ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2007, том 17, № 4, с. 55–60

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК 534.874+ 534.26

ã Б. П. Шарфарец

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

В работе приводится ряд полезных определений и свойств амплитуды рассеяния как аналитической функции сферических координат. Рассматривается амплитуда рассеяния при сложном падающем поле. Показано, что при расчете поля рассеяния в волновой зоне значениями амплитуды рассеяния, лежащими вне области видимости можно пренебречь. Результаты работы могут быть использованы при расчете радиационного давления при сложной форме внешнего поля.

ВВЕДЕНИЕ

В теории рассеяния важная роль отводится амплитуде рассеяния (ар), или как ее еще называют в англоязычной литературе "фактору углового распределения" (far field pattern) (см., например, [1]). Использование понятия амплитуды рассеяния, как показывает практика, может существенно упростить решение многих задач и сделать его гораздо более прозрачным физически. При этом весьма полезно использовать различные представления амплитуды рассеяния и ее аналитические свойства. В настоящей работе приводится ряд полезных определений и свойств амплитуды рассеяния, рассматривается влияние ее спектра на расчет поля в волновой зоне.

РАЗЛИЧНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АР

Математическое определение ар следует из следующей теоремы (см., например, [2]): всякое решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца и условию излучения Зоммерфельда на бесконечности, имеет следующее асимптотическое представление через уходящую сферическую волну

$$u(x)=\frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left\{u_\infty(\hat{x})+O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\},\ \ |x|\to\infty, \qquad (1)$$

где $u_\infty(\hat{x})$ — фактор углового распределения поля. $u_\infty(\hat{x})$ в общем случае определяется выражением [1, с. 499], [2, с. 20]

$$u_\infty(\hat{x})=\frac{1}{4p}\int_{\partial D}\left\{u(y)\frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \mathbf{n}(y)}-\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}(y)}e^{-ik\hat{x}\cdot y}\right\}\mathrm{d}s(y). \quad (2)$$

Здесь $x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$ — точка наблюдения; $\hat{x}=\dfrac{x}{|x|}\in\Omega$ — единичный вектор на сфере Ω единичного радиуса; D — некая ограниченная область, включающая рассеиватель или излучатель с границей ∂D; $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к ∂D; $k=w/c$ — волновое число. Если $u(x)$ обозначает давление, то для $u_\infty(\hat{x})$ из (2) справедливо равенство [3, с. 109]

$$u_\infty(\hat{x})=-\frac{1}{4p}\times$$
$$\times\int_{\partial D}\left\{ik\hat{x}\cdot\mathbf{n}(y)p(y)+iwr\mathbf{n}(y)\cdot v(y)\right\}e^{-ik\hat{x}\cdot y}\mathrm{d}s(y). \qquad (2а)$$

Здесь $v(y)$ — вектор колебательной скорости на поверхности ∂D.

Когда речь идет о рассеянии, то подразумевается наличие суммы падающей и рассеянной волн

$$u(x)=u_i(x)+u_s(x),$$

где падающая волна обычно полагается плоской

$$u_i=e^{ikx\cdot d},$$

а рассеянная волна $u_s(x)$ удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда. В этом случае фиксируется зависимость рассеянной волны от направления распространения падающей волны d

$$u_s(x)=u_s(x,d)$$

и, следовательно, аналогичная зависимость ар

$$u_\infty(\hat{x})=u_\infty(\hat{x},d). \qquad (3)$$

Очевидно, что в случае, когда падающая волна представляет собой совокупность плоских волн

$$u_i(x)=\int_{\Omega'}g(d)e^{ikx\cdot d}\mathrm{d}s(d), \qquad (4)$$

ар вычисляется следующим образом

$$u_\infty(\hat{x}) = \int_{\Omega'} g(d) u_\infty(\hat{x}, d) \mathrm{d}s(d) . \qquad (5)$$

Здесь Ω' — область определения падающей волны.

Известно [4, с. 83], что любое дважды дифференцируемое решение однородного уравнения Гельмгольца есть аналитическая функция своих аргументов. Решение однородного уравнения Гельмгольца, определенное на всем пространстве $x \in R^3$, называется целым решением [2, с. 19]. Отсюда: целое решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее условию излучения Зоммерфельда, равно тождественно нулю. Решение однородного уравнения Гельмгольца, область определения которого лежит вне некоторой сферы конечного радиуса, называется излученным решением (radiation solution), если оно удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0 , \quad r = |x| \qquad (6)$$

и предел достигается равномерно для всех направлений $x/|x|$.

Справедливо утверждение [2, с. 33]: пусть $u(x)$ есть излученное решение уравнения Гельмгольца вне шара $|x| \le R$, $R > 0$. Тогда для $u(x)$ справедливо разложение по сферическим функциям

$$u(x) = k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} a_n^m h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m(\hat{x}) . \qquad (7)$$

Здесь $h_n^{(1)}(k|x|)$ — сферическая функция Ханкеля первого рода; a_n^m — постоянные коэффициенты; $Y_n^m(\hat{x})$ — сферические функции на единичной сфере, равные

$$Y_n^m(q, j) = \sqrt{\frac{2n+1}{4p}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(q) e^{imj} . \qquad (8)$$

Полю (7) отвечает амплитуда рассеяния [2, с. 34]

$$u_\infty(\hat{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{i^{n+1}} \sum_{m=-n}^{n} a_n^m Y_n^m(\hat{x}) . \qquad (9)$$

Если излученное поле обладает сферической симметрией, то справедливы следующие выражения [5, с. 223, 224]:

$$u(x) = k \sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n^{(1)}(k|x|) P_n(\cos q) , \qquad (7а)$$

$$u_\infty(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{i^{n+1}} a_n P_n(\cos q) . \qquad (9а)$$

Справедливо следующее равенство [2, с. 31], [1, с. 434]:

$$\begin{aligned} e^{ikx\cdot d} &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(k|x|) P_n(\cos g) = \\ &= 4p \sum_{n=0}^{\infty} i^n \sum_{m=-n}^{n} j_n(k|x|) Y_n^m(\hat{x}) \left(Y_n^m(d)\right)^* = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ i^n (2n+1) \sum_{m=0}^{n} e_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos m(j - b) \times \\ &\quad \times j_n(k|x|) P_n^m(\cos q) P_n^m(\cos a) \Big\}, \qquad (10) \\ &\quad x \in R^3 . \end{aligned}$$

Здесь g — угол между векторами x и d; $e_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m \ne 0 \end{cases}$ — множитель Неймана. В (10), в частности, использована теорема сложения [2, с. 26]:

$$\sum_{m=-n}^{n} Y_n^m(\hat{x}) \left(Y_n^m(d)\right)^* = \frac{2n+1}{4p} P_n(\cos g) .$$

Уиттекером установлена следующая формула разложения по плоским волнам для целых решений однородного уравнения Гельмгольца [6]:

$$u(x) = \frac{k}{4p} \int_0^{2p} \mathrm{d}b \int_0^{p} \hat{u}(d) e^{ikd\cdot x} \sin a \, \mathrm{d}a , \qquad (11)$$

где $d = (\sin a \cos b, \sin a \sin b, \cos a)$. Причем для элементарных целых решений $\Lambda_n^m(x) = j_n(k|x|) Y_n^m(\hat{x})$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \Lambda_n^m(x) &= j_n(k|x|) Y_n^m(q, j) = \\ &= (-i)^n \frac{1}{4p} \int_0^{2p} \mathrm{d}b \int_0^{p} Y_n^m(a, b) e^{ikd\cdot x} \sin a \, \mathrm{d}a . \qquad (12) \end{aligned}$$

Тогда, если разложить образ $\hat{u}(d)$ по сферическим гармоникам

$$\hat{u}(d) = \hat{u}(a, b) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} (-i)^n a_n^m Y_n^m(a, b) , \qquad (13)$$

то окажется, что прообраз равен

$$u(x) = k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} a_n^m \Lambda_n^m(x) . \qquad (14)$$

Для a_n^m имеем:

$$a_n{}^m = i^n \int_0^{2p} \mathrm{d}b \int_0^{p} \left(Y_n^m(a,b)\right)^* \hat{u}(a,b)\sin a \, \mathrm{d}a \,. \qquad (15)$$

Как видно, решению (14) соответствует образ (13) с коэффициентами, определяемыми из (15). Разложение осуществляется по однородным плоским волнам с углами распространения из так называемого круга видимости $q \in [0,p]$, $j \in [0,2p]$, что отвечает компонентам волнового числа $k_x = k \sin q \cos j$ и $k_y = k \sin q \sin j$, не превосходящим k, т. е. лежащим внутри круга $k_x{}^2 + k_y{}^2 \le k^2$.

Равенство (12) означает, что с точностью до постоянного коэффициента функция $Y_l^m(a,b)$ является Фурье-образом функции $j_l(kr)Y_l^m(q,j)$ в круге видимости. Преобразование Фурье от функции $Y_l^m(a,b)$ на всей плоскости $\left(k_x,k_y\right) \in R^2$ равно [6]:

$$\Pi_n^m(x) = h_n^{(1)}(k|x|)Y_n{}^m(q,j) =$$

$$= (-i)^{n+1} \frac{i}{2p} \int_0^{2p} \mathrm{d}b \int_0^{\frac{p}{2}-i\infty} Y_n{}^m(a,b) e^{ikd\cdot x} \sin a \, \mathrm{d}a \,. \qquad (16)$$

По мнению автора, в последнем выражении в работе [6] ошибочно фигурирует множитель $(-i)^n$ вместо $(-i)^{n+1}$, что легко проверяется рассмотрением асимптотик обеих частей выражения при $|x| \to \infty$.

Показатель экспоненты в (16) равен

$$d \cdot x = |x| \left(\sin q \sin a \cos(j - b) \pm \cos q \cos a \right),$$

а знак + соответствует положительной ординате точки наблюдения x, знак "минус" — отрицательной. Если теперь ввести преобразование Фурье [6]

$$u(x) = \frac{ik}{2p} \int_0^{2p} \mathrm{d}b \int_0^{\frac{p}{2}-i\infty} \hat{u}(d) e^{ikd\cdot x} \sin a \, \mathrm{d}a =$$

$$= \frac{i}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{u}(k_x,k_y)}{k_z} e^{ikd\cdot x} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y \qquad (17)$$

и воспользоваться разложением образа $\hat{u}(d)$ по сферическим гармоникам

$$\hat{u}(d) = \hat{u}(a,b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{i^{n+1}} \sum_{m=-n}^{n} a_n^m Y_n{}^m(a,b)\,, \qquad (18)$$

то получаем для поля $u(x)$:

$$u(x) = k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} a_n^m \Pi_n^m(x) =$$

$$= k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} a_n^m h_n^{(1)}(k|x|) Y_n{}^m(q,j)\,. \qquad (19)$$

В (17) $k_z = \sqrt{k^2 - k_x{}^2 - k_y{}^2} = k\cos a$ — вертикальная составляющая волнового вектора.

Сравнивая (19) и (7), а также (18) и (9), делаем ожидаемый вывод о том, что амплитуда рассеяния в области видимости совпадает со спектром поля (19) в разложении (17):

$$u_\infty(\hat{x}) = \hat{u}(\hat{x})\,.$$

Отметим, что a_n^m из (18) определяется так:

$$a_n^m = i^{n+1} \int_0^{2p} \mathrm{d}b \int_0^{p} \left(Y_n{}^m(a,b)\right)^* \hat{u}(a,b) \sin a \, \mathrm{d}a \,. \qquad (20)$$

Отметим также, что поле (19) удовлетворяет при $x \ne 0$ однородному уравнению Гельмгольца и условию излучения Зоммерфельда, что означает, что $u(x)$ является излученным полем.

Сравнивая выражения (11) и (17), видим, что в представлении целого решения (11) присутствуют только однородные плоские волны. В аналогичном представлении излученного решения (17), кроме того, присутствуют неоднородные плоские волны, что обеспечивает соответствующее поведение решения при $|x| \to 0$. Для изучения влияния вклада неоднородных плоских волн в представлении (17) при $|x| \to \infty$ перепишем (17) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(|x|,q,j) &= \frac{ik}{2p} \int_0^{2p} \mathrm{d}b \int_0^{\frac{p}{2}-i\infty} \hat{u}(a,b) e^{ikd\cdot x} \sin a \, \mathrm{d}a = \\ &= u_p + u_e, \\ u_p &= \frac{ik}{2p} \int_0^{2p} \mathrm{d}b \int_0^{\frac{p}{2}} \hat{u}(a,b) e^{ikd\cdot x} \sin a \, \mathrm{d}a\,, \\ u_e &= \frac{ik}{2p} \int_0^{2p} \mathrm{d}b \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}-i\infty} \hat{u}(a,b) e^{ikd\cdot x} \sin a \, \mathrm{d}a\,. \end{aligned} \qquad (21)$$

Здесь u_p — составляющая поля, включающая только однородные плоские волны; u_e — составляющая поля, включающая только неоднородные плоские волны. Оценка асимптотического поведения u_p и u_e при $|x| \to \infty$ изучена в работах [3, 7], где получены следующие результаты (поведение поля равномерно по j):

— при $q \in \left(0, \frac{p}{2}\right)$ имеет место асимптотика $u_p = O(|x|^{-1})$ и $u_e = O(|x|^{-3/2})$;

— при $q = 0$ и при $q = \frac{p}{2}$ имеет место асимптотика $u_p = O(|x|^{-1})$ и $u_e = O(|x|^{-1})$.

Поскольку выбор направления осей координат носит произвольный характер, то аномальное поведение u_e при $q = 0$ и $q = \frac{p}{2}$ носит нефизический характер. Поэтому следует признать, что асимптотика общего поля u при $|x| \to \infty$ в целом совпадает с асимптотикой поля u_p, в котором присутствуют только однородные плоские волны.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АР

Аналитические свойства амплитуды рассеяния рассматривались в работах [3, 4] и независимо в работах [8, 9]. При изучении аналитических свойств амплитуды рассеяния исходят из ее формального определения (2а) либо из определения через объемный потенциал [1, 2, 3 и др.]:

$$u_\infty(\hat{x}) = -\frac{1}{4p} \int_D g(y) e^{-ik\hat{x}\cdot y} \mathrm{d}y. \qquad (22)$$

Исходя из этих определений, получены следующие свойства амплитуды рассеяния как аналитической функции, представляемой поверхностным или объемным интегралом:

— амплитуда рассеяния $u_\infty(k_x, k_y)$ в переменных k_x, k_y является аналитической функцией комплексных переменных k_x, k_y, исключая точку ветвления $a = 0$ функции $a = \sqrt{k^2 - k_x{}^2 - k_y{}^2}$, т. е. на круге $k_x{}^2 + k_y{}^2 = k^2$;

— амплитуда рассеяния $u_\infty(q, j)$ в переменных q, j является аналитической функцией комплексных переменных q, j при всех значениях q, j, т. е. является целой аналитической функцией этих переменных.

Отсюда важное следствие: если амплитуда рассеяния задана внутри области видимости $q \in [0, p]$, $j \in [0, 2p]$, то вне этой области она может быть продолжена аналитически единственным образом. Это в том числе означает, что если $u_\infty(q, j)$ не равна тождественно нулю внутри области видимости, то она не может быть равна тождественно нулю вне области видимости.

Существует альтернативное определение аналитических свойств амплитуды рассеяния [4, 10].

Введем обозначение

$$u_\infty(\hat{x}) = F_0(q, j). \qquad (23)$$

Справедлива следующая теорема, полученная Аткинсоном и Уилкоксом [4, с. 84]: пусть $u(x)$ — излученное решение (т. е. удовлетворяет уравнению Гельмгольца вне сферы радиусом R и условию излучения Зоммерфельда при $|x| \to \infty$). Тогда при $|x| \ge R$ справедливо равенство

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(q, j)}{|x|^n}, \qquad (24)$$

где $F_0(q, j)$ определяется из (23), а функции $F_n(q, j)$ определяются из следующего рекуррентного соотношения:

$$F_n = \frac{1}{2ink} \times \left(n(n-1) + \frac{1}{\sin q} \frac{\partial}{\partial q} (\sin q \frac{\partial}{\partial q}) + \frac{1}{\sin^2 q} \frac{\partial^2}{\partial j^2} \right) F_{n-1}. \qquad (25)$$

Равенство (24) при $|x| \ge R$ сходится абсолютно и равномерно, его можно дифференцировать по $|x|$, q, j почленно любое число раз, и полученные после этого ряды также сходятся абсолютно и равномерно.

Справедливо также следующее утверждение (теорема Мюллера) [10], [4, с. 201]. Пусть $u_\infty(q, j) = F_0(q, j)$ — амплитуда рассеяния (диаграмма направленности), соответствующая объекту, расположенному внутри сферы $|x| \le R$. Тогда существует гармоническая функция h, определенная во всем пространстве R^3 и такая, что

а) $h(1, q, j) = u_\infty(q, j)$;

б) $\int_0^{2p} \int_0^{p} |h(r, q, j)|^2 \sin q \, \mathrm{d}q \, \mathrm{d}j$ — есть целая функция переменной r экспоненциального типа, не превышающего R, (целая функция есть функция экспоненциального типа, если ее модуль при $|r| \to \infty$ на комплексной плоскости r растет не быстрее $e^{s|r|}$; $s > 0$ — есть тип этой функции).

РАССЕЯНИЕ В СЛУЧАЕ, КОГДА ПАДАЮЩАЯ ВОЛНА ОТЛИЧНА ОТ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Выше выражениями (4), (5) была установлена зависимость результирующей амплитуды рассеяния $u_\infty(\hat{x})$, когда известна амплитуда рассеяния $u_\infty(\hat{x},d)$ при падении на рассеиватель плоской волны по направлению d и спектр $g(d)$ падающих на рассеиватель плоских волн. Кроме того, выше было установлено, что вкладом неоднородных плоских волн в амплитуде рассеяния при расчете поля рассеяния в волновой зоне можно пренебречь. В связи с этим откорректируем выражение (5) применительно к расчету поля рассеяния в волновой зоне при падении на рассеиватель волны (4) со спектром $g(d)$. Рассмотрим два случая. Случай, когда падающей волной является однородная плоская волна, и случай падающей неоднородной плоской волны. Для дальнейших рассуждений полезным окажется соотношение взаимности [1, с. 127], [2, с. 53], [3, с. 261]:

$$u_\infty(\hat{x},d) = u_\infty(-d,-\hat{x}) . \qquad (26)$$

Во-первых, в силу сказанного выше об отсутствии влияния на асимптотику поля в волновой зоне спектра $u_\infty(\hat{x})$ вне области видимости сразу ограничим спектр $\hat{x}$ в (5) областью видимости $\hat{x}\in\Omega_p$. Здесь Ω_p — область видимости $q\in[0,p]$, $j\in[0,2p]$. Далее с учетом (26) преобразуем (5):

$$u_\infty(\hat{x}) = \int_{\Omega} g(d)u_\infty(-d,-\hat{x})\mathrm{d}s(d) =$$
$$= \int_{\Omega_p} g(d)u_\infty(-d,-\hat{x})\mathrm{d}s(d) + \int_{\Omega_e} g(d)u_\infty(-d,-\hat{x})\mathrm{d}s(d).$$

Из этого равенства следует, что последним интегралом можно пренебречь, т. к. он представляет собой сумму амплитуд рассеяния с областью определения вне зоны видимости: Ω_e — область, лежащая вне зоны видимости. Таким образом, с учетом сказанного для расчета асимптотики поля в волновой зоне в (5) достаточно ограничиться областью интегрирования Ω_p:

$$u_\infty(\hat{x}) = \int_{\Omega_p} g(d)u_\infty(\hat{x},d)\mathrm{d}s(d)$$

при условии $\hat{x}\in\Omega_p$.

ВЫВОДЫ

Приведенные в работе данные позволяют эффективно пользоваться аппаратом амплитуд рассеяния в интересах решения различных волновых задач, включая и такие задачи, как расчет радиационного давления на частицы в произвольном акустическом поле.

Настоящая работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, грант № 05-03-33108 и целевой научно-технической программы Российской Федерации "Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2012 годы", лот 2, шифр "2007-2-2.2-04-08".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во Иностр. лит-ры, 1960. 860 с.
2. *Colton D., Kress R.* Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. New York: Springer, 1998. 331 p.
3. *Hansen T.B., Yaghjian A.D.* Plane-wave theory of time-domain fields. New York: IEEE Press, 1999. 367 p.
4. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
5. *Флюгге З.* Задачи по квантовой механике. Т. 1. М.: Мир, 1974. 341 с.
6. *Devaney A.J., Wolf E.* Multipole Expansions and Plane Wave Representations of the Electromagnetic Field // J. Math. Phys. 1974. V. 15, N 2. P. 235–244.
7. *Wolf E., Foley J.T.* Do Evanescent Waves Contribute to the Far Field? // Optics Letters. 1998. V. 23. P. 16–18.
8. *Шарфарец Б.П.* Уточнение понятия "диаграмма направленности" // Акустические исследования жидкости с фазовыми включениями. Владивосток: ТОИ ДВНЦ АН СССР, 1984. С 64–72.
9. *Алексеев Г.В., Бурштейн А.Б., Шарфарец Б.П.* О некоторых свойствах диаграммных функций направленных излучателей // Электромагнитные и акустические процессы в океане. Владивосток: Изд-во ДВГУ, 1987. С. 130–141.
10. *Müller C.* Radiation Patterns and Radiation Fields // J. Rat. Mech. Anal. 1955. V. 4. P. 235–246.

Санкт-Петербург

Материал поступил в редакцию 8.10.2007.

ON SOME PROPERTIES OF THE SCATTERING AMPLITUDE

B. P. Sharfarets

Saint-Petersburg

The paper presents a number of useful definitions and properties of the scattering amplitude as an analytical function of spherical coordinates. The scattering amplitude is considered in a composite incident field. It has been shown that, in calculating the scattering field in the wave zone, scattering amplitudes going beyond the visible range can be neglected. The results of this work can be used in calculating radiation pressure in case of irregular external field.