ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2008, том 18, № 3, с. 80–85

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК 534.29; 534.138

© Б. П. Шарфарец

К ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛЕНИИ РАДИАЦИОННОГО ДАВЛЕНИЯ НА СФЕРИЧЕСКИХ ВКЛЮЧЕНИЯХ

В работе сравниваются различные подходы к оценке радиационного давления на сферических включениях произвольного радиуса в плоской бегущей, стоячей и квазистоячей волнах. Показано, что разработанный ранее метод оценки радиационного давления для общего случая включений с заданной характеристикой — амплитудой рассеяния — полностью совпадает с частными методами, разработанными специально для сферических включений.

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Пожалуй, максимальное число работ, по расчету радиационного давления на включения посвящено сферическим включениям. Работы [1–6] — лишь некоторые, в которых точно решается задача для жидкой или упругой (в том числе и абсолютно мягкой или твердой) сферы произвольного радиуса. Методы решения этой проблемы носят частный, приспособленный к геометрии задачи и виду падающего (осесимметричного) поля, характер. Так, в работах [1, 2] просто решается краевая задача методом, восходящим к Рэлею. В работах [3–5] решение представляется в упрощенном по сравнению с [1, 2] виде через коэффициенты возбуждения парциальных сферических волн в представлении ближнего поля рассеяния. Наконец, в работе [6] показано, что рассмотрение дальнего поля рассеяния приводит к тем же выражениям, что и в [3–5].

Ранее в работах [7, 8] были получены выражения, связывающие радиационное давление на сложные включения с произвольной амплитудой рассеяния в произвольном падающем поле. Поэтому представляется полезным сравнить соответствующие частные случаи общих выражений из [7, 8] с выражениями, полученными в работах [1–6].

Для расчета радиационного давления на включения, согласно идеологии [7, 8], необходимо уметь оценивать амплитуды рассеяния этих частиц, поскольку при оценке сил радиационного давления в идеальной жидкости именно эта характеристика, а не физические свойства включения является существенной. В большинстве публикаций на эту тему полагается, что частицы представляют собой жидкие частицы со свойствами, отличными от окружающей жидкости. Однако рассеянию и на упругих телах посвящено значительное число публикаций. Впервые решение этой проблемы для упругих бесконечного цилиндра и сферы было найдено в работе [9]. Затем в работе [10] было предложено уточнение выражений работы [9] для поля рассеяния на упругой сфере, а далее к этой проблеме возвращались неоднократно многие авторы (см. обзоры литературы в работах [11, 12]), в том числе и в связи с вопросами резонансного рассеяния на упругих телах [11].

Следует отметить, что особенно в случае упругой сферы выражения для поля рассеяния, будучи достаточно громоздкими, представлены в крайне разнообразной нотации с множеством различающихся обозначений и видов решения. Так, в работе [9] решение представлено по аналогии с работой [13] через введение многочисленных углов. Примерно так же поступил автор работы [10]. В работах [11, 12, 14] решение выражено через некие определители. В работах [11, 15] решение дано в квантовомеханической нотации, заключающейся в том, что парциальные коэффициенты в разложении поля рассеяния по сферическим функциям выражены в виде, явно отражающем закон сохранения энергии в парциальных слагаемых представления суммарного поля по сферическим гармоникам [15].

Целью настоящей работы является тестирование общих выражений работ [7, 8] применительно к случаю произвольного сферического включения путем сравнения с уже полученными ранее выражениями на примере жидкой и упругой сфер.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Запишем известные выражения для падающего и рассеянного полей. Так, выражение для плоской волны единичной амплитуды и нулевой фазы, распространяющейся вдоль положительного направления оси Oz при временно́м факторе $e^{-i\omega t}$, имеет вид [13]

$$p_i = e^{ikz} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta)\,. \quad (1)$$

Выражение для поля рассеянной волны при падении волны (1) на рассеиватель с центром в начале координат имеет вид [11, 15]:

$$p_s = \sum_{l=0}^{\infty} T_l(2l+1)i^l h_l^1(kr)P_l(\cos\theta) = \\ = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}(e^{2i\delta_l}-1)(2l+1)i^l h_l^1(kr)P_l(\cos\theta). \quad (2)$$

Здесь

$$(e^{2i\delta_l}-1) = 2T_l = \alpha_l\,; \quad (3)$$

α_l, δ_l, T_l — некоторые функции волнового параметра $x = ka$; a — радиус сферы; $k = \omega/c$; c — скорость в жидкости; j_l и h_l^1 — соответственно сферические функции Бесселя и Ханкеля первого рода; (r,θ,φ) — сферические координаты.

Выражение для амплитуды рассеяния получается из (2) подстановкой асимптотики функции Ханкеля $h_l^1(z) \sim \frac{1}{z} i^{-l-1}e^{iz}$ при $z \to \infty$ и вычленением множителя $\frac{e^{ikr}}{r}$ [11]. Имеем окончательно:

$$f(\theta,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{ik}\sum\limits_{l=0}^{\infty} T_l(x)(2l+1)P_l(\cos\theta), \\ \dfrac{a}{ix}\sum\limits_{l=0}^{\infty} T_l(x)(2l+1)P_l(\cos\theta); \end{cases}$$

или

$$f(\theta,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2ik}\sum\limits_{l=0}^{\infty} \alpha_l(x)(2l+1)P_l(\cos\theta), \\ \dfrac{a}{2ix}\sum\limits_{l=0}^{\infty} \alpha_l(x)(2l+1)P_l(\cos\theta); \end{cases}$$

или

$$f(\theta,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2ik}\sum\limits_{l=0}^{\infty} (e^{2i\delta_l(x)}-1)(2l+1)P_l(\cos\theta), \\ \dfrac{a}{2ix}\sum\limits_{l=0}^{\infty} (e^{2i\delta_l(x)}-1)(2l+1)P_l(\cos\theta). \end{cases} \quad (4)$$

Первые выражения в каждой строке (4) удобны при расчетах для фиксированной частоты, вторые — при фиксированном радиусе сферы. Поскольку в работах [3–6] рассматривается случай фиксированного радиуса сферы a, то далее будем придерживаться именно этого случая.

В наиболее удобном, по мнению автора, виде выражение для коэффициентов T_l приведено в работе [3]:

$$T_l(x) = -\frac{F_l j_l(x) - x j_l{}'(x)}{F_l h_l^1(x) - x h_l^1{}'(x)}\,, \quad (5)$$

где коэффициенты F_l:

$$F_l(x) = \frac{1}{2}\frac{\rho}{\rho_1}x_2^2 \times \\ \times\left[\frac{x_1 j_l{}'(x_1)}{x_1 j_l{}'(x_1) - j_l(x_1)} - \frac{2(l^2+l)j_l(x_2)}{(l^2+l-2)j_l(x_2) + x_2^2 j_l{}''(x_2)}\right] \times \\ \times 1\Bigg/\left[\frac{x_1^2\left(\left(\sigma/(1-2\sigma)\right)j_l(x_1) - j_l{}''(x_1)\right)}{x_1 j_l{}'(x_1) - j_l(x_1)} - \right. \\ \left. - \frac{2(l^2+l)\left(j_l(x_2) - x_2 j_l{}'(x_2)\right)}{(l^2+l-2)j_l(x_2) + x_2^2 j_l{}''(x_2)}\right]. \quad (6)$$

Штрих в (6) означает дифференцирование по аргументу x; $\sigma = \frac{1}{2}\left[\frac{c_1^2 - 2c_2^2}{c_1^2 - c_2^2}\right]$ — коэффициент Пуассона материала сферы; c_1, c_2 — скорость продольной и поперечной волн в сфере соответственно; ρ_1 — плотность шара; ρ, c — акустические параметры среды; $x_1 = k_1 a$, $x_2 = k_2 a$, $k_i = \omega/c_i$, $i = 1,2$. Отметим, что выражение (6) получено независимо в работах [3, 10]. В работе [9] в выражении (6) допущена описка, отмеченная автором работы [10]. Отметим, что выражение (6) сводится к случаю жидкой сферы при стремлении к нулю сдвиговой скорости c_2.

В системах без потерь коэффициенты F_l действительны [11], и в этом случае справедливо равенство [15]

$$\left|e^{2i\delta_l}\right| = \left|1+\alpha_l\right| = \left|-\frac{F_l h_l^2(x) - x h_l^2{}'(x)}{F_l h_l^1(x) - x h_l^1{}'(x)}\right| = 1\,, \quad (7)$$

откуда следует, что функции $\delta_l(x)$ являются действительнозначными, т. е.

$$\left|e^{2i\delta_l}\right| = 1\,. \quad (7а)$$

Вводя обозначения

$$A_l^0(x) = \frac{a}{ix} T_l(x)(2l+1) = \frac{a}{2ix} \alpha_l(x)(2l+1) =$$
$$= \frac{a}{2ix}(e^{2i\delta_l(x)} - 1)(2l+1), \tag{8}$$

запишем (4) окончательно в виде разложения функции $f(\theta)$ по сферическим функциям:

$$f(\theta, x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l^0(x) P_l(\cos\theta). \tag{9}$$

Исходя из (7), (8), легко оценить поведение функций $A_l^0(x)$:

$$\mathrm{Re}\left(A_l^0(x)\right) = \frac{a}{2x}(2l+1)\sin 2\delta_l(x),$$
$$\mathrm{Im}\left(A_l^0(x)\right) = \frac{a}{2x}(2l+1)\left(1 - \cos 2\delta_l(x)\right).$$

Отсюда имеем граничные оценки для действительной и мнимой составляющих зональных коэффициентов разложения амплитуды рассеяния по сферическим функциям

$$-\frac{a}{2x}(2l+1) \le \mathrm{Re}\left(A_l^0(x)\right) \le \frac{a}{2x}(2l+1),$$
$$0 \le \mathrm{Im}\left(A_l^0(x)\right) \le \frac{a}{2x}(2l+1). \tag{10}$$

Далее свяжем с помощью (8) действительные и мнимые составляющие функций A_l^0 с соответствующими составляющими функций $T_l(x) = a_l(x) + ib_l(x)$:

$$\mathrm{Re}\, A_l^0 = a\frac{2l+1}{x} b_l,$$
$$\mathrm{Im}\, A_l^0 = -a\frac{2l+1}{x} a_l. \tag{11}$$

Сравнивая с гармоническим рядом сходящийся ряд (4) и учитывая свойство $\left|P_l(\cos\theta)\right| \le 1$ при $\theta \in [0, \pi]$, получаем завышенную оценку для $\left|T_l(x)\right|$:

$$\left|T_l(x)\right| < \frac{1}{2l^2 + l}, \quad l \to \infty. \tag{12}$$

Такая же оценка верна и для ее составляющих:

$$\left|a_l(x)\right| < \frac{1}{2l^2 + l}, \quad \left|b_l(x)\right| < \frac{1}{2l^2 + l}, \quad l \to \infty. \tag{12а}$$

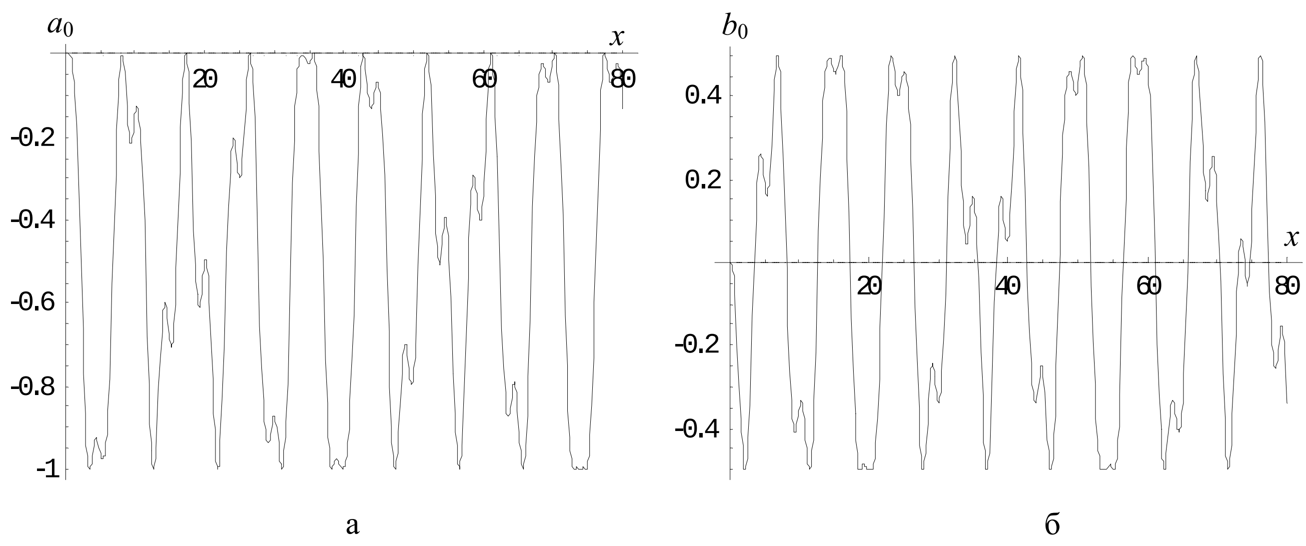
Из (8) и (12) следует оценка

$$\left|A_l^0(x)\right| = a\frac{2l+1}{x}\left|T_l(x)\right| < \frac{a}{x} l^{-1}, \quad l \to \infty. \tag{13}$$

Отсюда следуют оценки для составляющих функций $A_l^0(x)$, аналогичные (12а).

Ниже приведены примеры расчета зависимостей $a_l(x)$ и $b_l(x)$ для жидкой сферы для некоторых l. Параметры таковы:

$c = 1500$ м/с, $c_1 = 2350$ м/с, $c_2 = 0$ м/с,
$\rho = 1000$ кг/м^3, $\rho_1 = 1200$ кг/м^3.



а б

Рис. 1. Зависимости составляющих функции $T_l(x) = a_l(x) + ib_l(x)$, $l = 0$, от x: a_0 (а), b_0 (б)

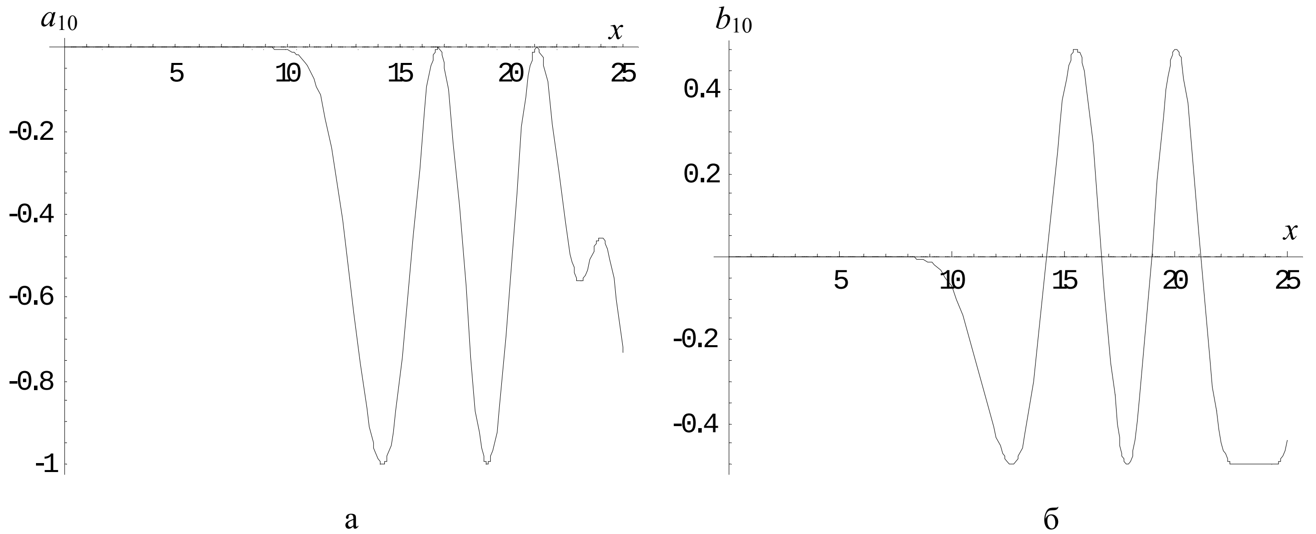


Рис. 2. Зависимости составляющих функции $T_l(x) = a_l(x) + ib_l(x)$, $l = 10$, от x: a_{10} (а), b_{10} (б)

Так, на рис. 1 представлены $a_0(x)$ и $b_0(x)$, на рис. 2 аналогично представлены $a_{10}(x)$ и $b_{10}(x)$. Общим в поведении функций является то, что по мере роста номера l, составляющие $a_l(x)$ и $b_l(x)$ начинают достигать существенных значений при все больших x. Это приводит к необходимости учета все большего количества мультиполей. В целом выполняется приближенное равенство между предельным значением x и необходимым числом учитываемых в расчете радиационного давления мультиполей.

В результате достаточно простых вычислений по методике работы [7] могут быть получены следующие выражения для радиационного давления на радиально-симметричное включение в поле плоской бегущей, стоячей и квазистоячей волн.

Плоская бегущая волна $p_0 e^{ikz}$. Радиационное давление для z-компоненты равно

$$\overline{F}_{z\,pr} = \frac{p_0^{\,2}}{2\rho c^2} 4\pi \times$$
$$\times\left(\frac{a}{x}\sum_{l=0}^{\infty}\operatorname{Im}(A_l^0) - \sum_{l=0}^{\infty}\frac{2(l+1)}{4l^2+8l+3}\operatorname{Re}\left(A_l^0\left(A_{l+1}^{\;0}\right)^*\right)\right). \quad (14)$$

Здесь $\overline{E} = \dfrac{p_0^{\,2}}{2\rho c^2}$ — средняя плотность энергии в бегущей волне.

Плоская стоячая волна $2p_0\cos k(z+h)$. Радиационное давление для z-компоненты равно

$$\overline{F}_{z\,st} = -2\left(\frac{p_0^{\,2}}{2\rho c^2}\right)\times$$
$$\times 4\pi\sin 2kh\left\{\frac{a}{x}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\operatorname{Re}\left(A_l^{\,0}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2(l+1)}{4l^2+8l+3}(-1)^l\operatorname{Im}\left(A_l^0\left(A_{l+1}^{\;0}\right)^*\right)\right\}. \quad (15)$$

Здесь $\overline{E}_{st} = \dfrac{p_0^{\,2}}{\rho c^2}$ — средняя плотность энергии в стоячей волне, а p_0 амплитуда давления в каждой бегущей друг навстречу другу волне.

Плоская квазистоячая волна (по терминологии работы [5]): $p_0\left(\varepsilon e^{ik(z+h)} + 2\eta\cos k(z+h)\right)$, ε и η — некоторые константы.

$$\overline{F}_{z\,qs} = -\overline{E}4\pi\left\{2\left(\eta^2+\eta\varepsilon\right)\sin 2kh\times\right.$$
$$\times\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2(l+1)}{4l^2+8l+3}(-1)^l\operatorname{Im}\left(A_l^0\left(A_{l+1}^{\;0}\right)^*\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{a}{x}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\operatorname{Re}\left(A_l^{\,0}\right)\right)+$$
$$+\left(\varepsilon^2+2\eta\varepsilon\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2(l+1)}{4l^2+8l+3}\operatorname{Re}\left(A_l^0\left(A_{l+1}^{\;0}\right)^*\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{a}{x}\sum_{l=0}^{\infty}\operatorname{Im}\left(A_l^{\,0}\right)\right)\right\}. \quad (16)$$

Остальные компоненты силы в (14)–(16) вследствие азимутальной симметрии равны нулю. Если теперь подставить в (14)–(16) вместо A_l^0 их выражения через a_l и b_l из (11) и учесть оценку (12а), то окажется, что эти выражения полностью совпадут с соответствующими выражениями в работах [3–6]. Выражение (16) при этом совпадет при условии $\varepsilon + \eta = 1$ Это условие необходимо для приводимости выражения $p_0\left(\varepsilon e^{ik(z+h)} + 2\eta\cos k(z+h)\right)$ к выражению, принятому в указанных работах.

ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе показано, что общие выражения, полученные в работах [7, 8], в случае сферического включения точно совпадают с полученными для этого случая другими авторами частными результатами.

Автор благодарит Е.Д. Макарову за полезные дискуссии, приведшие, как кажется автору, к улучшению содержания статьи.

Настоящая работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, грант № 05-03-33108 и целевой научно-технической программы Российской Федерации "Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2012 годы", лот 2, шифр 2007-2-2.2-04-08.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *King L.V.* On the Acoustic Radiation Pressure on Spheres // Proc. Roy. Soc. 1934. V. 147. P. 212–240.
2. *Yosioka K., Kavasima Y.* Acoustic Radiation Pressure on Compressible Sphere / /Acustica. 1955. V. 5. P. 167–173.
3. *Hasegawa T., Yosioka K.* Acoustic-Radiation Force on a Solid Elastic Sphere // J. Acoust. Soc. Am. 1969. V. 46, N 5. P. 1139–1143.
4. *Hasegawa T.* Comparison of Two Solutions for Acoustic Radiation Pressure on a Sphere // J. Acoust. Soc. Am. 1977. V. 61, N 6. P. 1445–1448.
5. *Hasegawa T.* Acoustic Radiation Force on a Sphere in Quasistationary Wave Field-Theory // J. Acoust. Soc. Am. 1979. V. 65, N 1. P. 32–40.
6. *Mitri F., Fellah Z.* New Expressions for the Radiation Force Function of Spherical Targets in Stationary and Quasi-Stationary Waves // Arch. Appl. Mech. 2007. V. 77. P. 1–9.
7. *Курочкин В.Е., Шарфарец Б.П.* Связь радиационного давления с амплитудой рассеяния сложных включений в идеальной жидкости // ДАН. 2008. Т. 419, № 3. С. 324–327.
8. *Шарфарец Б.П., Курочкин В.Е., Князьков Н.Н.* Радиационное давление в произвольном падающем поле. Связь с амплитудой рассеяния включения // ДАН. 2008. Т. 421, № 2. С. 186–189.
9. *Faran J.J.Jr.* Sound Scattering by Solid Cylinders and Spheres // J. Acoust. Soc. Am. 1951. V. 23, N 4. P. 405–418.
10. *Hicling R.* Analysis of Echoes from a Solid Elastic Sphere in Water // J. Acoust. Soc. Am. 1962. V. 34, N 10. P. 1582–1592.
11. *Flax L., Gaunaurd G. and Uberall H.* Theory of Resonance Scattering // Physical Acoustics. Principles and Methods. Volume XV. Academic Press: N. Y., 1985. P. 191–294.
12. *Hackman R.* Acoustic Scattering from Elastic Solids // Physical Acoustics. Underwater Scattering and Radiation. Volume XXII. Academic Press: N. Y., 1993. P. 1–194.
13. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. лит-ры. Т. 2. 1960. 860 с.
14. *Chena X., Apfel R.E.* Radiation Force on a Spherical Object in an Axisymmetric Wave Field and its Application to the Calibration of High-Frequency Transducers // J. Acoust. Soc. Am. 1996. V. 99, N 2. P. 713–724.
15. *Флюгге З.* Задачи по квантовой механике. Т. 1. М.: Мир, 1974. 341 с.

Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург

Материал поступил в редакцию 15.06.2008.

EVALUATION OF RADIATIVE PRESSURE ON SPHERICAL INSERTS

B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation RAS, Saint-Petersburg

Different approaches to evaluation of radiative pressure on spherical inserts of any radius in flat running, still and gauzy-still waves are compared. Previous method of evaluation of radiative pressure for a general case of inserts with the pre-set characteristics, a scattering amplitude, was shown to coincide with particular methods specially developed for spherical inserts.