ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2008, том 18, № 3, с. 63–66

ОБЗОРЫ, СИСТЕМАТИЗАЦИИ, ОБОБЩЕНИЯ

УДК 534.29; 534.138

© Б. П. Шарфарец

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАДИАЦИОННОГО ДАВЛЕНИЯ НА РАССЕИВАТЕЛЬ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ АМПЛИТУДОЙ РАССЕЯНИЯ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОЛЯ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В работе получены выражения для сил радиационного давления на частицу, характеризующуюся произвольной амплитудой рассеяния, в произвольном падающем в идеальной жидкости поле. С помощью использования точечного мультипольного источника, создающего поле рассеяния, эквивалентное реальному, удается получить компактные выражения для сил радиационного давления. Полученные результаты весьма полезны для задач о жидкостных включениях с непростыми амплитудами рассеяния. Полученные выражения исчерпывают все возможные случаи полей и рассеивателей.

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Вопросам коагуляции различных частиц в ультразвуковом поле по-прежнему уделяется большое внимание. Актуальным в этом круге проблем является расчет радиационного давления на сложные конгломераты связанных между собой вследствие, например, процессов агглютинации, частиц. Ранее в работе [1] рассматривались выражения для сил радиационного давления на сложные конгломераты частиц в поле плоской бегущей и стоячей волн. В этом случае силы оказались зависимыми только от зональных гармоник в разложении амплитуды рассеяния препятствия по сферическим функциям. Поэтому не возникала необходимость рассмотрения общих выражений, связывающих силы радиационного давления со всеми коэффициентами в разложении амплитуды рассеяния препятствия по сферическим функциям. В настоящей работе полученные в [1] выражения обобщаются на произвольное падающее в идеальной жидкости поле и произвольную амплитуду рассеяния препятствия.

Пусть амплитуда рассеяния препятствия $f(\theta,\varphi)$ известна. Необходимо по аналогии с работой [1] выразить компоненты силы радиационного давления через характеристики амплитуды рассеяния, но уже не в плоской волне, а произвольной по форме волне в идеальной жидкости.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Поле в волновой зоне рассеивателя (источника) имеет вид

$$p(r,\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi)\frac{e^{ikr}}{r} + O\left(\frac{1}{kr^2}\right). \tag{1}$$

Здесь (r,θ,φ) — сферические координаты точки наблюдения; p — полевая характеристика акустического поля, например давление; k — волновое число.

Согласно работе [2], всякая дважды непрерывно дифференцируемая по своим аргументам θ, φ функция $f(\theta,\varphi)$ может быть разложена в ряд Фурье по системе сферических функций $Y_l^m(\theta,\varphi)$

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = \begin{cases} P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi, & m = 0,1,...,l; \\ P_l^{|m|}(\cos\theta)\sin|m|\varphi, & m = -1,-2,...,-l, \end{cases} \tag{2}$$

а именно

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\Bigg[A_l^0 P_l(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{l}\left[A_l^m\cos m\varphi + B_l^m \sin m\varphi\right]P_l^m(\cos\theta)\Bigg], \tag{3}$$

где коэффициенты определяются так:

$$\begin{Bmatrix} A_l^m \\ B_l^m \end{Bmatrix} = \frac{2l+1}{2\pi(1+\delta_{0m})}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\times \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi)P_l^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi, \tag{4}$$

P_l^m — присоединенные полиномы Лежандра. Согласно, например, [3], амплитуда рассеяния удовлетворяет условиям разложимости в ряд (2).

Известно [4], что вне рассеивателя совершенно идентичное поле (1) может быть создано системой мультиполей, сосредоточенных в одной точке внутри рассеивателя. Свяжем эту систему мультиполей с амплитудой рассеяния. Для этого будем почленно дифференцировать уравнение

$$\left(\Delta+k^2\right)\frac{e^{ikr}}{4\pi r}=-\delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

с помощью оператора $D^{|\alpha|}=\left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}},\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial y^{\alpha_2}},\frac{\partial^{\alpha_3}}{\partial z^{\alpha_3}}\right)$, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, α_i — натуральные числа.

Имеем:

$$\begin{aligned}&\left(\Delta+k^2\right)D^{|\alpha|}\left(\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\right)=\\&=-D^{|\alpha|}\left(\delta(x)\delta(y)\delta(z)\right)=\\&=-\delta^{(\alpha_1)}(x)\delta^{(\alpha_2)}(y)\delta^{(\alpha_3)}(z).\end{aligned}\tag{5}$$

Здесь $-\delta^{|\alpha|}(\mathbf{x})=-\delta^{(\alpha_1)}(x)\delta^{(\alpha_2)}(y)\delta^{(\alpha_3)}(z)$ — мультиполь порядка $|\alpha|$, сосредоточенный в начале координат. В получившемся решении $D^{|\alpha|}\left(\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\right)$ удерживаем только слагаемые с порядком $O(r^{-1})$. Тогда, очевидно, дифференцировать нужно только числитель. Введем обозначение

$$\begin{aligned}&P(r,\theta,\varphi)=\frac{D^{|\alpha|}\left(e^{ikr}\right)}{4\pi r}=\\&=\left(ik\right)^{|\alpha|}\left(\sin\theta\cos\varphi\right)^{\alpha_1}\left(\sin\theta\sin\varphi\right)^{\alpha_2}\cos^{\alpha_3}\theta\frac{e^{ikr}}{4\pi r}.\end{aligned}$$

Таким образом, мультиполь из (5) создает дальнее поле с амплитудой рассеяния

$$\begin{aligned}&f^{|\alpha|}(\theta,\varphi)=\\&=\frac{\left(ik\right)^{|\alpha|}\left(\sin\theta\cos\varphi\right)^{\alpha_1}\left(\sin\theta\sin\varphi\right)^{\alpha_2}\cos^{\alpha_3}\theta}{4\pi},\end{aligned}$$

а мультиполь

$$-4\pi\frac{1}{\left(ik\right)^{|\alpha|}}\delta^{(\alpha_1)}(x)\delta^{(\alpha_2)}(y)\delta^{(\alpha_3)}(z)\tag{6}$$

соответствует амплитуде рассеяния

$$f^{|\alpha|}(\theta,\varphi)=\left(\sin\theta\cos\varphi\right)^{\alpha_1}\left(\sin\theta\sin\varphi\right)^{\alpha_2}\cos^{\alpha_3}\theta.\tag{7}$$

Таким образом, если амплитуда рассеяния представляет собой ряд по степеням α_i углов $\cos\theta_1=\sin\theta\cos\varphi$, $\cos\theta_2=\sin\theta\sin\varphi$ и $\cos\theta_3=\cos\theta$ вида (7), то это отвечает соответствующему ряду мультипольных источников вида (6).

В работе [1] приведен мультипольный источник, создающий азимутально-симметричное поле с амплитудой рассеяния

$$f(\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l^{\,0}P_l(\cos\theta),\tag{8}$$

и имеющий вид

$$\begin{aligned}&\delta_{f(\theta)}=-4\pi\times\\&\times\sum_{l=0}^{\infty}\left\{A_l^{\,0}\sum_{n=0}^{[l/2]}(-1)^n\frac{(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}\left(\frac{1}{ik}D_z\right)^{l-2n}\right\}\times\\&\times\delta(x)\delta(y)\delta(z).\end{aligned}\tag{9}$$

Внутренняя сумма в (9) равна $P_l\left(\frac{D_z}{ik}\right)$; $D_z=\partial/\partial z$; $[\ldots]$ означает взятие целой части числа; P_l — полиномы Лежандра. Попутно полезно привести тождество

$$\sum_{n=0}^{[l/2]}(-1)^n\frac{(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}\equiv 1,$$

следующее из свойства полиномов Лежандра $P_l(1)=1$, $l=0,1,2,\ldots$ и оказывающееся полезным при расчетах радиационного давления, например, в случае плоских первичных волн.

Получим выражение для мультипольного источника $\delta_{f(\theta,\varphi)}$, создающего поле с амплитудой рассеяния $f(\theta,\varphi)$, из (3). Для этого, в частности, понадобится тождество [2]

$$P_l^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x),\tag{10}$$

или для $x=\cos\theta$

$$P_l^m(\cos\theta)=\sin^m\theta\frac{\mathrm{d}^m}{(\mathrm{d}\cos\theta)^m}P_l(\cos\theta).\tag{10a}$$

Искомое выражение для мультипольного источника $\delta_{f(\theta,\varphi)}$ получим, следуя технике разложения мультипольных полей (подчеркнем: <u>полей</u>, а не источников), изложенной в [5, 6]. Сначала применим к e^{ikr} дифференциальный оператор

$$\left[\frac{1}{ik}\left(D_x+iD_y\right)\right]^m e^{ikr}=\sin^m\theta e^{im\varphi}e^{ikr}=$$

$$= \sin^m \theta(\cos m\varphi + i \sin m\varphi) e^{ikr}, \qquad (11)$$

где $D_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $D_y = \dfrac{\partial}{\partial y}$.

Основываясь на выражениях (3), (6), (7), (10), (11), можно записать окончательное выражение для мультипольного источника $\delta_{f(\theta,\varphi)}$, обеспечивающего поле с амплитудой рассеяния $f(\theta,\varphi)$ из (3):

$$\delta_{f(\theta,\varphi)} = -4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ A_l^0 P_l\left(\frac{1}{ik} D_z\right) + \right.$$
$$+ \sum_{m=1}^{l} \left(\frac{1}{ik}\right)^m \left(A_l^m \operatorname{Re}\left[\left(D_x + iD_y\right)^m\right] + \right.$$
$$\left.\left. + B_l^m \operatorname{Im}\left[\left(D_x + iD_y\right)^m\right]\right) \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}u^m} P_l(u) \right|_{u=\frac{1}{ik}D_z} \Bigg\} \times$$
$$\times \delta(x)\delta(y)\delta(z). \qquad (12)$$

Так, в качестве примера дифоператор при A_1^1 равен $\dfrac{1}{ik} D_x$, при B_1^1 — $\dfrac{1}{ik} D_y$. Остальные компоненты в (12) также вычисляются тривиально. Из (12) в случае азимутальной симметрии непосредственно следует (9).

Таким образом, решением уравнения

$$\left(\Delta + k^2\right) p(\mathbf{x}) = \delta_{f(\theta,\varphi)}(\mathbf{x}) \qquad (13)$$

будет поле давления $p(\mathbf{x})$ с асимптотикой (1), характеризующейся угловым распределением $f(\theta,\varphi)$ из (3), где $\delta_{f(\theta,\varphi)}(\mathbf{x})$ — мультипольный источник, определяемый выражением (12).

Полученное выражение (12) для общего случая амплитуды рассеяния и его частный случай азимутальной симметрии (9) могут быть использованы для вычисления радиационного давления на произвольном рассеивателе в произвольном же первичном поле [1, 7]. Так, i-я составляющая перекрестной компоненты радиационного давления определяется выражением [1]

$$\overline{F_i}^{(is)} = \frac{-1}{4\rho\omega^2} \times$$
$$\times \int_V \left(\frac{\partial p_{inc}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \left(\Delta + k^2\right) p_s^*(\mathbf{x}) + \text{к.с.} \right) \mathrm{d}V. \qquad (14)$$

Здесь $p_{inc}(\mathbf{x})$, $p_s(\mathbf{x})$ — давления падающего и рассеянного полей; звездочка означает комплексное сопряжение; $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$; ρ — плотность среды, ω — круговая частота. В (14) в качестве $p_s(\mathbf{x})$ следует использовать решение $p(\mathbf{x})$ уравнения (13). С учетом этого, а также (12) выражение (14) перепишется в виде

$$\overline{F_i}^{(is)} = \frac{-1}{4\rho\omega^2} \int_V \left(\frac{\partial p_{inc}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \left(\delta_{f(\theta,\varphi)}(\mathbf{x})\right)^* + \text{к.с.} \right) \mathrm{d}V =$$
$$= \frac{\pi}{\rho\omega^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \left(A_l^0\right)^* P_l\left(\frac{-1i}{k} D_z\right) + \right.$$
$$+ \sum_{m=1}^{l} \left(\frac{-1i}{k}\right)^m \left(\left(A_l^m\right)^* \operatorname{Re}\left[\left(D_x + iD_y\right)^m\right] + \right.$$
$$\left.\left. + \left(B_l^m\right)^* \operatorname{Im}\left[\left(D_x + iD_y\right)^m\right]\right) \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}u^m} P_l(u) \right|_{u=\frac{-1i}{k}D_z} \Bigg\} \times$$
$$\times \left. \frac{\partial p_{inc}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|_{x=0} + \text{к.с.} \qquad (15)$$

Стоящий слева в (15) дифференциальный оператор воздействует на функцию $\dfrac{\partial p_{inc}(\mathbf{x})}{\partial x_i}$, после чего получившаяся функция рассматривается в точке $\mathbf{x} = 0$.

Соответствующая составляющая квадратичной компоненты равна [1]

$$\overline{F_i}^{(ss)} = -\frac{1}{2\rho c^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(\theta,\varphi) \right|^2 \cos\theta_i \sin\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta. \qquad (16)$$

Углы θ_i, $i = 1, 2, 3$ описаны выше, $f(\theta,\varphi)$ определяется из (3).

Выражение (16) выразить в простой форме через коэффициенты A_l^m и B_l^m в отличие от случая азимутальной симметрии не удается, однако его вычисление тривиально.

ВЫВОДЫ

Таким образом, с помощью использования точечного мультипольного источника, создающего поле рассеяния, эквивалентное реальному, удалось получить компактные выражения для расчета сил радиационного давления в произвольном падающем поле.

Настоящая работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, грант № 05-03-33108, и целевой научно-технической программы Российской Федерации "Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2012 годы", лот 2, шифр "2007-2-2.2-04-08".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Курочкин В.Е., Шарфарец Б.П.* Связь радиационного давления с амплитудой рассеяния сложных включений в идеальной жидкости // ДАН, Физика. 2008. Т. 419, № 3. С. 324–327.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972. 736 с.
3. *Шарфарец Б.П.* О необходимом условии, при котором решение однородного уравнения Гельмгольца удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда // Научное приборостроение. 2008. Т. 18. № 1. С. 56–59.
4. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960. 860 с.
5. *Erdelyi A.* Zur Theory der Kugelwellen // Physica. 1937. N 4. P. 107–120.
6. *Devaney A.J., Wolf E.* Multipole Expansions and Plane Wave Representations of the Electromagnetic Field // J. Math. Phys. 1974. V. 15. N 2. P. 235–244.
7. *Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е., Князьков Н.Н.* Радиационное давление в произвольном падающем поле. Связь с амплитудой рассеяния включения // ДАН. 2008. Т. 421, № 2. С. 186–189.

Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург

Материал поступил в редакцию 3.06.2008.

EVALUATION OF RADIATIVE PRESSURE ON THE SCATTERER WITH ARBITRARY SCATTERING AMPLITUDE AT ARBITRARY FIELD ACTION IN IDEAL FLUID

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation RAS, Saint-Petersburg

The work presents expressions for forces of radiative pressure on a particle characterized by arbitrary scattering amplitude, in arbitrary field falling in ideal fluid. Using dot multipole source creating a leakage field, equivalent to real, it is possible to get compact expressions for radiative pressure forces. The effects obtained are rather useful for problems concerning liquid inclusions with complex scattering amplitudes. The obtained expressions cover all possible field and scatterer cases.