражение

$$\phi_p = \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{k=0}^6 \sum_{j=0}^{n-2} A_k^{(p)} I_k^{(j)}, \quad (7)$$

где $I_k^{(j)} = \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j+1}} \zeta^k d\zeta = \frac{\zeta_{j+1}^{k+1} - \zeta_j^{k+1}}{k+1}$, а соотношения для

коэффициентов $A_k^{(p)}$ аналогичны коэффициентам (5), в которых только верхние индексы при коэффициентах $G_k^{(i)}$ следует заменить на j , что указывает на более частый шаблон для сплайн-представления функции G .

Т. е. каждый элементарный отрезок основного шаблона мы разбиваем на n более мелких отрезков и на этом новом шаблоне строим сплайн-представление ядра.

Метод выделения негладкой части

Ядро, согласно [4, 5], можно представить в виде

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = f_1(z, r) + f_2(z, r) \ln[(r - r_0)^2 + (z - z_0)^2], \quad (8)$$

где функции f_1, f_2 являются гладкими везде, за исключением оси.

Учитывая это, можно построить сплайн-представление функций f_1, f_2 :

$$f_1^{(i)} = \sum_{k=0}^3 F_{1k}^{(i)} \zeta^k, \quad (9)$$

$$f_2^{(i)} = \sum_{k=0}^3 F_{2k}^{(i)} \zeta^k. \quad (10)$$

Находящаяся в ядре логарифмическая функция может нести в себе негладкость вплоть до сингулярности. Поэтому ее следует рассмотреть подробнее. Это рассмотрение зависит от вида отрезка границы, вдоль которого проводится интегрирование:

Отрезок границы — отрезок прямой линии

В этом случае квадрат расстояния от ТН до точки интегрирования (ТИ) определяется выражением [5]

$$L^2 = \zeta^2 + \delta^2, \quad (11)$$

где δ — расстояние от ТН до отрезка границы.

Вклад в потенциал можно записать в виде

$$\phi_p = \sum_{i=0}^{N-2} \left\{ \sum_{k=0}^6 A_{1k}^{(p)} I_k^{(i)} + \sum_{k=0}^6 A_{2k}^{(p)} J_k^{(i)} \right\}, \quad (12)$$

где $J_k^{(i)} = \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \zeta^k \ln(\zeta^2 + \delta^2) d\zeta$, а коэффициенты

$A_{1k}^{(p)}$ и $A_{2k}^{(p)}$ определяются соотношениями (5), в которые для получения коэффициентов $A_{1k}^{(p)}$ следует подставить $A_k = A_{1k}^{(p)}$, $B_k = S_k^{(i)}$, $C_k = F_{1k}^{(i)}$, для получения коэффициентов $A_{2k}^{(p)}$ — $A_k = A_{2k}^{(p)}$, $B_k = S_k^{(i)}$, $C_k = F_{2k}^{(i)}$.

Отрезок границы — часть дуги окружности или отрезок гладкой кривой

Если к случаю части дуги окружности подойти строго, то для функции L легко найти выражение

$L = 2R_{cir} \sin \frac{\Delta\vartheta}{2}$, в котором R_{cir} — радиус окружности, описывающей границу; $\vartheta = \vartheta_o + \Delta\vartheta$ — угол, под которым из центра окружности видна ТИ; ϑ_o — угол, под которым из центра окружности видна ТН. Учитывая, что $\vartheta = \zeta/R_{cir}$, понятно, что в выражении для вклада в потенциал от одного отрезка границы получатся интегралы типа $\int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \zeta^k \ln \sin(\zeta/2R_{cir}) d\zeta$, которые имеют первообразные только в виде рядов [9]. Поэтому используем подход работы [5] и представим функцию L^2

как для случая отрезка границы — части дуги окружности, так и для случая отрезка границы — отрезка гладкой кривой, в виде

$$L^2 = (\zeta^2 + \delta^2) Q(\zeta), \quad (13)$$

где $Q(\zeta)$ — гладкая функция, близкая к единице в окрестности точки $\zeta = 0$.

Для функции $Q(\zeta)$ строим сплайн-представление на обычном шаблоне (в котором точками шаблона являются точки коллокации (ТК))

$$Q^{(i)}(\zeta) = \sum_{k=0}^3 Q_k^{(i)} \zeta^k$$

и подставляем это представление в (1), записанное для вклада в потенциал от одного отрезка границы, и после ряда весьма несложных преобразований получаем

$$\phi_p = \sum_{i=0}^{N-2} \left\{ \sum_{k=0}^6 A_{1k}^{(i)} I_k^{(i)} + \sum_{k=0}^6 A_{2k}^{(i)} P_k^{(i)} \right\}, \quad (14)$$

где $P_k^{(i)} = \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \zeta^k \ln(\zeta^2 + \delta^2) d\zeta$, а коэффициенты

$A_{1k}^{(i)}$ и $A_{2k}^{(i)}$ были определены выше для соотношения (12).

Таким образом, для всех рассматриваемых видов отрезков границы удалось свести вычисление вклада в потенциал от одного отрезка границы к совокупности табличных интегралов, умноженных на некоторые коэффициенты. Этим удалось реализовать метод аналитической замены и можно приступить к формированию и решению матричного уравнения и затем к вычислению потенциала и компонент напряженности электрического поля.

2. ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ППЗ

Особенностью реализации первого этапа решения уравнения Лапласа (формирование и решение матричного уравнения) является то, что ТН помещаются поочередно в ТК, которые расположены на границе (контуре электродов).

При реализации первого этапа решения аксиального уравнения Лапласа методом коллокации σ_i, m_i (m_i — вторая производная от функции σ по ζ) считаются неизвестными, и относительно них формируется матричное уравнение. Для этого поочередно ТН помещается в различные ТК и формируется строка матричного уравнения. Подчеркнем, что в методе прямого интегрирования неизвестными являются только значения σ в ТК,

а при реализации метода аналитической замены переменных в два раза больше и соответственно в два раза больше порядок системы линейных алгебраических уравнений.

При формировании матрицы (системы линейных алгебраических уравнений) необходимо учесть как граничные условия уравнения Лапласа, так и условия сшивки решения на границах (концах) электродов. Для учета граничных условий уравнения Лапласа записываем уравнение (1) последовательно во всех ТК

$$\sum_{i_e=0}^{N_e-2} \sum_{i_s=0}^{N_s-2} \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{k=0}^3 S_k^{(i)} I_k^{(i)} = \phi_n, \quad (15)$$

где n — глобальный номер ТК; i_s — локальный номер ТК на рассматриваемом отрезке границы; первая сумма представляет собой сумму по всем электродам; вторая — по всем отрезкам электрода с номером i_e ; третья — по всем ТК данного отрезка границы.

Значения коэффициентов $S_k^{(i)}$ выражаются через значения ППЗ в точках коллокации σ_i и через значения ее второй производной $\sigma_i'' = m_i$:

$$\begin{aligned} S_3^{(i)} &= \frac{m_{i+1} - m_i}{6h_i}, \\ S_2^{(i)} &= -\frac{m_{i+1}\zeta_i - m_i\zeta_{i+1}}{2h_i}, \\ S_1^{(i)} &= \frac{m_{i+1}\zeta_i^2 - m_i\zeta_{i+1}^2}{2h_i} - \frac{m_{i+1} - m_i}{6} h_i + \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{h_i}, \\ S_0^{(i)} &= \frac{m_{i+1}\zeta_i^3 - m_i\zeta_{i+1}^3}{6h_i} + \frac{m_{i+1}\zeta_i - m_i\zeta_{i+1}}{6} h_i - \\ &\quad - \frac{\sigma_{i+1}\zeta_i - \sigma_i\zeta_{i+1}}{h_i}. \end{aligned} \quad (16)$$

Если подставить эти выражения в (15), то получится система Ng уравнений относительно $2 \cdot Ng$ неизвестных σ_i и m_i . Видно, что если на границе имеются Ng ТК, то в левой части (15) всего $2 \cdot Ng$ членов при величинах σ_i и m_i .

Еще некоторое число уравнений получаем из условий сшивки плотности заряда и его первой производной на границе соседних отрезков шаблона [7, 8]. Особо выделяем условия на концах электродов и два дополнительных краевых условия, которые следует накладывать на интерполяционный сплайн. Все эти вопросы достаточно подробно освещены в [7, 8]. Поэтому в данной работе на это внимание более уделено не будет.

Таким образом, мы получаем $2 \cdot Ng$ переменных и $2 \cdot Ng$ линейных алгебраических уравнений.

Решаем данную систему методом Гаусса с выделением ведущего члена. В результате получаем значения σ_i и m_i во всех ТК, а если подставить эти выражения в (16), то получаем значения коэффициентов сплайна на всех отрезках шаблона интерполяции.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА И КОМПОНЕНТ НАПРЯЖЕННОСТИ

В основе алгоритма вычисления потенциала и компонент напряженности электрического поля лежит выражение для вклада в потенциал от одного отрезка границы (1). Но в отличие от предыдущего пункта в данной функция ППЗ уже является известной (и ее сплайн-представление) и ТН уже не лежат в ТК, а располагаются чаще всего в пространстве вне электродов. Поэтому в результате применения (1) мы получаем не уравнение, а непосредственно получаем значения искомой величины в ТН.

Вычисление потенциала. Для вычисления все было уже описано выше в п. 1. Реализация метода аналитической замены.

Вычисление компонент напряженности электрического поля

Применяются те же ранее описанные идеи. Когда ТН находится далеко от ОИ, то ядра, необходимые для вычисления компонент электрического поля, можно считать достаточно гладкими и построить их сплайн-представления (на каждом участке шаблона $\zeta_i \leq \zeta \leq \zeta_{i+1}$)

$$G_r^{(i)} = \sum_{k=0}^3 R_k^{(i)} \zeta^k. \quad (17)$$

$$G_z^{(i)} = \sum_{k=0}^3 Z_k^{(i)} \zeta^k. \quad (18)$$

Эти выражения подставляем в формулу, аналогичную (1), вместо ядра $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$. Получаем для каждой из компонент электрического поля формулу, вполне сходную с (4):

$$E_p^{(r,z)} = \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{k=0}^6 A_k^{(i,r,z)} I_k^{(i)}, \quad (19)$$

где коэффициенты выражаются через формулу (5), в которой для вычисления вклада в компоненту $E_p^{(r)}$ следует подставить $A_k = A_k^{(i,r)}$, $B_k = S_k^{(i)}$, $C_k = R_k^{(i)}$, а для вычисления вклада в компоненту $E_p^{(z)}$ — $A_k = A_k^{(i,z)}$, $B_k = S_k^{(i)}$, $C_k = Z_k^{(i)}$.

При приближении ТН к ОИ используем более частый шаблон сплайн-интерполяции и от формулы, подобной (4), переходим к формуле, подобной (7):

$$E_p^{(r,z)} = \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{k=0}^6 \sum_{j=0}^{n-2} A_k^{(i,r,z)} I_k^{(j)}. \quad (20)$$

В случае, когда ТН находится очень близко от ОИ и шаг более частого шаблона становится очень мелким ($n > 1000$), метод использования более частого шаблона становится неприменимым. В этом случае ядро для каждой из компонент электрического поля, согласно [4, 5], представимо в виде:

$$G^{(z)} = f_1^{(z)}(z,r) + f_2^{(z)}(z,r) \ln[(r-r_0)^2 + (z-z_0)^2] + f_3^{(z)}(z,r) \frac{1}{(r-r_0)^2 + (z-z_0)^2}, \quad (21)$$

$$G^{(r)} = f_1^{(r)}(z,r) + f_2^{(r)}(z,r) \ln[(r-r_0)^2 + (z-z_0)^2] + f_3^{(r)}(z,r) \frac{1}{(r-r_0)^2 + (z-z_0)^2}, \quad (22)$$

где функции $f_1^{(r,z)}, f_2^{(r,z)}, f_3^{(r,z)}$ являются гладкими везде, за исключением оси.

Для этих функций строим сплайн-представление (на каждом участке шаблона $\zeta_i \leq \zeta \leq \zeta_{i+1}$)

$$f_{1-3}^{(i,r,z)} = \sum_{k=0}^3 F_{1-3,k}^{(i,r,z)} \zeta^k. \quad (23)$$

Методика получения компонент напряженности электрического поля при использовании такого выражения для ядер описана в [4, 5]. И зависит эта методика от конфигурации отрезка границы, вблизи которого находится ТН.

Отрезок границы — отрезок прямой линии

Рассмотрим алгоритм получения вклада в компоненту напряженности электрического поля $E_p^{(r)}$ от одного отрезка границы.

В этом случае L^2 определяется выражением (11). Подставляем это выражение, а также сплайн-представления функций $f_1^{(r)}, f_2^{(r)}, f_3^{(r)}$ и σ в формулу (1), и после довольно простых преобразований получаем выражения для вклада в компоненту напряженности электрического поля $E_p^{(r)}$:

$$E_p^{(r)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-2} \left\{ \sum_{k=0}^6 A_{1,k}^{(r,i)} I_k^{(i)} + \sum_{k=0}^6 A_{2,k}^{(r,i)} J_k^{(i)} + \sum_{k=0}^6 A_{3,k}^{(r,i)} M_k^{(i)} \right\}, \quad (24)$$

где $M_k^{(i)} = \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j+1}} \frac{\zeta^k}{\zeta^2 + \delta^2} d\zeta$, а коэффициенты

$E_{1,k}^{(r,i)}, E_{2,k}^{(r,i)}, E_{3,k}^{(r,i)}$ выражаются через коэффициенты $S_k^{(i)}, F_{1-3,k}^{(i,r)}$ согласно формулам (5). Причем, для получения коэффициентов $E_{1,k}^{(r,i)}$ следует в эти формулы подставить $A_k^{(i)} = E_{1,k}^{(r,i)}, B_k^{(i)} = S_k^{(i)}, C_k^{(i)} = F_{1,k}^{(i,r)}$, для получения коэффициентов $E_{p,k}^{(2,i)}$ — $A_k^{(i)} = E_{2,k}^{(r,i)}, B_k^{(i)} = S_k^{(i)}, C_k^{(i)} = F_{2,k}^{(i,r)}$, а для получения коэффициентов $E_{p,k}^{(3,i)}$ — $A_k^{(i)} = E_{3,k}^{(r,i)}, B_k^{(i)} = S_k^{(i)}, C_k^{(i)} = F_{3,k}^{(i,r)}$.

Для получения компоненты напряженности электрического поля $E_p^{(z)}$ все действия вполне аналогичны.

Отрезок границы — часть дуги окружности или отрезок гладкой кривой

Подобно работе [5] и как уже использовалось выше, применяем для функции L^2 представление (13). При этом ядро (рассматриваем ядро $G^{(r)}$ в виде (22)) принимает вид

$$G^{(r)} = f_1^{(r)} + f_2^{(r)} \ln Q(\zeta) + f_2^{(r)} \ln[\zeta^2 + \delta^2] + \frac{f_3^{(r)}}{Q(\zeta)} \frac{1}{\zeta^2 + \delta^2}.$$

Видно, что целесообразно строить сплайн-представление следующих функций:

$$(f_1^{(r)} + f_2^{(r)} \ln Q(\zeta))^{(i)} = \sum_{k=0}^3 \alpha_k^{(i)} \zeta^k,$$

$$\left(\frac{f_3^{(r)}}{Q(\zeta)} \right)^{(i)} = \sum_{k=0}^3 \beta_k^{(i)} \zeta^k.$$

Если использовать эти выражения, то для вклада в компоненту напряженности электрического поля получаем:

$$E_p^{(r)} = \sum_{i=0}^{N-2} \left\{ \sum_{k=0}^6 E_{1,k}^{(r,i)} I_k^{(i)} + \sum_{k=0}^6 E_{2,k}^{(r,i)} J_k^{(i)} + \sum_{k=0}^6 E_{3,k}^{(r,i)} M_k^{(i)} \right\}. \quad (25)$$

Коэффициенты $E_{1,k}^{(r,i)}, E_{2,k}^{(r,i)}, E_{3,k}^{(r,i)}$ выражаются через коэффициенты $S_k^{(i)}, \alpha_k^{(i)}, \beta_k^{(i)}, F_{2,k}^{(i,r)}$ с помощью формул (5), в которые следует для получения ко-

эффициентов $E_{1,k}^{(r,i)}$ подставить $A_k^{(i)} = E_{1,k}^{(r,i)}$, $B_k^{(i)} = S_k^{(i)}$, $C_k^{(i)} = \alpha_k^{(i)}$, для получения коэффициентов $E_{2,k}^{(r,i)}$ — $A_k^{(i)} = E_{2,k}^{(r,i)}$, $B_k^{(i)} = S_k^{(i)}$, $C_k^{(i)} = F_{2,k}^{(i,r)}$, а для получения коэффициентов $E_{3,k}^{(r,i)}$ — $A_k^{(i)} = E_{3,k}^{(r,i)}$, $B_k^{(i)} = S_k^{(i)}$, $C_k^{(i)} = \beta_k^{(i)}$.

Для компоненты напряженности электрического поля $E_p^{(z)}$ все делается аналогично предыдущему.

Таким образом, в результате применения метода аналитической замены удалось и на втором этапе решения уравнения Лапласа свести все вычисления к вычислениям табличных интегралов.

4. ТЕСТОВЫЕ ПРИМЕРЫ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В качестве тестовых примеров использовались некоторые конфигурации электродов, для которых существуют теоретические выражения для потенциала и компонент напряженности электрического поля: плоский конденсатор, цилиндрический конденсатор, сферический конденсатор, гиперболический конденсатор. Были получены примерно одинаковые по точности результаты. Ниже приведены результаты расчета потенциала и компонент напряженности электрического поля в сферическом конденсаторе (см. таблицу).

Рассчитывалось поле в сферическом конденсаторе с обкладками 0.1 и 0.2 м. На внутреннюю обкладку подавался нулевой потенциал, а на внешнюю потенциал в 1.0 В. Все результаты вычислялись на радиусе, проведенном под углом $\pi/5$ к оси. Если внутреннюю и внешнюю обкладки поделить на отрезки дуги окружности в $\pi/2$ (такое разделение не приветствуется в программах, использующих метод интегральных уравнений в решении уравнения Лапласа), то в результате получается электростатическое поле (потенциал и компоненты напряженности электростатического поля) с относительной точностью не хуже 10^{-6} . Мы эти результаты не приводим.

Более интересен случай, когда внутренняя и внешняя обкладки делятся на отрезки дуги окружности в $\pi/4$. Результаты этих расчетов приведены в таблице. В этой таблице напротив каждого радиуса расположены три строки. В верхней приведены теоретические значения, в средней — значения, полученные при расчете с условием расположения на каждом отрезке границы 11 точек коллокации, а в нижней — когда точек коллокации 21.

Для первой и последней точек вдоль радиуса произведено смещение внутрь конденсатора на 10^{-8} м, чтобы избежать расположения этих точек вне конденсатора.

Электростатическое поле в сферическом конденсаторе

N	R	Potencial	E_x	E_y
1	0.10000	0.000000200	-16.18035403	-11.75577500
		0.0000005959	-16.18033956	-11.75570481
		0.0000000416	-16.18034148	-11.75571438
2	0.11000	0.1818181818	-13.37218173	-9.71545872
		0.1818181883	-13.37218132	-9.71545842
		0.1818181839	-13.37218172	-9.71545862
3	0.12000	0.3333333333	-11.23634714	-8.16368406
		0.3333333380	-11.23634702	-8.16368394
		0.3333333359	-11.23634720	-8.16368406
4	0.13000	0.4615384615	-9.57416561	-6.95603849
		0.4615384643	-9.57416551	-6.95603839
		0.4615384638	-9.57416560	-6.95603847
5	0.14000	0.5714285714	-8.25527545	-5.99780870
		0.5714285709	-8.25527534	-5.99780861
		0.5714285714	-8.25527542	-5.99780866
6	0.15000	0.6666666667	-7.19126217	-5.22475780
		0.6666666633	-7.19126208	-5.22475772
		0.6666666647	-7.19126215	-5.22475777
7	0.16000	0.7500000000	-6.32044527	-4.59207228
		0.7499999955	-6.32044518	-4.59207223
		0.7499999980	-6.32044528	-4.59207229
8	0.17000	0.8235294118	-5.59873353	-4.06771801
		0.8235294068	-5.59873344	-4.06771793
		0.8235294107	-5.59873356	-4.06771805
9	0.18000	0.8888888889	-4.99393206	-3.62830403
		0.8888888831	-4.99393190	-3.62830385
		0.8888888880	-4.99393205	-3.62830402
10	0.19000	0.9473684211	-4.48208861	-3.25642799
		0.9473684120	-4.48208805	-3.25642778
		0.9473684197	-4.48208846	-3.25642799
11	0.20000	0.9999999500	-4.04508538	-2.93892656
		0.9999993737	-4.04507540	-2.93888938
		0.9999999282	-4.04508424	-2.93892156

Заметим, что с помощью некоторых дополнительных процедур точность вычисления электростатического поля можно улучшить еще на два порядка, но это выходит за рамки данной работы и, по-видимому, явится предметом отдельной статьи.

В данной работе не рассматривались вопросы, связанные с близостью ТН и ТИ к оси системы. Эти вопросы также вынесены за рамки данной статьи и будут отражены в отдельной статье.

Приведенный в данной работе алгоритм был реализован в виде программ, включенных в очередную версию пакета прикладных программ "Shift" [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. М., 1966. 400 с.
2. *Крылов В.И., Шульгина Л.Т.* Справочная книга

- по численному интегрированию. М.: Наука, 1976. 370 с.
3. *Фрейкман Б.Г.* Вычисление электростатического поля вблизи заряженной поверхности // ЖТФ. № 11. С. 2464–2472.
 4. *Шевченко С.И.* Алгоритм получения предельной точности в электростатических расчетах элементов электронно- и ионно-оптических приборов, имеющих плоскую симметрию // Научное приборостроение. 1997. Т. 7, № 1-2. С. 45–53.
 5. *Шевченко С.И.* Алгоритм получения высокой точности в расчетах аксиально-симметричных электростатических полей // Научное приборостроение. 2002. Т. 12, № 1. С. 40–45.
 6. *Канторович Л.В.* О приближенном вычислении некоторых типов определенных интегралов и других применениях метода выделения особенностей // Математический сборник. 1934. Т. 41, № 2. С. 235–244.
 7. *Иванов В.Я.* Методы автоматизированного проектирования приборов электроники. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1986. 193 с.
 8. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: "Наука", 1976. 248 с.
 9. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: "Наука", 1973. 228 с.
 10. *Шевченко С.И.* Пакет прикладных программ "Shift" для решения уравнений Лапласа и Пуассона // Материалы Всес. семинара "Методы расчета электронно-оптических систем". Алма-Ата, 1992. С. 11.

*Институт аналитического приборостроения РАН,
Санкт-Петербург*

Материал поступил в редакцию 6.10.2008.

THE ANALYTICAL REPLACEMENT METHOD IN AXIAL ELECTROSTATIC FIELD CALCULATION

S. I. Shevchenko

Institute for Analytical Instrumentation RAS, Saint-Petersburg

This paper presents the algorithm Laplace equation solving by boundary integral equation method where the integral is transformed into matrix equation by collocation, analytical replacement, and analytical integration. The matrix equation is solved by Gausse method.

Keywords: electric field potential, Laplace equation, boundary integral equations method, collocation method, method of analytical replacement.