

УДК 519.248: 681.5.001.3

Ã С. В. Соколов, П. А. Кучеренко

## СИНТЕЗ АЛГОРИТМА НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ НА ОСНОВЕ КРИТЕРИЯ МИНИМУМА ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ ОЦЕНИВАНИЯ

В работе показана актуальность исследования альтернативных (по отношению к традиционным) методов стохастической нелинейной параметрической идентификации. Впервые предложен синтез процедуры идентификации параметра дискретного наблюдателя с использованием критерия минимума вероятности ошибки оценивания. Рассмотрен модельный пример, иллюстрирующий эффективность предлагаемого подхода. Предложенный алгоритм, основанный на применении обобщенного вероятностного критерия, может быть использован в самых различных областях связи, управления, метрологии и т. д.

### ВВЕДЕНИЕ

Существующие методы решения задачи стохастической параметрической идентификации требуют, как правило, для своей удовлетворительной реализации принятия целого ряда крайне упрощающих ограничений (нормального вида распределения аддитивных помех наблюдаемых сигналов, линейности модели измерителя относительно параметров и т. д.). Это в большинстве реальных ситуаций оказывает значительное отрицательное влияние на качественные характеристики процедуры идентификации и, как следствие, снижает потенциально возможную точность получаемых оценок параметров [1–4].

В связи с вышеизложенным проведение исследований, направленных на синтез методов и алгоритмов, позволяющих в значительной (или полной) мере устранить недостатки традиционных методов, представляется весьма актуальным как с практической, так и с теоретической точек зрения.

Для решения данной задачи ниже рассмотрим подход, позволяющий, во-первых, избавиться от существующих ограничений разработанных методов, а во-вторых, повысить потенциальную точность процедуры идентификации за счет использования обобщенных вероятностных критериев, зависящих в общем случае нелинейно от апостериорной плотности распределения вектора состояния.

Для упрощения изложения синтеза процедуры идентификации и его наглядности остановимся подробнее на скалярном случае уравнений, определяющих в общем случае нелинейную модель исследуемого объекта и структуру его наблюдателя (обобщение на векторный случай, как это будет очевидно из последующих построений, особенностей не имеет).

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Пусть дискретный объект задан в самом общем случае нелинейным разностным уравнением

$$x_k = f(x_{k-1}, n), \quad (1)$$

где  $n$  — шум объекта с известной плотностью распределения вероятности  $q(n)$ ;  $x_k$  — переменная состояния в  $k$ -й момент времени;  $f$  — известная нелинейная функция, допускающая обращение.

Наблюдение переменных состояния в дискретном времени осуществляется измерителем, описываемым в общем случае также нелинейным уравнением (уравнением наблюдения) следующего вида:

$$z_k = c(c_k, x_k, w), \quad (2)$$

где  $c_k$  — неизвестный искомый параметр наблюдателя, в общем случае нестационарный;  $w$  — шум наблюдения с известной плотностью вероятности  $g(w)$ ;  $c$  — известная нелинейная функция наблюдения;  $z_k$  — дискретный отсчет сигнала наблюдения. Для сокращения дальнейшей записи набор дискретных отсчетов сигнала наблюдения  $z_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) обозначим через  $z_1^k$ .

В рассматриваемом общем нелинейном стохастическом случае задача идентификации неизвестного параметра  $c_k$  может быть сформулирована как задача нахождения его значения, удовлетворяющего некоторому вероятностному критерию оптимальности  $J$ .

Исходя из физического смысла поставленной задачи идентификации, в качестве критерия  $J$  ис-

пользуем далее критерий минимума апостериорной плотности вероятности (АПВ) текущей ошибки оценивания  $s_k$  переменных состояния объекта на выбранном интервале ее предельно допустимого изменения — от  $s_{\min}$  до  $s_{\max}$ , т. е.

$$\min_{c_k} J = \min_{c_k} \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} r(s_k | z_1^k) ds_k,$$

где  $s_k = x_k - \hat{x}_k$  — текущая ошибка оценивания;  $\hat{x}_k$  — текущая оценка переменной состояния объекта;  $r(s_k | z_1^k)$  — апостериорная плотность вероятности ошибки оценивания.

Учитывая линейную зависимость значений ошибки  $s_k$  и переменной состояния  $x_k$  ( $s_k = x_k - \hat{x}_k$ ), выразим АПВ ошибки оценивания  $r(s_k | z_1^k)$  через АПВ переменной состояния  $p(x_k | z_1^k; c_k)$  (выражение для которой будет получено ниже):

$$r(s_k | z_1^k) = p(s_k + \hat{x}_k | z_1^k; c_k).$$

В этом случае минимизацию критерия идентификации можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \min_{c_k} J &= \min_{c_k} \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} r(s_k | z_1^k) ds_k = \\ &= \min_{c_k} \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} p(s_k + \hat{x}_k | z_1^k; c_k) ds_k. \end{aligned} \quad (3)$$

В результате проделанных построений поставленная задача сводится к отысканию плотности  $p(s_k + \hat{x}_k | z_1^k; c_k)$  и последующему определению значения искомого параметра из условия минимума критериального выражения (3).

### СИНТЕЗ АЛГОРИТМА НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Для определения АПВ  $p(s_k + \hat{x}_k | z_1^k; c_k)$  предварительно используем выражение для АПВ  $p(x_k | z_1^k; c_k)$  с последующей соответствующей заменой переменных.

Известно [5], что апостериорная плотность вероятности информационного параметра  $x$  для  $k$ -го момента времени  $p(x_k | z_1^k; c_k)$  определяется выражением

$$p(x_k | z_1^k; c_k) = \frac{1}{h(c_k)} \times$$

$$\begin{aligned} &\times \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_{k-1} | z_1^{k-1}; c_{k-1}) \cdot p(x_k | x_{k-1}) dx_{k-1} \cdot p(z_k | x_k), \\ h(c_k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_{k-1} | z_1^{k-1}; c_{k-1}) \times \\ &\times p(x_k | x_{k-1}) dx_{k-1} \cdot p(z_k | x_k) dx_k, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$p(x_{k-1} | z_1^{k-1}; c_{k-1})$  — определенная на  $(k-1)$ -м шаге АПВ параметра состояния объекта;

$p(x_k | x_{k-1})$  — определяемая на текущем шаге алгоритма условная плотность вероятности переменной  $x_k$ ;

$p(z_k | x_k)$  — определяемая на текущем шаге алгоритма функция правдоподобия.

Условную плотность  $p(x_k | x_{k-1})$  определим из исходного уравнения объекта при известном виде плотности распределения вероятности значений шума  $q(n)$  (в предположении их взаимной статистической независимости) [6]:

$$p(x_k | x_{k-1}) = q(g(x_k, x_{k-1})) \cdot \left| \frac{\partial g(x_k, x_{k-1})}{\partial x_k} \right|,$$

где  $g(x_k, x_{k-1})$  — полученная в результате обратного преобразования  $f(x_{k-1}, n)$  однозначно определенная функция.

Аналогичным образом из уравнения наблюдения можно определить входящую в (4) функцию правдоподобия:

$$p(z_k | x_k) = g(y(z_k, c_k, x_k)) \cdot \left| \frac{\partial y(z_k, c_k, x_k)}{\partial z_k} \right|,$$

где  $y(z_k, c_k, x_k)$  — полученная путем обратного преобразования  $c(c, x_k, w)$  однозначно определенная функция.

Так как АПВ  $p(x_{k-1} | z_1^{k-1}; c_{k-1})$  в правой части равенства (4) является известной функцией (определенной на предыдущем шаге), рекуррентный алгоритм определения АПВ переменной состояния для  $k$ -го момента времени при наличии дискретных отсчетов сигнала наблюдения  $z_1^k$  принимает вид

$$p(x_k | z_1^k; c_k) = \frac{\Lambda(x_k, c_k)}{h^*(c_k)}, \quad (5)$$

где

$$\Lambda(x_k, c_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_{k-1} | z_1^{k-1}; c_{k-1}) \cdot q(g(x_k, x_{k-1})) \times$$

$$\times \left| \frac{\partial g(x_k, x_{k-1})}{\partial x_k} \right| dx_{k-1} \cdot g(y(z_k, c_k, x_k)) \cdot \left| \frac{\partial y(z_k, c_k, x_k)}{\partial z_k} \right|,$$

$$h^*(c_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(x_k, c_k) dx_k.$$

Производя соответствующую замену переменных в (5) и обозначив критериальное выражение через  $\Omega(c_k)$ , поиск минимума критерия (3) можно представить в следующем компактном виде:

$$\min_{c_k} J = \min_{c_k} \Omega(c_k), \quad (6)$$

где

$$\Omega(c_k) = \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} p(s_k + \hat{x}_k | z_1^k; c_k) ds_k = \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} \left( \frac{\Lambda(s_k + \hat{x}_k, c_k)}{h^*(c_k)} \right) ds_k.$$

Здесь важно отметить, что в общем случае решения поставленной задачи оценка переменной состояния  $\hat{x}_k$ , входящая в (6), представляет собой некоторый функционал (оператор)  $L$  от апостериорной плотности распределения переменной состояния, т. е.  $\hat{x}_k = L(p(x_k | z_1^k; c_k))$ , и, следовательно, в силу выражения (4), является нелинейной функцией от искомого параметра:  $\hat{x}_k = U(c_k)$ .

Тогда критериальное выражение в (6) окончательно можно представить в следующем обобщенном виде:

$$\Omega(c_k) = \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} \left( \frac{\Lambda(s_k + U(c), c_k)}{h^*(c_k)} \right) ds_k. \quad (7)$$

Идентификация параметра, удовлетворяющего выбранному критерию, предполагает минимизацию функции (7). Для этой цели в зависимости от конкретного вида получаемой функции  $\Omega(c_k)$  можно использовать известные и широко применяемые методы оптимизации: градиентный, метод Ньютона, метод сопряженных направлений, различные прямые методы и пр., выбор которых определяется особенностями исследуемого объекта и его наблюдателя.

### ПРИМЕР

Для иллюстрации эффективности использования предложенного подхода рассмотрим следующий пример. Стохастический дискретный объект задан разностным уравнением

$$x_k = x_{k-1} + n, \quad x_1 = 3,$$

где  $n$  — белый гауссовский шум с нулевым средним и дисперсией  $D_n = 0.01$ .

Наблюдение переменных состояния в дискретном времени осуществляется измерителем, описываемым уравнением

$$z_k = c \cdot x_k + w,$$

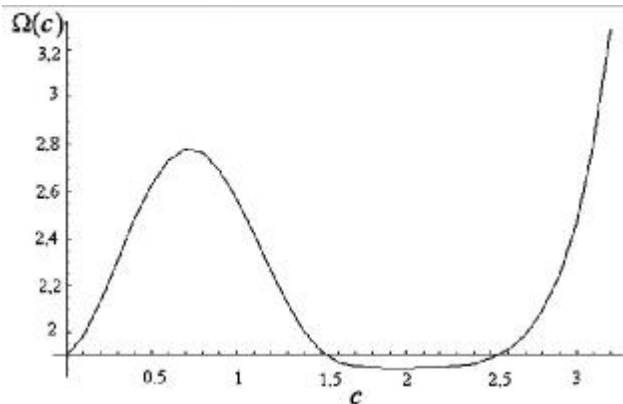
где  $c$  — неизвестный искомый параметр наблюдателя (для рассматриваемого далее модельного примера выберем исходное значение искомого параметра  $c = 2$  для всех  $k$ );  $w$  — белый гауссовский шум с нулевым средним и дисперсией  $D_w = 0.35$ .

Соответственно уравнение функции  $\Omega(c)$  для  $k$ -го шага алгоритма примет вид

$$\Omega(c) = \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} \left( \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x_{k-1} | z_1^{k-1}) \cdot \frac{1}{D_n \sqrt{2p}} e^{-\frac{(s_k + U(c) - x_{k-1})^2}{2D_n}} dx_{k-1} \cdot \frac{1}{D_w \sqrt{2p}} e^{-\frac{(z_k - c \cdot (s_k + U(c)))^2}{2D_w}}}{h^*(c)} \right) ds_k, \quad (8)$$

$$h^*(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_{k-1} | z_1^{k-1}) \cdot \frac{1}{D_n \sqrt{2p}} e^{-\frac{(s_k + U(c) - x_{k-1})^2}{2D_n}} dx_{k-1} \cdot \frac{1}{D_w \sqrt{2p}} e^{-\frac{(z_k - c \cdot (s_k + U(c)))^2}{2D_w}} dx_k.$$

Априорную плотность вероятности для первой итерации алгоритма ( $k = 2$ ) выберем нормальной с дисперсией  $D_0 = 1.5$  и математическим ожиданием 2.5. При этом интересно отметить, что отклонения среднего значения априорной плотности от начального значения переменной состояния не оказывают в дальнейшем существенного влияния на качество процедуры идентификации (алгоритм идентификации к ним устойчив).



Зависимость функции  $\Omega(c)$  от искомого параметра ( $k = 200$ ).

$\Omega(c)$  — критериальное выражение;  $c$  — искомый параметр наблюдателя;  $k$  — порядковый номер итерации алгоритма

Для определения текущего значения оценки переменной состояния объекта был использован оптимальный фильтр Калмана [5], который в рассматриваемом случае имеет вид

$$\hat{x}_k = U(c) = \hat{x}_{k-1} + K_k \cdot (z_k - c \cdot \hat{x}_{k-1}), \quad \hat{x}_1 = 2.5;$$

$$K_k = c \cdot \frac{R_k}{D_w}, \quad R_k = \left( \frac{1}{R_{k-1} + D_n} + \frac{c^2}{D_w} \right)^{-1}, \quad R_1 = 1.5.$$

Определение оценки искомого параметра  $c$  на очередном шаге алгоритма осуществлялось исходя из условия, определяемого выбранным критерием  $J$ , и предварительного задания границ допустимого интервала изменения текущей ошибки наблюдения ( $s_{\min} = -1.5$ ,  $s_{\max} = 1.5$ ), а также замены бесконечных пределов интегрирования по переменной состояния  $x$  на конечные значения, удовлетворяющие точностным требованиям к алгоритму оценки ( $x_{\min} = 0$ ,  $x_{\max} = 5$ ).

На рисунке представлена полученная в результате моделирования зависимость критериального выражения  $\Omega(c)$  от искомого параметра наблюдателя на  $k$ -м шаге алгоритма ( $k = 200$ ).

Интегралы, входящие в выражения (8), определялись численно с использованием квадратурных формул с шагом  $\Delta s = \Delta x = 0.02$ .

Как показали результаты моделирования, вид приведенной на рисунке зависимости является характерным для критериальных выражений, получаемых на различных итерациях алгоритма (7). Здесь важно отметить, что, являясь многоэкстремальными, критериальные выражения на различ-

ных шагах алгоритма (см. приведенный график) принимают свои наименьшие значения в районе истинного значения искомого параметра  $c = 2$ .

Для минимизации выбранного критерия на очередном шаге алгоритма, т. е. для однозначного определения численного значения текущей оценки искомого параметра, целесообразно, задав некоторый интервал возможных значений параметра  $c$  (в примере был выбран интервал  $0 \leq c \leq 8$ ), воспользоваться одним из методов прямой минимизации. В данном случае использовался модифицированный симплексный метод прямой минимизации Нелдера—Мида, метод Бокса, обладающий достаточной вычислительной эффективностью и удобной программной реализацией [7].

Результаты компьютерного моделирования процедуры нелинейной параметрической идентификации показали, что при выборе количества дискретных значений сигнала наблюдения  $k \geq 300$  отклонение оценки параметра наблюдателя  $c$  от его истинного значения  $c = 2$  не превышает 10 % от его величины.

Таким образом, результаты проведенных исследований подтверждают принципиальную возможность эффективной реализации метода нелинейной параметрической идентификации с использованием критерия минимума АПВ текущей ошибки оценивания.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученное выше выражение (7) определяет общий вид алгоритма нелинейной параметрической идентификации, обладающего рядом принципиально новых свойств.

К их числу следует отнести:

- более высокий по сравнению с традиционными методами уровень потенциальной точности процесса идентификации за счет использования обобщенного вероятностного критерия, зависящего в общем случае нелинейно от апостериорной плотности распределения вектора состояния;
- инвариантность к виду плотности распределения вероятности шума как объекта, так и наблюдателя;
- возможность применения метода для нелинейных объектов и наблюдателей, в том числе при нелинейной зависимости функции наблюдения от параметра.

Таким образом, предложенный метод нелинейной параметрической идентификации на основе обобщенного вероятностного критерия может быть весьма эффективно использован в самых различных областях связи, управления, метрологии и т. д.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грон Д. Методы идентификации систем. М.: Мир, 1979. 302 с.
2. Петров Б.Н., Уланов Г. М., Гольденблат И. И., Ульянов С. В. Теория моделей в процессах управления. М.: Наука, 1978. 223 с.
3. Красовский А.А. Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987. 712 с.
4. Штейнберг Ш.Е. Идентификация в системах управления. М.: Энергоатомиздат, 1987. 80 с.
5. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991. 608 с.
6. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989. 455 с.
7. Банди Б. Методы оптимизации: Вводный курс. М.: Радио и связь, 1988. 128 с.

*Ростовский государственный университет путей сообщения, г. Ростов-на-Дону*

Материал поступил в редакцию 7.08.2007.

## SYNTHESIS OF THE NONLINEAR PARAMETRIC IDENTIFICATION ALGORITHM BASED ON THE MINIMUM CRITERION OF THE ESTIMATION ERROR PROBABILITY

**S. V. Sokolov, P. A. Kucherenko**

*Rostov State University of Transport Communication, Rostov-on-Don*

The paper demonstrates the topicality of alternative (with respect to conventional) techniques for stochastic nonlinear parametric identification. The identification procedure of the discrete observer parameter based on the minimum criterion of the estimation error probability is offered herein for the first time. A model example that demonstrates the efficiency of the technique proposed is considered. The algorithm based on the generalized probabilistic criterion can be used in a vast variety of applications in the fields of communication, control, metrology, etc.

УДК 681.518.52

ã Р. И. Сольницев, Н. Н. Майоров

## ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ УРОВНЯ ЖИДКОСТИ В ЗАМКНУТЫХ ДВИЖУЩИХСЯ РЕЗЕРВУАРАХ

В статье рассматривается замкнутая система измерения уровня жидкости в движущихся резервуарах. Приведено построение математической модели движения жидкости и программное средство для ее построения.

### ВВЕДЕНИЕ. ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ

Проблема точного определения уровня жидкости в резервуарах достаточно актуальна на сегодняшний день. Особую значимость она принимает при транспортировке дефицитных материалов и использовании жидкого топлива, т. к. даже небольшая погрешность в измерениях приводит к потере имеющихся ресурсов. Так, предприятия транспортной отрасли используют все известные способы экономии топлива, однако требуются новые, более прогрессивные системы измерения и их разработки для дальнейшего развития отрасли и ее направлений.

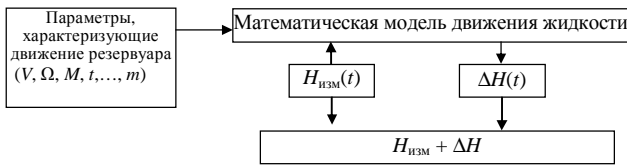
Рассмотрим технические средства, существующие на текущий момент для определения

уровня жидкости в резервуарах. На основе различных физических методов существует достаточно широкая группа устройств контроля и измерений. В настоящее время распространение получили поплавковые, буйковые, гидростатические, электрические, ультразвуковые, радиоизотопные, а также визуальные средства контроля.

При их разработке учитываются такие физические и химические свойства контролируемой среды, как температура, давление, нагревание, охлаждение, электрическая проводимость и другие. Особое внимание необходимо уделять характеру движения жидкости и резервуара. По характеру движения измерение можно разделить:

**Табл. 1.** Средства измерения уровня жидкости в резервуаре

Вид средств измерения	Техническая реализация
Визуальные	1) уровневые линейки, 2) уровневые рейки, 3) уровневые стекла
Поплавковые	1) поплавковые выключатели, 2) буйковые датчики
Гидростатические	1) манометры (различных видов), 2) гидростатические зонды
Электрические	По виду чувствительного элемента разделяют: 1) емкостные (емкостные уровнемеры), 2) кондуктометрические (концевые выключатели)
Электромагнитные	Датчики направленного электромагнитного излучения
Акустические	Датчики, работающие по принципу локации: ультразвуковые, определяющие время прохождения сигнала



**Рис. 1.** Схема включения в процедуру измерений математической модели.

$H_{изм}(t)$  — измеренный уровень жидкости с помощью штатных приборов;  $\Delta H(t)$  — поправка уровня жидкости;  $H_{изм} + \Delta H$  — реальные значения уровня жидкости с определенной ошибкой;  $(V, \Omega, M, t, \dots, m)$  — значения линейных и угловых скоростей движения объекта, массы резервуара и времени движения и др. параметры движения резервуара с жидкостью

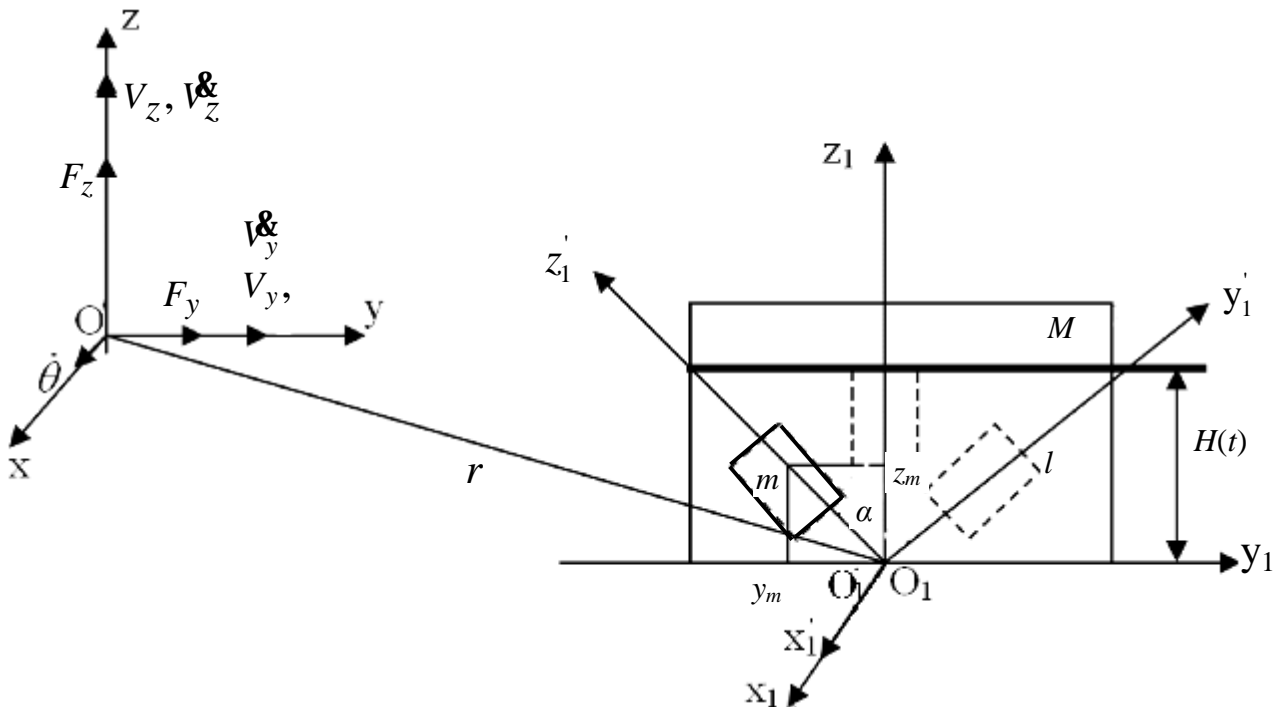
- 1) на статическое (жидкость и резервуар в покое);
- 2) динамическое (резервуар находится в движении);
- 3) смешанное (включает первые два).

Наибольший интерес для исследования представляют 2) и 3) случаи (жидкость "плещется" в резервуаре), т. к. в их рассмотрении возникают трудности и при моделировании движения, и при выборе средств и методики определения уровня жидкости. Существующие средства измерения представлены в табл. 1. Степень распространения этих средств можно оценить в процентном соотношении так: 24 % — поплавковые датчики, 20 — гидростатические, 15 — емкостные, 5 — кондуктометрические, 21 — электромагнитные средства, 15 % — акустические средства.

Как видно из табл. 1, существует большое количество приборов и методов измерения жидкости.

**РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ВКЛЮЧАЕМОЙ В КОНТУР ИЗМЕРЕНИЙ**

В развитие и усовершенствование существующих средств предлагается система измерения уровня жидкости с включением математической модели в контур измерения. Основной принцип построения этой системы для одномерного случая представлен на рис. 1.



**Рис. 2.** Рассчитываемая модель жидкости в емкости — твердотельный маятник.  $Oxyz$  — система координат, связанная с основанием (подвижным объектом);  $Ox_1y_1z_1$  — система координат жидкостной емкости массой  $M$ ;  $Ox'_1y'_1z'_1$  — система координат зеркального отражения качающегося на подвесе длиной  $l$  маятника массой  $m$ ;  $H(t)$  — высота над поверхностью концевой точки качающегося маятника

В режиме реального времени производится измерение уровня жидкости с помощью штатных приборов и корректировка на основе "Математической модели движения жидкости". На вход модели поступают значения линейных и угловых скоростей движения объекта ( $V, \Omega$ ), массы резервуара и жидкости в нем ( $M, m$ ), характеристики подвижного объекта и т. д.. Далее организуется итерационный процесс вычисления поправки  $\Delta H$  к  $H_{изм}$  в зависимости от параметров движения основания.

Рассмотрим построение математической модели, используемой в такой системе измерения уровня жидкости. Построим простейшую модель для случая плоского (в вертикальной плоскости) движения объекта (основания) с жидкостным резервуаром при следующих допущениях. Точка приложения к объекту сил, определяющих движение, находится вне резервуара: на рис. 2 — (·) О, система координат  $Oxuz$ , действующие силы  $F_y, F_z$  (проекции на оси  $y, z$ ), компоненты скорости и ускорения —  $V_y, V_z, \dot{V}_y, \dot{V}_z$  (движение в плоскости  $yz$ ),  $\theta$  — угол тангажа. Жидкость в резервуаре представляется твердым телом с переменной массой  $m(t)$ ; растекание жидкости по внутренним стенкам резервуара не учитывается; движение жидкости отображается зеркально относительно горизонтальной плоскости физическим маятником (рис. 2); масса маятника сосредоточена в центре масс, а точка подвеса прикреплена к середине днища резервуара на расстоянии  $r$  от (·) О основания; в этом случае угол отклонения нормали к поверхности жидкости при движении будет соответствовать углу  $\alpha$  отклонения этого маятника от исходного положения (рис. 2.)

Введем систему координат  $O_1x_1y_1z_1$ , начало которой совпадает с точкой крепления маятника к основанию. Система координат  $O_1x_1y_1z_1$  связана с зеркальным отображением твердотельного висящего маятника (см. рис. 2);  $\alpha$  — угол отклонения маятника;  $l$  — длина маятника;  $m$  и  $M$  — масса жидкости и резервуара соответственно.

Для построения уравнений движения жидкости в резервуаре воспользуемся формализмом Лагранжа.

Составим выражения, необходимые для формирования уравнения Лагранжа:

$$y_m = l \sin \alpha, \quad z_m = l \cos \alpha, \quad (1)$$

где  $y_m, z_m$  — проекции центра тяжести маятника на соответствующие оси;

$$M_r = m \dot{\varphi}^2 r^2, \quad (2)$$

где  $M_r$  — центробежный момент инерции,  $r$  — отстояние системы координат, связанной с резервуаром, от системы  $Oxuz$ ;

$$F_z = m \dot{V}_z, \quad F_y = m \dot{V}_y, \quad (3)$$

где  $F_z, F_y$  — проекции сил, действующие на маятник со стороны основания, на оси  $Oz$  и  $Oy$ ;

$$Q_a = y_m F_z - z_m F_y, \quad (4)$$

где  $Q_a$  — обобщенная сила, действующая на маятник. Составим выражения для кинетической и потенциальной энергий замкнутой системы:

$$T = \frac{1}{2} m (V_z^2 + V_y^2) + \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\alpha} + p)^2, \quad (5)$$

$$\Pi = -mgl \cos \alpha + \frac{1}{2} C (l \cos \alpha)^2, \quad (6)$$

где  $C$  — жесткость стенок резервуара,  $p$  — проекция угловой скорости.

Составим выражения для функции Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\alpha} &= ml^2 (\dot{\alpha} + p), \\ \frac{dL}{da} &= mgl \sin \alpha - Cl^2 \sin \alpha, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{d\dot{\alpha}} \right) &= ml^2 (\ddot{\alpha} + \dot{p}). \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда в соответствии с уравнением Лагранжа и в предположении, что масса и длина маятника не меняются на каком-то промежутке времени  $t_i < t < t_{i+1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{d\dot{\alpha}} \right) - \frac{dL}{da} &= \\ &= ml^2 (\ddot{\alpha} + \dot{p}) - mgl \sin \alpha + Cl^2 \sin \alpha = \\ &= ml \dot{V}_z \sin \alpha - ml \dot{V}_y \cos \alpha + m \dot{\varphi}^2 r^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Откуда получим:

$$\begin{aligned} ml^2 \ddot{\alpha} - mgl \sin \alpha + Cl^2 \sin \alpha &= \\ = -ml^2 \dot{p} + ml \dot{V}_z \sin \alpha - ml \dot{V}_y \cos \alpha + m \dot{\varphi}^2 r^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Разделив левые и правые части уравнения (9) на  $ml^2$ , получим:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - \frac{g}{l} \sin \alpha + \frac{C \sin \alpha}{m} &= \\ = -\dot{p} + \frac{1}{l} \dot{V}_z \sin \alpha - \frac{\dot{V}_y}{l} \cos \alpha + \frac{\dot{\varphi}^2 r^2}{l^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Откуда:

$$\ddot{\alpha} + \left( \frac{C}{m} - \frac{g}{l} - \frac{\dot{V}_z}{l} \right) \sin \alpha = -\dot{p} - \frac{\dot{V}_y}{l} \cos \alpha + \frac{\dot{\varphi}^2 r^2}{l^2}. \quad (11)$$



Табл. 2. Зависимость массы топлива в топливном резервуаре самолета от времени полета

Времязависимая величина	Время $t$ , мин				
	14	15.2	30.7	65.17	92.17
Масса топлива $m$ , т	24.2	24.1	21.2	1.7	0.14

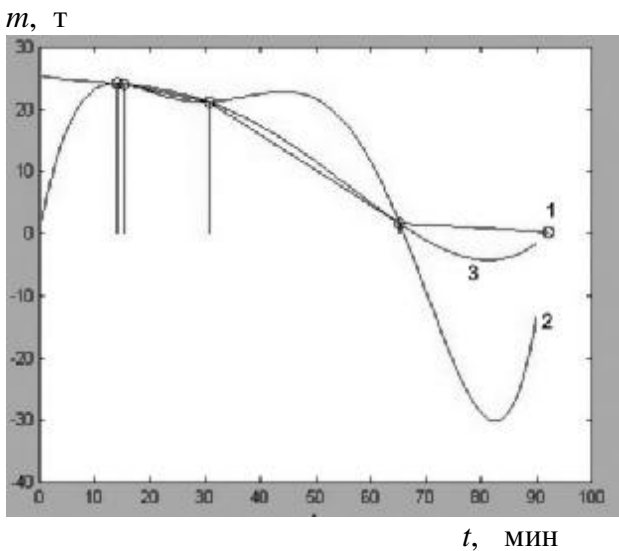


Рис. 3. Графическая зависимость массы топлива в резервуаре от времени полета самолета, и ее полиномиальная аппроксимация:

- 1 — ломаной;
- 2 —  $m(t) = -0.0001 t^4 + 0.0103 t^3 - 0.3410 t^2 + 4.828 t$ ;
- 3 —  $m(t) = -0.0004 t^3 + 0.0103 t^2 - 0.1658 t + 25.4845$

Если предположить, что ввиду малости угла  $a$   $\sin a \approx a$ , то выражение (11) можно представить в виде

$$f_1(t)a = j(t), \tag{12}$$

где  $j(t) = \left( -\frac{v_y}{l} + \frac{g r^2}{l^2} \right)$ ,  $f_1(t) = \left( \frac{C}{m} - \frac{g}{l} - \frac{v_z}{l} \right)$ .

Если  $f_1(t) > 0$ , то левая часть выражения (12) представляется характеристическим уравнением, и общее решение такого уравнения — линейная комбинация  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$ :

$$a(t) = C_1 \cos \left( \sqrt{\frac{C}{m} - \frac{g}{l} - \frac{v_z}{l}} t \right) +$$

$$+ C_2 \sin \left( \sqrt{\frac{C}{m} - \frac{g}{l} - \frac{v_z}{l}} t \right) + a_0, \tag{13}$$

где постоянные коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  могут быть найдены из начальных условий;  $a_0$  — ошибка.

В общем случае решение уравнения (12) сводится к известному уравнению Хилла—Матье [3]. Аналитическое решение таких уравнений затруднительно. Однако по уравнению (12) можно сделать оценку угла отклонения  $a$  как функции скоростей и ускорений движения основания. Численное решение такого уравнения выполняется на бортовой вычислительной машине, в результате чего определяется поправка  $\Delta H(t)$  (рис. 1).

В общем случае необходимо учитывать изменение массы и длины маятника от времени. Опытные данные изменения массы топлива в топливном баке, например, самолета [2], зафиксированные в определенных промежутки времени, приведены в табл. 2. Используя измеренные значения массы топлива в топливном резервуаре, можно построить функцию изменения массы топлива от времени  $m(t)$ . Полиномиальная аппроксимация этой функции приведена на рис. 3.

Таким образом, (если принять аналитическую аппроксимацию 3 (рис. 3)) изменение массы топлива как функция времени в этом частном случае имеет вид

$$m(t) = -0.0004 t^3 + 0.0103 t^2 - 0.1658 t + 25.4845. \tag{14}$$

В любом случае уровень жидкости, измеренный датчиком, можно отождествить с высотой расположения конца физического маятника  $H(t)$  (рис. 2), причем справедливы выражения:

$$H(t) = l(t) \cos a, \quad l(t) = \Phi(m(t)), \tag{15}$$

где  $a$  — угол отклонения маятника,  $l(t)$  — длина маятника, которая является функцией времени и зависит от изменения массы жидкости. Функцию  $l(t) = \Phi(m(t))$  можно предварительно определить по конструкции резервуара.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построение математической модели по предложенному способу для пространственной задачи осуществляется также на основе уравнений Лагранжа II рода и реализуется на бортовой вычислительной машине с помощью программного пакета "Построение математических моделей"<sup>\*)</sup>. Построение модели средствами этой программы базируется на описании кинематической схемы, в которой указаны параметры взаимного расположения рассматриваемого подвижного объекта, резервуара и жидкости в нем.

В заключение следует отметить, что предложенный способ повышения точности измерения уровня жидкости в замкнутом резервуаре может быть реализован на любых подвижных объектах, имеющих замкнутые резервуары с жидкостью, нуждающиеся в измерении уровня. Реализация

<sup>\*)</sup> Соответствующий программный пакет используется на кафедрах САПР СПбГУАП и ГЭУ (ЛЭТИ).

возможна с помощью бортовых программно-аппаратных средств, разработка которых осуществляется вышеназванной САПР.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сольницев Р.И.* Автоматизация проектирования систем автоматического управления. М.: ВШ, 1991. 334 с.
2. *Скрипниченко С.Ю.* Экономия авиатоплива в летной эксплуатации. М.: Транспорт, 1991. 241 с.
3. *Шмидт Г.* Параметрические колебания. М., 1978. 336 с.

*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения*

Материал поступил в редакцию 14.08.2007.

## IMPROVEMENT OF ACCURACY IN MEASURING WATER LEVELS IN CLOSED MOVING RESERVOIRS

**R. I. Solnitsev, N. N. Mayorov**

*Saint-Petersburg University of Airspace Instrumentation*

The paper considers a closed system for measuring levels of liquid in moving reservoirs. The procedure of creating a mathematical model for the liquid motion, as well as the respective software, is presented.