ISSN 0868–5886 *НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2007, том 17, № 3, с. 75–87*

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК 621.391; 510.21; 519.245

ã **Г. Ф. Малыхина, А. В. Меркушева**

КЛАССЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОГО СИГНАЛА В ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ. IV. СООТВЕТСТВИЕ ФОРМЫ КОВАРИАНТНОСТИ И ВИДА ВРЕМЯ-ЧАСТОТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Время-частотные преобразования (ВЧП), используемые для анализа сигналов, имеют способность видоизменять свою форму и характеристики двумерного представления нестационарного сигнала при задании вида так называемой ковариантности — свойства модификации формы ВЧП, связанной с временным или частотным масштабированием анализируемого сигнала. Расширенная трактовка свойства ковариантности отражена в изменении аналитической формы представления ВЧП. Рассмотрены элементы теории получения ВЧП различного вида и мера адаптации их к специфике анализируемого сигнала. Дано обобщение методологии построения преобразований нестационарного сигнала в информационно-измерительных системах. Основные структуры ВЧП показаны ранее (см. "Научное приборостроение", 2002, т. 12, № 2 и 3).

ВВЕДЕНИЕ

Основой совершенствования методов анализа нестационарных сигналов в информационно-измерительных системах (ИИС) служат формы их обработки на основе время-частотных и время-масштабных (вейвлет-) преобразований. Для этих двух классов преобразований созданы концепции их построения, систематизированы свойства время-частотных преобразований (ВЧП) (связанные с характером и точностью представления сигнала), определена мера общности двух классов преобразований и показаны их преимущества над классическими формами спектрального анализа [1–5].

Наиболее практически значимыми являются билинейные ВЧП (часто называемые также квадратичными). Построение ВЧП этого класса (называемого классом Коэна (L. Cohen) [6, 7]) основано на использовании интегрального преобразования билинейной функции сигнала, взвешенной ядром. Вид и свойства ядра определяют тип ВЧП и его особенности. Однако в последнее время появилась новая методология построения квадратичных ВЧП [1], которая позволяет значительно увеличить степень их разнообразия.

При преобразованиях, связанных с получением аналитических выражений новых типов ВЧП, их характеристик, свойств и особенностей, будет использовано расширение понятия "ковариантность". Ковариантность — это свойство, отражающее вид модификации ВЧП при некоторых преобразованиях анализируемого сигнала. В качестве таких преобразований обычно рассматриваются те или иные формы изменения масштаба сигнала и его временнóго сдвига (или преобразования частотного спектра сигнала в области его преобразования Фурье). Однако при анализе ВЧП понятие ковариантности ассоциируется главным образом с характером различных типов преобразований параметров времени и частоты для аргументов результата преобразования. В этом случае вид соответствующего преобразования сигнала рассматривается на втором плане как причина, порождающая анализируемое свойство ковариантности ВЧП [2].

Конкретная форма свойства ковариантности определяет специальную группу ВЧП, которые имеют особенности аналитического выражения, вид ядра и приспособленность ВЧП к анализу сигналов с определенным характером распределения энергии в плоскости время—частота.

Для краткости каждой форме свойства ковариантности и группе ВЧП, которой этот тип ковариантности свойственен, будет дано промежуточное название. Например, группа ВЧП, которая получается на основе формирования свойства ковариантности к одновременному масштабированию вре-

---

[1] Аналитическая форма ВЧП такого типа содержит в подынтегральном выражении квадратичную зависимость относительно функции-сигнала $s(t)$ или его частотной формы $\hat{s}$ (преобразования Фурье сигнала).

[2] Далее тип ковариантности основывается главным образом на виде изменения частотной формы сигнала. В связи с этим в качестве индекса ВЧП указывается $\hat{s}$, а не временнáя форма сигнала s.

мени и частоты

$$H_{C_a\hat{s}}(t;f)=H_{\hat{s}}(at;f/a)$$

$$\text{при } C_a\hat{s}(f)=\left(1/\sqrt{|a|}\right)\hat{s}(f/a),$$

а также удовлетворяет свойству ковариантности к "гиперболически" частотно-зависимому сдвигу по времени

$$H_{H_c\hat{s}}(t;f)=H_{\hat{s}}(t-c/f;f)$$

$$\text{при } (H_c\hat{s})(f)=\exp\left(-2p\ jc\ln(f/f_r)\right)\cdot\hat{s}(f),$$

условно называется группой гиперболических время-частотных преобразований (Г-ВЧП) [3].

Анализируемая модификация Г-ВЧП связана с сигналами, у которых распределение энергии в плоскости время—частота по форме близко к гиперболической зависимости (~ $1/f$). В этом случае Г-ВЧП обеспечивает существенно лучшее разрешение сравнительно с любым ВЧП класса Коэна.

ГРУППА ВРЕМЯ-ЧАСТОТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С КОМБИНИРОВАННЫМ СВОЙСТВОМ КОВАРИАНТНОСТИ

"Гиперболическая" группа (или класс) ВЧП, условно называемых Г-ВЧП, порождается при введении свойства ковариантности в комбинированной форме.

- Ковариантность ВЧП $\Pi_{\hat{s}}(t;f)$ в форме одновременного масштабирования времени и частоты $P_{C_a\hat{s}}(t;f)=P_{\hat{s}}(at;f/a)$ при условии масштабирования частотного спектра сигнала $s(t)$ (в области его преобразования Фурье $\hat{s}(f)$):

$$C_a\hat{s}(f)=\frac{1}{|a|}\hat{s}(f/a),\ \text{где } t \text{ и } f \text{ — время и частота.}$$

- Ковариантность ВЧП $\Pi_{\hat{s}}(t;f)$ в форме "гиперболического" сдвига времени

$$\Pi_{H_c\hat{s}}(t;f)=\Pi_{\hat{s}}(t-c/f;\ f)$$

при условии преобразования частотной формы сигнала $H_c\hat{s}$, состоящем в модуляции его частотного спектра (в области его преобразования Фурье $\hat{s}(f)$) согласно соотношению

$$(H_c\hat{s})(f)=e^{-2p\cdot j\cdot c\cdot\ln(f/f_r)}\cdot\hat{s}(f).$$

Каждое "гиперболическое" ВЧП относится к группе преобразований с комбинированным свойством ковариантности и может быть выражено в виде любого из трех соотношений (1), (2), (3). Каждое из этих соотношений отличается формой ядра — видом подынтегральной функции и областью интегрирования переменных, которые входят в структуру ядра [4]:

$$H_{\hat{s}}(t,f)=\frac{1}{f}\int_0^\infty\int_0^\infty \Gamma_H\left(\frac{f_1}{f},\frac{f_2}{f}\right)\times$$

$$\times\left\{\exp\left[2p\ jtf\cdot\ln\left(\frac{f_1}{f_2}\right)\right]\right\}\cdot\hat{s}(f_1)\cdot\hat{s}^*(f_2)\cdot\mathrm{d}f_1\,\mathrm{d}f_2= \qquad (1)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_H\left(\ln\left(\frac{f}{f_r}\right)-b,b\right)\cdot V_{\hat{s}}(b,b)\times$$

$$\times\left\{\exp[2p\ jtf\,b]\right\}\cdot\mathrm{d}b\,\mathrm{d}b\ = \qquad (2)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_H(z,b)\cdot B_{\hat{s}}(z,b)\times$$

$$\times\left\{\exp\left[2p\ j(tf\,b-z)\cdot\ln\left(\frac{f}{f_r}\right)\right]\right\}\cdot\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}b_2. \qquad (3)$$

В выражениях (2) и (3) константа f_r ($f_r>0$) является фиксированным значением опорной, или нормирующей частоты, а в качестве ядер преобразования используются так называемые

— Г-произведение сигналов

$$V_{\hat{s}}(b,b)=f_r\cdot e^b\cdot\hat{s}(f_r\cdot e^{b+b/2})\cdot\hat{s}^*(f_r\cdot e^{b-b/2}); \qquad (3')$$

— Г-двойственная функция $B_{\hat{s}}(z,b)$ (аналог двойственной функции, приведенной в систематизированной сводке, содержащейся в [6], [7]):

$$B_{\hat{s}}(z,b)=\int_{-\infty}^{\infty}V_{\hat{s}}(b,b)\cdot e^{2p\ jz\,b}\mathrm{d}b=$$

$$=\int_0^\infty\hat{s}(f\cdot e^{b/2})\cdot\hat{s}^*(f\cdot e^{b/2})\cdot e^{2p\ jz\cdot\ln\left(\frac{f}{f_r}\right)}\cdot\mathrm{d}f. \qquad (4)$$

---

[3] Частотная зависимость сдвига сигнала по времени (его запаздывания), обычно обусловленная особенностями распространения отраженного сигнала при дистанционном зондировании, в ряде случаев имеет вид $1/f$, т. е. происходит по гиперболическому закону. Поэтому далее для краткости используются термины: гиперболический сдвиг по времени, гиперболическое (Г) время-частотное преобразование, Г-произведение функций-сигналов, Г-двойственная функция.

[4] Отметим, что здесь используется преобразование Фурье так называемой аналитической формы сигнала со спектром только в области положительных частот, т. е. $\hat{s}(f)=0$ для $f<0$.

Двухпараметрические функции (ядра преобразований) $\Gamma_H(b_{1,}\, b_2)$, $\Phi_H(b, b)$, $Y_H(z\,, b)$ полностью определяют Г-ВЧП. Характеризуя одно и то же ВЧП, они взаимно связаны соотношениями (5):

$$\Gamma_H(b_1,b_2) = \frac{1}{\sqrt{b_1 b_2}}\Phi_H\left(-\ln\sqrt{b_1 b_2}\,,\, \ln\frac{b_1}{b_2}\right);$$
$$\Psi_H(z\,, b) = \int_{-\infty}^{\infty}\Phi_H(b, b)\,e^{2p\, jz\, b}\mathrm{d}b. \qquad (5)$$

При обработке сигналов многие Г-ВЧП дают анализ с постоянным качеством на всей (интересующей нас части) время-частотной плоскости. Это свойство алогично вейвлет-преобразованию (и преобразованиям рассмотренной ниже группы аффинных ВЧП), в которых более высокие частоты анализируются с лучшим временным разрешением и худшим частотным разрешением, при этом площадь ячейки разрешения сохраняется одинаковой на всей плоскости время—частота [8], [9].

К группе Г-ВЧП относится преобразование *Q* Альтес—Мариновича (Altes, Marinovich [10]), представленное соотношением (6), и преобразование *P* Бертрана (Bertrand [6], [11]), которое представлено соотношением (7):

$$Q_{\hat{s}}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} V_{\hat{s}}\left(\ln\frac{f}{f_r},\, b\right)\cdot e^{2p\, jtf\, b}\,\mathrm{d}b =$$
$$= f\int_{-\infty}^{\infty}\hat{s}\left(f\cdot e^{b/2}\right)\cdot\hat{s}^*\left(f\cdot e^{-b/2}\right)e^{2p\, jtf\, b}\,\mathrm{d}b; \qquad (6)$$

$$P_{\hat{s}}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} V_{\hat{s}}\left(\ln\frac{f}{f_r} - A_P(\beta),\, \beta\right)\cdot e^{2p\, jtf\, b}\,\mathrm{d}\beta =$$
$$= f\int_{-\infty}^{\infty}\hat{s}\left(f\cdot G_P(\beta)e^{b/2}\right)\cdot\hat{s}^*\left(f\cdot G_P(\beta)e^{-b/2}\right)\times$$
$$\times G_P(\beta)e^{2p\, jtf\, b}\,\mathrm{d}\beta, \qquad (7)$$

где $G_P(b) = \dfrac{b/2}{\mathrm{sh}(b/2)}$; $A_P(b) = -\ln G_P(b)$.

РАЗНОВИДНОСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ВРЕМЯ-ЧАСТОТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В группе Г-ВЧП можно выделить несколько подгрупп, в каждой из которых ВЧП (кроме основного комбинированного свойства ковариантности) обладает некоторым дополнительным свойством ковариантности (СК) или особенностью ядра Г-ВЧП. Любое Г-ВЧП обладает СК к одновременному изменению масштаба времени и частоты и к гиперболическому сдвигу времени. В качестве дополнительного СК будут рассмотрены несколько вариантов. Г-ВЧП с таким дополнительным свойством составляют подгруппу с новым названием, которое отражает вид дополнительного СК (ДСК) или специальное свойство ядра (в частности, его локализацию) [5)].

Подгруппа, в которой в виде ДСК принято свойство ковариантности к простому сдвигу времени, условно может быть названа подгруппой аффинных Г-ВЧП [6)]. С точки зрения свойств аффинные Г-ВЧП могут рассматриваться как пересечение аффинного класса преобразований с группой всех гиперболических ВЧП. Как увидим ниже, аффинные Г-ВЧП обладают также свойством локализации ядра, т. е. расположением значений ядра вдоль некоторой линии на время-частотной плоскости.

Подгруппу, состоящую из Г-ВЧП с ДСК к степенной модификации временно́го сдвига, удобно назвать степенно́й подгруппой (относительно общей группы Г-ВЧП). Степенна́я подгруппа может считаться обобщением аффинной подгруппы: при временно́м сдвиге со степенью единица степенные гиперболические преобразования эквивалентны аффинным с точностью до выбора единиц измерения времени и частоты.

Дополнительные свойства ковариантности (кроме основных, определяющих эту группу Г-ВЧП в целом) показаны в табл. 1 для Г-ВЧП аффинной и степенной подгрупп, а также для Г-ВЧП с локализованным ядром.

ХАРАКТЕРИСТИКА ПОДГРУПП Г-ВЧП

Особенностью преобразований сигнала из подгрупп Г-ВЧП является наличие у них помимо двух основных СК (ковариантности ко время-частотному масштабированию и к гиперболическому сдвигу времени) еще некоторого дополнительного свойства, которое определяет их специфику.

[5)] Последующий анализ относится к гиперболическим ВЧП, которые характеризуются свойством ковариантности к изменению масштаба и гиперболическому смещению времени. При анализе Г-ВЧП с дополнительными свойствами ковариантности (ДСК) для краткости будет использоваться термин "подгруппа", который подразумевает, что это "подгруппа Г-ВЧП с определенным ДСК".

[6)] Именно аффинные (время-масштабные вейвлет-) преобразования обладают ковариантностью к изменению масштаба и (простому) сдвигу времени.

Табл. 1. Дополнительные свойства у подгрупп гиперболических ВЧП и вид их ядра

Тип подгруппы	Дополнительные свойства	Ядро преобразования $\Phi_H(b,b)$
Аффинные Г-ВЧП	$H_{S_r\hat s}(t,f)=H_{\hat s}(t-t;f)$ при $(S_r\hat s)(f)=\exp(-2p\,jt\,f)\cdot\hat s(f)$	$B_H(b)\cdot d\left(b-\ln\frac{\mathrm{sh}(b/2)}{b/2}\right)$
Степенные Г-ВЧП	$H_{D_c^{(k)}\hat s}(t,f)=H_{\hat s}(t-ct_k(f);f)$ при $t_k(f)=\frac{k}{f_r}\left(\frac{f}{f_r}\right)^{k-1}$, $(D_c^{(k)}\hat s)(f)=\exp\left(-2p\,jc\left(\frac{f}{f_r}\right)^{k}\right)\cdot\hat s(f)$	$B_H(b)\cdot d\left(b-\frac{1}{k}\cdot\ln\frac{\mathrm{sh}(kb/2)}{kb/2}\right)$
Г-ВЧП с локализованным ядром	$H_{\hat s_c}(t,f)=r^2(f)\cdot d\left(t-c\cdot x'(f)\right)$ при $\hat s_c(f)=r(f)\cdot\exp\left(-2p\,jcx(f)\right)$	$B_H(b)\cdot d\left(b-A_H(b)\right)$ (при дополнительных условиях)

Подгруппа Г-ВЧП с дополнительным СК к простому (независимому от частоты) смещению времени

Если неизвестно, является ли при распространении сигнала в неоднородной среде его задержка (временнóе смещение) частотно-зависимой, и форма время-частотного распределения сигнала близка к гиперболической, то для корректного анализа такого сигнала желательно, чтобы его Г-ВЧП имело дополнительное СК к простому (независимому от частоты) смещению времени. Подгруппа ВЧП с таким СК должна обладать свойствами ковариантности к масштабированию, гиперболическому смещению времени и к постоянному временнóму смещению. У преобразований из этой подгруппы двумерное ядро обычных Г-ВЧП выражается как произведение двух одномерных ядер.

Подгруппа Г-ВЧП с локализацией ядра

Не менее важна подгруппа Г-ВЧП с локализованным ядром[7]. Подгруппа состоит из всех Г-ВЧП, у которых ядро $\Phi_{\text{H}}(b,b)$ из (2) локализовано вдоль кривой $b=A_H(b)$ на плоскости (b,b), т. е. оно может быть представлено в форме соотношения (8):

$$\Phi_H(b,b)=B_H(b)\cdot d(b-A_H(b)), \qquad (8)$$

где $A_H(b)$ и $B_H(b)\geq 0$ — произвольные функции.

С учетом того, что (8) влечет $Y_H(V,b)=$ $=B_H(b)\exp\left(2p\,jV A_H(b)\right)$ в (3), подстановка (8) в (2) позволяет выразить локализованное ядро в соответствующей подгруппе Г-ВЧП в виде:

$$H_{\hat s}(t,f)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}V_{\hat s}\left(\ln\frac{f}{f_r}-A_H(b);b\right)\cdot B_H(b)\exp(2p\,jtf\,b)\,\mathrm{d}b=$$
$$=f\int_{-\infty}^{\infty}\hat s\left(f\exp\left(-A_H(b)+\frac{b}{2}\right)\right)\times$$
$$\times\hat s^{*}\left(f\exp\left(-A_H(b)-\frac{b}{2}\right)\right)\cdot B_H(b)\cdot e^{-A_H(b)}\times$$
$$\times\exp(2p\,jtf\,b)\,\mathrm{d}b. \qquad (9)$$

Двумерное ядро у Г-ВЧП этой подгруппы может быть выражено через две функции $A_H(\beta)$ и $B_H(\beta)$ ("одномерные ядра"), которые полностью характеризуют определенное ими преобразование с локализованным ядром.

Преобразования из подгруппы с локализованными ядрами полезны для анализа сигналов с определенной спецификой время-частотного распределения. В частности, можно рассмотреть семейство сигналов, которые в частотной области

[7] Идея использования преобразований с локализованным ядром разработана Бертраном (Bertrand [11]) в связи с исследованиями в области вычислительной томографии.

Табл. 2. Одномерные ядра-компоненты для преобразований сигнала подгруппой Г-ВЧП с локализацией ядра

Вид преобразования	Одномерные ядра-компоненты в соотношении (9)	
	$A_H(b)$	$B_H(b)$
Преобразование Альтес—Мариновича	0	1
Преобразование Бертрана	$\ln\left(\frac{\mathrm{sh}(b/2)}{b/2}\right)$	1
Преобразование Папандреу—Супапола	$\frac{1}{k}\ln\left(\frac{\mathrm{sh}(kb/2)}{kb/2}\right)$	1
Обобщенное степенно́е преобразование с масштабированием частоты $Q_{\hat{s}}^{(a)}(t,f)$	$a\,\beta$	1

имеют вид $\hat{s}_c(f) = r(f)\cdot\exp[-2p\, jcx(f)]$, положительную амплитуду $r(f)$, фазовую функцию $x(f)$, константу c и функцию групповой задержки $t(f) = cx'(f)$. Для такого семейства сигналов при определенных условиях[8)] может быть определено Г-ВЧП, которое будет хорошо локализоваться (концентрироваться) вдоль кривой, определяемой частотной зависимостью групповой скорости $cx'(f)$, т. е. преобразование вида $H_{\hat{s}}(t; f) = r^2(f)\cdot d(t - cx'(f)$.

Преобразования подгруппы с локализованным ядром служат концептуальной основой для некоторых важных Г-ВЧП, включая те, которые относятся к аффинной подгруппе или к подгруппе степенных Г-ВЧП. Известные преобразования подгруппы с локализованным ядром — это преобразование $Q_{\hat{s}}(t,f)$ Альтес—Мариновича (6), преобразование $P_{\hat{s}}(t,f)$ Бертрана (7), преобразование Папандреу (Papandreou) [14] и анализируемое ниже обобщенное степенно́е распределение с масштабированием частоты $Q_{\hat{s}}^{(a)}(t,f)$. Одномерные ядра, произведением которых могут быть представлены двухпараметрические ядра этих преобразований, показаны в табл. 2.

Аффинная подгруппа

Общим требованием к преобразованиям аффинной подгруппы (кроме общих СК, свойственных для Г-ВЧП) является наличие дополнительного СК к постоянному (частотно-независимому) сдвигу времени. Поскольку весь анализ производится для частотной формы сигнала, т. е. его ПФ[9)], то с учетом того, что сдвиг сигнала по времени соответствует фазовому множителю у его ПФ, дополнительное свойство ковариантности, определяющее аффинную подгруппу, выражается соотношениями:

$$H_{S_t\hat{s}}(t,f) = H_{\hat{s}}(t-t; f) \quad \text{при} \quad (S_t\,\hat{s})(f) = \exp(-2p\, jt\, f)\cdot\hat{s}(f). \tag{10}$$

Обладая свойствами ковариантности к временному сдвигу сигнала, к масштабированию и к гиперболическому (частотно-зависимому) сдвигу времени, преобразования аффинной подгруппы

[8)] Для преобразования H анализируемой подгруппы Г-ВЧП условия, гарантирующие существование ядра, локализованного вдоль групповой скорости сигнала, приведены в [13] и достаточно сложны. В предположении, что функция $\Xi_{f,b}(b) \equiv x(f\cdot e^{-b+b/2}) - x(f\cdot e^{-b-b/2})$ обратима и дифференцируема для любых фиксированных f и β, необходимо выполнение следующих условий: 1) существует функция $A_H(\beta)$, удовлетворяющая соотношению $\Xi_{f,b}(A_H(b)) = fx'(f)\cdot b$; 2) отношение $r^2(f)/R_{f,b}(A_H(b))$, где $R_{f,b}(b) = r(f\cdot e^{-b+b/2})\cdot r(f\cdot e^{-b-b/2})e^{-b}$, не зависит от f; 3) ядро $\Phi_H(b,b)$ имеет вид $\Phi_H(b,b) = B_H(b)d(b - A_H(b))$ при $B_H(b) = \dfrac{r^2(f)}{R_{f,b}(A_H(b))} \geq 0$.

[9)] Как указывалось в примеч. 2), мы, подчеркивая это, в качестве индекса ВЧП указываем не сигнал s, а его ПФ $\hat{s}$.

Г-ВЧП относятся к общему аффинному классу — к классу преобразований, который включает не только аффинные Г-ВЧП, но и (аффинные) время-масштабные преобразования типа вейвлет-преобразования и общего преобразования Бертрана [10]. Фактически подгруппа аффинных Г-ВЧП принадлежит пересечению множества общих преобразований аффинного класса и множества (за счет многообразия формы ядра) преобразований из группы гиперболических ВЧП [11].

Наличие у Г-ВЧП свойства ковариантности к простому сдвигу времени эквивалентно выполнению специального условия. Это условие получается подстановкой (2) в (10) и имеет форму соотношения (11):

$$\Phi_H(b,b)\cdot\exp\{-2p\ jtb[e^{-b}(e^{b/2}-e^{-b/2})-b]\}=$$
$$=\Phi_H(b,b)\ \text{при}\ \forall t,b,b. \qquad (11)$$

Выполнение (11) возможно только при равенстве нулю экспоненты слева, поэтому условие переходит в более простую форму

$$e^{-b}(e^{b/2}-e^{-b/2})-b=0,\ \text{эквивалентную}$$
$$b=\ln\left(\frac{\mathrm{sh}(b/2)}{b/2}\right).$$

Последнее выражение определяет явную зависимость b от β и означает, что для ядра $\Phi_H(b,b)$ преобразования аффинной подгруппы Г-ВЧП требуется выполнение условия $b=\ln\left(\frac{\mathrm{sh}(b/2)}{b/2}\right)$, которое в свою очередь приводит к ядру со своеобразной формой локализации:

$$\Phi_H(b,b)=B_H(b)\cdot d(b-A_P(b)), \qquad (12)$$

где $A_P(b)=\ln\left(\frac{\mathrm{sh}(b/2)}{b/2}\right)$; $B_H(b)$ — произвольная функция [12].

Таким образом, только Г-ВЧП, имеющее ядро $\Phi_H(b,b)$ с формой по выражению (12), обладает свойством ковариантности (10) (к частотно-независимому смещению времени) и принадлежит к аффинной подгруппе. Сравнение выражений (12) и (8) показывает, что аффинные Г-ВЧП принадлежат также и подгруппе Г-ВЧП с локализованными ядрами. Кроме того, комбинация выражений (9) и (12) позволяет получить общий вид (13) для Г-ВЧП аффинной подгруппы:

$$H_{\hat{s}}(t,f)=$$
$$=f\int_{-\infty}^{\infty}\hat{s}\left(f\,G_P(b)e^{b/2}\right)\cdot\hat{s}^*\left(f\,G_P(b)e^{-b/2}\right)\times$$
$$\times G_P(b)\cdot B_H(b)\cdot\exp(2p\ jtf\,b)\,\mathrm{d}b, \qquad (13)$$

где $G_P(b)=\dfrac{b/2}{\mathrm{sh}(b/2)}=e^{-A_P(b)}$; $B_H(b)$ — произвольная функция от β. Следовательно, преобразования аффинной подгруппы Г-ВЧП характеризуются только однопараметрическим ядром $B_H(b)$.

Используя соотношение (13), можно показать, что любое преобразование аффинной подгруппы Г-ВЧП можно выразить через Г-ВЧП Бертрана (7) в виде свертки (14), включающей операцию масштабирования временно́й переменной:

$$H_{\hat{s}}(t,f)=f\int_{-\infty}^{\infty}b_H\left(f(t-t')\right)\cdot P_{\hat{s}}(t',f)\mathrm{d}t', \qquad (14)$$

где $b_H(c)$ — обратное преобразование Фурье от $B_H(b)$ [13].

Степенна́я подгруппа

Концепция аффинной подгруппы Г-ВЧП модифицируется при рассмотрении более сложной формы частотной зависимости функции групповой задержки, которая для частотной формы сигнала имеет вид $t(f)=cx'(f)$ и рассмотрена выше для преобразований подгруппы с локализованными ядрами. По такому принципу введения усложненной формы зависимости $t(f)$ формируется степенная подгруппа Г-ВЧП. Ее преобразования характеризуются дополнительным параметром k. Причем, кроме свойства ковариантности к масштабированию (обычному СК для всех Г-ВЧП), преобразования степенно́й подгруппы имеют СК к "степенно́му сдвигу времени":

---

[10] Общее преобразование Бертрана (в отличие от им же введенного гиперболического ВЧП) принадлежит к классу билинейных время-масштабных преобразований [6, 7].

[11] Преобразование с типовыми свойствами аффинной подгруппы Г-ВЧП получено Бертраном—Бертраном (J. Bertrand, P. Bertrand) [11] и было выделено как часть класса всех аффинных преобразований. По форме оно эквивалентно выражению (7).

[12] Строго говоря, полученная форма ядра (12) и свойство ковариантности (10) связаны двусторонней импликацией, т. е. условие (12) является необходимым и достаточным для ковариантности Г-ВЧП относительно простого временно́го сдвига.

[13] Важность соотношения (14) состоит в том, что при наличии алгоритма для вычисления преобразования Бертрана с помощью сравнительно простой операции свертки можно получить любое преобразование аффинной подгруппы Г-ВЧП. С этой точки зрения преобразование Бертрана может считаться основным в аффинной подгруппе Г-ВЧП подгрупп.

$$H_{D_c^{(k)}\hat{s}}(t,f) = H_{\hat{s}}\left(t - ct_k(f), f\right)$$
$$\text{при } (D_c^{(k)}\hat{s})(f) = e^{-2\pi jc\xi_k(f)}\hat{s}(f), \tag{15}$$

где $\xi_k(f) = \left(\dfrac{f}{f_r}\right)^k; \quad t_k(f) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f}\xi_k(f) = \dfrac{k}{f_r}\left(\dfrac{f}{f_r}\right)^{k-1}$
при $f > 0$ и $k \neq 0$.

Оператор $D_c^{(k)}$ является фазовым фильтром со степеннóй зависимостью для функции групповой задержки $t_k(f)$ для сигнала в частотной форме. При значении параметра $k = 1$ преобразования степеннóй подгруппы просто относятся к аффинной подгруппе Г-ВЧП. При других значениях параметра k степеннáя подгруппа состоит из Г-ВЧП, удовлетворяющих СК к степеннóму сдвигу времени в соответствии с соотношениями (15). Такое свойство преобразований полезно при анализе сигналов, распространяющихся в среде с частотно-зависимым рассеянием или поглощением.

Преобразования степеннóй подгруппы при определенных условиях могут иметь локализованную форму ядра (т.е. относиться одновременно и к подгруппе с локализованными ядрами, описываемыми соотношением (9)). Так, если у преобразования с локализованной формой ядра (9) однопараметрические ядра $A_H(b)$ и $\mathrm{B}_H(b)$ будут иметь форму

$$A_H(b) = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{\mathrm{sh}(kb/2)}{kb/2}\right); \tag{16}$$
$\mathrm{B}_H(b)$ — функция произвольного вида,

то это преобразование будет одновременно относиться к степеннóй подгруппе. С учетом такой взаимосвязи можно считать, что степеннáя подгруппа является частью подгруппы Г-ВЧП с локализацией ядра. Условием принадлежности преобразования (9) к степеннóй подгруппе является специальная структура его однопараметрических ядер в форме выражения (16). Таким образом, любое преобразование степеннóй подгруппы, имея фиксированную форму однопараметрического ядра $A_H(b)$, характеризуется только формой ядра $B_H(b)$.

Особое место в степеннóй подгруппе занимает преобразование $P_{\hat{s}}^{(k)}$, у которого в (16) $B_H(b) = 1$. Роль этого преобразования в степеннóй подгруппе такая же, как у преобразования $P_{\hat{s}}$ в аффинной подгруппе. Любое преобразование степеннóй подгруппы может быть представлено в виде свертки $P_{\hat{s}}^{(k)}$ с масштабированием временнóй переменной:

$$H_{\hat{s}}(t,f) = \frac{1}{|k|}\int_{-\infty}^{\infty} b_H\left(\frac{f}{k}(t-t')\right)\cdot P_{\hat{s}}^{(k)}(t',f)\mathrm{d}t', \tag{17}$$

где $b_H(c)$ — обратное преобразование Фурье от $B_H(b)$.

ОБЩИЕ СВОЙСТВА Г-ВЧП

Кроме характеристики каждой из подгрупп гиперболических ВЧП, (с точки зрения теории время-частотного анализа нестационарных сигналов ИИС) большое значение имеют общие свойства Г-ВЧП. Главные среди этих свойств: обратимость ядер преобразования; сохранение нормы и внутреннего произведения Г-ВЧП (и произведения соответствующих ядер) [14]. Второе из этих свойств равносильно справедливости формулы Мойела [15], [16]. Обратимость означает, что при преобразовании отсутствуют существенные потери информации относительно сигнала.

Обратимость Г-ВЧП на уровне ядра

Согласно соотношениям (1)–(3), Г-ВЧП $H_{\hat{s}}(t,f)$ выражается с помощью специального линейного преобразования через двухпараметрические ядра $V_{\hat{s}}(b,\beta)$ и $B_{\hat{s}}(\zeta,\beta)$. При определенных условиях обратимости Г-ВЧП (свойства регулярности) ядра могут быть представлены выражениями (18):

$$V_{\hat{s}}(b,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \Phi_H^{-1}\left(b - \ln\frac{f}{f_r}, \beta\right)\cdot H_{\hat{s}}(t,f)\times$$
$$\times\exp(-2\pi j t f\beta)\cdot\mathrm{d}t\,\mathrm{d}f,$$
$$B_{\hat{s}}(\zeta,\beta) = \tag{18}$$
$$= \Psi_H^{-1}(\zeta,\beta)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\Psi_H(\zeta,\beta)\cdot H_{\hat{s}}(t,f)\times$$
$$\times\exp\left(-2\pi j(tf\beta - \zeta\cdot\ln\frac{f}{f_r}\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}f_2,$$

где обратные ядра $\Phi_H^{-1}(b,\beta)$ и $\Psi_H^{-1}(\zeta,\beta)$ взаимосвязаны соотношением

$$\Psi_H^{-1}(\zeta,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty}\Phi_H^{-1}(b,\beta)\Phi_H(b,\beta)\cdot e(2\pi j\zeta b)\cdot\mathrm{d}b.$$

В свою очередь зависимости между обратными ядрами и прямыми ядрами выражаются двумя соотношениями (19):

[14] По математической терминологии эти свойства называют (соответственно) регулярностью и унитарностью.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_H^{-1}\left(b-b',b\right)\cdot \Phi_H\left(b',b\right)\cdot \mathrm{d}b' = d\,(b),$$
$$\Psi_H^{-1}\left(z,b\right)\cdot \Psi_H\left(z,b\right) = 1. \qquad (19)$$

Одним из преобразований [15], удовлетворяющих (19), является обобщенное преобразование Бертрана (7), для которого выполняется также и формула Мойела.

Из существования обратимости вытекают некоторые результаты относительно структуры Г-ВЧП.

1) При обратимости преобразований на уровне ядра сигнал может быть восстановлен с точностью до постоянного сдвига фазы. Для этого по (18) вычисляется $V_{\hat{s}}(b,b)$, после чего из (3') следует, что сигнал (с точностью до неизвестного сдвига фазы $\hat{f}$) определятся на основе выражения для $V_{\hat{s}}(b,b)$ по соотношению

$$\hat{s}(f) = \frac{V_{\hat{s}}(\ln\frac{\sqrt{f\cdot\hat{f}}}{f_r};\ln\frac{f}{\hat{f}})}{\sqrt{f\cdot V_{\hat{s}}(\ln\frac{\hat{f}}{f};0)}}\cdot e^{j\hat{f}},$$

где $\hat{f}$ выбирается произвольно при условии, что $V_{\hat{s}}(\ln\frac{\hat{f}}{f};0)\neq 0$.

2) При обратимости Г-ВЧП любое (билинейное) представление сигнала $\breve{H}_{\hat{s}}(\mathrm{Q})$ может быть получено с помощью линейного преобразования

$$\breve{H}_{\hat{s}}(\mathrm{Q}) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} K_{\breve{H}}(\mathrm{Q};f_1,f_2)\cdot\hat{s}(f_1)\cdot\hat{s}^*(f_2)\cdot \mathrm{d}f_1\,\mathrm{d}f_2, \qquad (20)$$

где $\mathbf{\Theta}$ — двумерный вектор параметров (таких как (t, f) в случае Г-ВЧП); $K_{\breve{H}}(\mathbf{\Theta};f_1,f_2)$ — ядро, характеризующее преобразование $\breve{H}$ [17].

Использование выражения для $\hat{s}(f_1)\cdot\hat{s}^*(f_2)$ (из соотношения (3')) в (20) показывает, что преобразование $\breve{H}_{\hat{s}}(\mathbf{\Theta})$ может быть выведено из обратимого Г-ВЧП $H_{\hat{s}}(\mathbf{\Theta})$ с помощью линейного преобразования в форме соотношения (21):

$$\breve{H}_{\hat{s}}(\mathbf{\Theta}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} L_{\breve{H}H}(\mathbf{\Theta};t',f')\cdot H_{\hat{s}}(t',f')\cdot \mathrm{d}t'\mathrm{d}f', \qquad (21)$$

где ядро $L_{\breve{H}H}(\mathbf{\Theta};t',f')$ определяется выражением

$$L_{\breve{H}H}(\mathbf{\Theta};t',f') = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_{\breve{H}}(\mathbf{\Theta};f\,e^{b/2},f\,e^{-b/2})\times$$
$$\times\Phi_H^{-1}\left(\ln\frac{f}{f'};b\right)\cdot e^{-2pt'f'b}\cdot \mathrm{d}f\,\mathrm{d}b.$$

Если билинейное представление сигнала [16] $\breve{H}_{\hat{s}}(\mathbf{\Theta})$ является само гиперболическим ВЧП, то (21) имеет более простую форму (22):

$$\breve{H}_{\hat{s}}(t,f) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} l_{\breve{H}H}\left(tf-t'f';\ln\frac{f}{f'}\right)\cdot H_{\hat{s}}(t',f')\cdot \mathrm{d}t'\mathrm{d}f', \qquad (22)$$

где

$$l_{\breve{H}H}(c,b) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\breve{H}}\left(b-b';b\right)\cdot \Phi_H^{-1}(b';b)\cdot e^{2p\,jcb}\,\mathrm{d}b'\mathrm{d}b.$$

3) Для обратимого Г-ВЧП линейное преобразование сигнала порождает линейное преобразование Г-ВЧП. Если H — обратимое Г-ВЧП, то билинейное ВЧП $H_{\breve{s}}(t,f)$ линейно преобразованного сигнала (в частотной форме) вида $\breve{s}(f) = \int_0^{\infty} T(f,f')\hat{s}(f')\mathrm{d}f'$ имеет линейно преобразованное Г-ВЧП первоначального сигнала:

$$H_{\breve{s}}(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} L_{TH}(t,f;t',f')\cdot H_{\hat{s}}(t',f')\cdot \mathrm{d}t'\mathrm{d}f',$$

где

$$L_{TH}(t,f;t',f') = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T(f_1e^{b_1/2};f_2e^{b_2/2})\times$$
$$\times T^*(f_1e^{-b_1/2};f_2e^{-b_2/2})\times\Phi_T\left(\ln\frac{f}{f_1};b_1\right)\cdot\Phi_T^{-1}\left(\ln\frac{f_2}{f'};b_2\right)\times$$
$$\times\exp[2p\,j(tf\,b_1-t'f'b_2)]\cdot \mathrm{d}f_1\mathrm{d}b_1\,\mathrm{d}f_2\,\mathrm{d}b_2.$$

Все соотношения этого раздела получены Хлаватчем (Hlawatsch) [17]. Формализация характера изменения обратимого Г-ВЧП при линейном пре-

---

[15] Последнее соотношение в (19) требует, чтобы $Y_H^{-1}\left(z,b\right)=1/Y_H\left(z,b\right)$, поэтому Г-ВЧП обратимо на уровне ядра только в том случае, если $Y_H\left(z,b\right)$ не имеет нулевых значений. В общем случае такое простое соотношение возможно только при выполнении формулы Мойела, которая применительно к Г-ВЧП анализируется ниже.

[16] В последних трех соотношениях, как и ранее, имеется в виду так называемая аналитическая форма сигнала с ПФ $\hat{s}(f)\neq 0$ только при положительных частотах.

образовании сигнала, рассмотренная в 3), может служить основой для получения свойств ковариантности.

4) При обратимости Г-ВЧП базис пространства сигналов[17)] может быть модифицирован в двумерный базис для этого преобразования. Если $\{\hat{y}_k(f)\}_{k=1,2,...,N}$ — это набор линейно-независимых сигналов (набор полный в L_2), т. е. базис пространства сигналов, и если H — это обратимое Г-ВЧП, то соответствующий набор гиперболических ВЧП от авто- и кросскорреляционных функций (АККФ) этих $\{\hat{y}_k(f)\}_{k=1,2,...,N}$ является двухпараметрическим базисом для совокупности всех время-частотных представлений сигнала. С помощью набора $\{H_{\text{АККФ}(\hat{y}_i;\hat{y}_k)}\}_{i,k=1,2,...,N}$ можно представить любое время-частотное преобразование[18)] сигнала в виде линейной комбинации. Такая форма разложения время-частотного представления сигнала используется при решении задач оптимизации ВЧП [18–20].

Свойство обратимости Г-ВЧП для подгруппы с локализованным ядром

В отдельных подгруппах Г-ВЧП, которые характеризуются дополнительными свойствами ковариантности, вычисление обратных ядер производится с помощью более простых соотношений. Обратные ядра для обратимого Г-ВЧП с локализованным ядром определяются соотношениями (23):

$$\Phi_H^{-1}(b,b)=\frac{1}{B_H(b)}d\left(b+A_H(b)\right),$$
$$Y_H^{-1}(z,b)=\frac{1}{B_H(b)}\exp[-2p\, jz\, A_H(b)], \tag{23}$$

где $A_H(b)$ и $B_H(b)$ определены в (8). Для обратимости преобразования H требуется условие $B_H(b)\neq 0$, а $A_H(b)$ может быть произвольным.

Если H и $\tilde{H}$ относятся к подгруппе Г-ВЧП с локализованными ядрами и H обратимо, то ядро $l_{\tilde{H}H}$, преобразующее $H_{\hat{s}}$ в $\tilde{H}_{\hat{s}}$, согласно (22), имеет более простую форму:

$$l_{\tilde{H}H}(c,b)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_{\tilde{H}}(b)}{B_H(b)}\cdot d\left(b-[A_{\tilde{H}}(b)-A_H(b)]\right)\times$$
$$\times\exp(2p\, jcb)\cdot \mathrm{d}b.$$

При условии $A_{\tilde{H}}(b)=A_H(b)$, которое может удовлетворяться в аффинной или степенно́й подгруппах Г-ВЧП, преобразующее ядро $l_{\tilde{H}H}$ еще более упрощается, и оно выражается зависимостью:

$$l_{\tilde{H}H}(c,b)=w_{\tilde{H}H}(c)\cdot d(b),$$

$$\text{где } w_{\tilde{H}H}(c)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_{\tilde{H}}(b)}{B_H(b)}\cdot\exp(2p\, jcb)\cdot \mathrm{d}b.$$

Одновременно соотношение (22), выражающее взаимосвязь преобразований H и $\tilde{H}$, тоже приобретает в этом случае более простую форму свертки с масштабированием (24):

$$\tilde{H}_{\hat{s}}(t,f)=f\int_{-\infty}^{\infty}w_{\tilde{H}H}\left((f(t-t')\right)\cdot H_{\hat{s}}(t',f)\cdot \mathrm{d}t'. \tag{24}$$

Свойство обратимости Г-ВЧП аффинной и степенно́й подгрупп

Аффинные Г-ВЧП составляют часть подгруппы гиперболических преобразований с локализованным ядром, поэтому обратные ядра $\Phi_H^{-1}(b,b)$ и $Y_H^{-1}(z,b)$ у обратимых преобразований аффинной подгруппы, как видно из (23), определяются соотношениями

$$\Phi_H^{-1}(b,b)=\frac{1}{B_H(b)}d\left(b+A_P(b)\right),$$
$$Y_H^{-1}(z,b)=\frac{1}{B_H(b)}\exp[-2p\, jz\, A_P(b)],$$

где $A_P(b)=\ln\left(\frac{\operatorname{sh}(b/2)}{b/2}\right)$. (При этом преобразование H обратимо, только если $B_H(b)$ не обращается в нуль).

С помощью обратимого аффинного Г-ВЧП H любое другое преобразование той же подгруппы может быть выведено с помощью операции *свертки с масштабированием* (24).

Анализ, проведенный для Г-ВЧП аффинной подгруппы, применим и для степенно́й подгруппы, за исключением того, что выражение $A_P(b)$ для однопараметрического ядра у обратимых Г-ВЧП степенно́й подгруппы заменяется на

$$A_{P^{(k)}}(b)=\frac{1}{k}\cdot\ln\frac{\operatorname{sh}(kb/2)}{kb/2}.$$

[17)] Т. к. сигналы всегда имеют конечную энергию, то базисом пространства сигналов является фактически базис пространства L_2 функций-сигналов, т. е. квадратично-интегрируемых функций на любом конечном интервале. В контексте нашего анализа, как и ранее, рассматривается частотная форма сигнала — $\hat{s}(f)$, его ПФ; и $\hat{s}(f)=0$ при $f<0$, т. е. сигнал считается аналитическим.

[18)] Имеется в виду время-частотное представление *F*(*t*, *f*), являющееся результатом преобразования сигнала любым ВЧП.

Формула Мойела, ограничения на ядро и обратимость ядер

При определенных условиях линейные преобразования, лежащие в основе выражений (1–3) для Г-ВЧП, сохраняют величину внутреннего произведения [19]:

$$\left\langle H_{\hat{s}_1}, H_{\hat{s}_2} \right\rangle = \left\langle V_{\hat{s}_1}, V_{\hat{s}_2} \right\rangle \text{ и } \left\langle H_{\hat{s}_1}, H_{\hat{s}_2} \right\rangle = \left\langle B_{\hat{s}_1}, B_{\hat{s}_2} \right\rangle,$$

где $V_{\hat{s}}(b,b)$ и $V_{\hat{s}}(z,b)$ определены выражениями (3') и (4).

Свойство сохранения внутреннего произведения (СВП) в другой форме эквивалентным образом выражается соотношением $\left\langle H_{\hat{s}_1}, H_{\hat{s}_2} \right\rangle = \left| \left\langle \hat{s}_1, \hat{s}_2 \right\rangle \right|^2$, которое называется формулой Мойела [21, 22]. Частный случай формулы Мойела дает связь нормы сигнала и его Г_ВЧП: $\| H_{\hat{s}} \| = \| \hat{s} \|$.

К преобразованиям с СВП относятся Г-ВЧП Бертрана (7) и обобщенное преобразование

$$Q_{\hat{s}}^{(a)}(t,f) = f \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}\left(f \cdot e^{\left(\frac{1}{2}-a\right)b}\right) \cdot \hat{s}^*\left(f \cdot e^{-\left(\frac{1}{2}+a\right)b}\right) \cdot e^{-ab} \times$$
$$\times e^{2p\, jtfb}\, \mathrm{d}b$$

— Г-ВЧП, которое характеризуется свойством ковариантности к степенно́й деформации обеих переменных. Для преобразований этой подгруппы СК выражается соотношением

$$H_{P_a \hat{s}}(t,f) = H_{\hat{s}}\left(\frac{at}{\left(\frac{f}{f_r}\right)^{\frac{1}{a}-1}} ; f_r \left(\frac{f}{f_r}\right)^{\frac{1}{a}} \right)$$

при $(P_a \hat{s})(f) \equiv \sqrt{\frac{1}{a}\left(\frac{f}{f_r}\right)^{\frac{1}{a}-1}} \cdot \hat{s}\left(f_r \cdot \left(\frac{f}{f_r}\right)^{\frac{1}{a}} \right), \ a > 0.$

[19] Внутренние произведения $\langle , \rangle$ (являющиеся в функциональном анализе (ФА) эквивалентом скалярного произведения) определяются в виде

$$\left\langle \hat{s}_1, \hat{s}_2 \right\rangle = \int_0^{\infty} \hat{s}_1(f)\, \hat{s}_2^*(f)\, \mathrm{d}f$$

для произведения сигналов в частотной форме и в виде $\left\langle H_1, H_2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} H_1(t,f) \cdot H_2^*(t,f)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}f$ для произведения Г-ВЧП. В соответствии с этим определяются значения норм $\|\hat{s}\|$ и $\|H\|$ соотношениями $\|\hat{s}\|^2 = \left\langle \hat{s}, \hat{s} \right\rangle = \int_0^{\infty} |\hat{s}(f)|^2\, \mathrm{d}f$ и $\|H\| = \left\langle H, H \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} |H(t,f)|^2\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}f$. Для свойства сохранения нормы в ФА (и реже в области теории обработки сигналов) используется термин "унитарность".

Хлавачем показано, что для выполнения свойства СВП требуется наложить на ядра Г-ВЧП ограничение в форме (25):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_H^*(b' - b, b) \cdot \Phi_H(b', b)\, \mathrm{d}b' = d(b);$$
$$Y_H^*(z, b) \cdot Y_H(z, b) = 1. \qquad (25)$$

Сравнение (25) и (19) показывает, что Г-ВЧП с СВН является обратимым. Обратные ядра такого преобразования достаточно просто определяются через прямые ядра:

$$\Phi_H^{-1}(b,b) = \Phi_H^*(-b,b) \text{ и } Y_H^{-1}(z,b) = Y_H^*(z,b).$$

Г-ВЧП с СВП обладают некоторыми дополнительными свойствами.

1) Квадрат модуля любого билинейного представления сигнала ($\tilde{H}_{\hat{s}}(\mathbf{\Theta})$ из (20)) может быть выражен как квадратичная форма:

$$\left| \tilde{H}_{\hat{s}}(\mathbf{\Theta}) \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} H_{\hat{s}}^*(t,f) \cdot L_{\tilde{H}H}^{(\Theta)}(t,f;t',f') \times$$
$$\times H_{\hat{s}}(t',f') \cdot \mathrm{d}t\, \mathrm{d}f\, \mathrm{d}t'\mathrm{d}f', \qquad (26)$$

где $H_{\hat{s}}$ — произвольное Г-ВЧП с СВП, а

$$L_{\tilde{H}H}^{(\Theta)}(t,f;t',f')$$

определяется соотношением (27):

$$L_{\tilde{H}H}^{(\Theta)}(t,f;t',f') =$$
$$= \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_{\tilde{H}}(\mathbf{\Theta}; f_2 e^{b_2/2}, f_1 e^{b_1/2}) \times$$
$$\times K_{\tilde{H}}^*(\mathbf{\Theta}; f_2 e^{-b_2/2}, f_1 e^{-b_1/2}) \times$$
$$\times \Phi_H\left(\ln\frac{f}{f_1}, b_1\right) \cdot \Phi_H^*\left(\ln\frac{f'}{f_2}, b_2\right) \times$$
$$\times e^{2p\, j(tfb_1 - t'f'b_2)} \mathrm{d}f_1\, \mathrm{d}b_1\, \mathrm{d}f_2\, \mathrm{d}b_2. \qquad (27)$$

где, как и в (20), $\mathbf{\Theta}$ — двумерный вектор параметров (таких как (*t*, *f*)); $K_{\tilde{H}}(\mathbf{\Theta}; f_1, f_2)$ — ядро, характеризующее преобразование $\tilde{H}$.

2) Для Г-ВЧП, обладающего свойством СВП, базис пространства сигналов образует соответствующий этому преобразованию базис. Если набор $\{\hat{s}_k(f)\}_{k=1,2,\ldots,N}$ служит базисом для сигналов, то двухпараметрическим базисом для Г-ВЧП H с СВП может служить набор H-преобразований от авто- и кросскорреляционных функций (АККФ), образованных из базисных функций сигналов, т. е. набор $\{H_{АККФ\, \hat{s}_i, \hat{s}_j}(t,f)\}_{i,j=1,2,\ldots}$ является базисом

H-преобразования. При этом можно говорить, что базис сигналов индуцирует базис для Г-ВЧП с СВП.

3) Существует задача определения вида сигнала, для которого ВЧП $H_{\hat{s}}(t, f)$ наиболее близко к некоторой заданной форме время-частотного распределения (ВЧР) — "модели" ВЧР $M(t, f)$. Такой условно "оптимальный" сигнал $\hat{s}_{опт.}$ оценивается на основе обобщенного принципа наименьших квадратов: $\hat{s}_{опт.}(f) = \arg\min_{\hat{s}} \| M - H_{\hat{s}} \|$. Соответствующий метод разработан Боудри-Бартелсом и Парксом (Boudreaux-Bartels, Parks) [20] и используется для улучшения качества время-частотного представления компонент сигнала [23]. Если преобразование $H_{\hat{s}}$ является Г-ВЧП с СВП, то определение оптимального сигнала $\hat{s}_{опт.}$ осуществляется следующим образом [24].

- К модели ВЧР — $M(t, f)$ — применяется преобразование (18):

$$V(b,b) = \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi_H^*\left(\ln\frac{f}{f_r} - b, b\right) \cdot M(t,f) \cdot e^{-2p\, jbtf} \mathrm{d}t\, \mathrm{d}f .$$

- Функция $V(b,b)$ преобразуется в

$$J(f_1, f_2) = \frac{1}{\sqrt{f_1 f_2}} V\left(\ln\frac{\sqrt{f_1 f_2}}{f_r}, \ln\frac{f_1}{f_2}\right).$$

- Создается комбинация, инвариантная к комплексной сопряженности, (операция "эрмитизации"):

$$J_{эрм.} = \frac{1}{2}[J(f_1, f_2) + J^*(f_1, f_2)] .$$

- Для $J_{эрм.}(f_1, f_2)$ вычисляется максимальное собственное число λ_1 и соответствующая собственная функция $E_1(f)$ с использованием соотношения собственного числа λ_k и собственной функции $E_k(f)$:

$$\int_0^\infty J_{эрм.}(f_1, f_2) \cdot E_k(f_2) \mathrm{d}f_2 = l_k E_k(f_1) .$$

- Определяется "оптимальный" сигнала $\hat{s}_{опт.}$ (с точностью до постоянного сдвига фазы $\hat{f}$) по соотношению:

$$\hat{s}_{опт.}(f) = \sqrt{l_1} e^{2p\, j\hat{f}} E_1(f) \ \text{ при } \ l_1 > 0$$

и

$$\hat{s}_{опт.}(f) = 0 \ \text{ при } \ l_1 \le 0 .$$

По описанной схеме определяется, в частности, оптимальный сигнал $\hat{s}_{опт.}(f) = \arg\min_{\hat{s}} \| M - Q_{\hat{s}} \|$ для модели ВЧР $M(t, f)$ и Г-ВЧП $Q_{\hat{s}}$ Альтеса—Мариновича (6). Для этого используется ядро

$$J(f_1, f_2) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} M(t, \sqrt{f_1, f_2}) \cdot \exp\left[-2p\, j\sqrt{f_1, f_2} \cdot \ln\frac{f_1}{f_2}\right] \cdot \mathrm{d}t.$$

Полезно отметить, что для Г-ВЧП из аффинной, степенно́й подгрупп и для преобразований с локализованным ядром свойство СВП выполняется только при условии $|B_H(b)| = 1$, или, что равноценно, $\frac{1}{B_H(b)} = B_H^*(b)$. На ядро $A_H(b)$ ограничений нет.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены элементы теории время-частотных преобразований (ВЧП), применяемых для анализа и интерпретации нестационарных сигналов в ИИС. Проанализирована концепция ковариантности — свойства модификации параметров преобразования (координат двухпараметрического представления результата ВЧП сигнала на время-частотной плоскости), модификации, которая вызвана преобразованием переменной во временно́й или частной форме сигнала. Основная группа ВЧП, многообразие которой анализируется в рамках концепции ковариантности, — это группа преобразований, которая получается на основе свойства ковариантности к одновременному масштабированию времени и частоты, а также удовлетворяет свойству ковариантности к ("гиперболически") частотно-зависимому сдвигу по времени. Эта группа условно называется группой гиперболических время-частотных преобразований (Г-ВЧП). Анализ проведен для частотной формы сигналов, которая использована и в аналитических соотношениях для Г-ВЧП.

- В группе Г-ВЧП выделено несколько подгрупп, в каждой из которых ВЧП (кроме основного комбинированного свойства ковариантности) обладает некоторым дополнительным свойством ковариантности (СК) или особенностью ядра Г-ВЧП. В качестве носителей дополнительного СК анализируются несколько типов преобразований. Г-ВЧП с такими дополнительными свойствами составляют степенну́ю и аффинную подгруппы и подгруппу с локализованным ядром.
- Для степенно́й и аффинной подгрупп и для подгруппы с локализованным ядром показана взаимосвязь дополнительного свойства ковариантности со структурой ядра Г-ВЧП. Систематизированы свойства преобразований и их особенности в каждой из подгрупп.

• Рассмотрены общие свойства преобразований: обратимость Г-ВЧП на уровне ядра (с дифференциацией для каждой из подгрупп); инвариантность внутреннего произведения; формула Мойела и связанные с ней ограничения на ядро и на обратимость ядер преобразования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gaundaurd G.C., Strifors H.C.* Signal Analysis by Means of Time — Frequency Transformation of Wigner Type // Proceedings of IEEE. 1996. V. 84, N 9. P. 1231–1247.
2. *Quian S., Chen D.* Discrete Gabor Transform // IEEE Transactions on Signal Processing. 1993. V. 41. P. 2429–2435.
3. *Jawerth B., Sweldens W.* Wavelet-Based Multiresolution Analysis // SIAM Review. 1994. V. 36, N 3. P. 377–401.
4. *Qian S., Chen D.* Discrete Gabor Transform // IEEE Transactions on Signal Processing. 1993. V. 41, N 7. P. 2429.
5. Recent Advanced Wavelet Aanalysis / Ed. L.L. Schumaker. Boston: Academic Press, 1994. 254 p.
6. *Cohen L.* Time-Frequency Distributions // Proceedings of IEEE. 1989. V. 77, N 7. P. 941–981.
7. *Меркушева А.В.* Классы преобразований нестационарного сигнала в информационно-измерительных системах. II. Время-частотные преобразования // Научное приборостроение. 2002. Т. 12, № 2. С. 59–70.
8. *Boudreaux-Bartels G.F., Hlawatsch F.* Linear and Quadratic Time-Frequency Signal Representations // IEEE Signal Processing Magazine. 1992. V. 9, N 4. P. 21–67.
9. *Bertrand J., Bertrand P.* A Class of Wigner Functions with Extended Covariance Properties // Journal of Mathematical Physics. 1992. V. 33, N 7. P. 2515–2527.
10. *Ates R.A.* Wide-band, Proportional-Bandwidth Wigner–Ville Analysis // IEEE Transactions on Acoustic, Speech, Signal Processing. 1990. V. 38, N 6. P. 1005–1012.
11. *Bertrand J., Bertrand P.* Time-Frequency Representations of Broad-Band Signals // Wavelets: Time-frequency Methods and Phase Space / Combes J.M., Grossmann A., Tchamatchian P. (eds). Berlin: Springer, 1989. P. 154–171.
12. *Ates R.A., Titlebaum E.L.* Best Signals as Optimally Doppler Transparent Waveforms // Journal of Acoustic Society of America. 1970. V. 48, N 4. P. 1014–1026.
13. *Rioul O., Flandrin P.* Time-Scale Energy Distribution: A General Class Extending Wavelet Transforms // IEEE Transactions on Signal Processing. 1992. V. 40, N 7. P. 1746–1757.
14. *Papandreou A., Hlawatsch F., Boudreaux-Bartlets G.F.* Framework for the Scale Covariant Affine and Power Class Quadratic Time-Frequency Representations Using Generalized Shifts // Proceedings of IEEE International Congress on Acoustic, Speech Signal Processing (ICASSP-95), Detroit, MI. 1995. V. 2. P. 1017–1020.
15. *Boudreaux-Bartlets G.F., Hlawatsch F., Papandreou A.* Regularity and Unitarity of Affine and Hyperbolic Time-Frequency Representations // Proceedings of IEEE International Congress on Acoustic, Speech Signal Processing (ICASSP-93), Minneapolis, MN, Aplil 1993. V. 3. P. 245–248.
16. *Rioul O., Vetterli M.* // IEEE Signal Processing Magazine. 1991. V. 8, N 11. P. 14–38.
17. *Hlawatsch F.* Regularity and Unitarity of Time-Frequency Signal Representations // IEEE Transactions on Information Theory. 1992. V. 38, N 1. P. 82–91.
18. *Flandrin P.* A Time-Frequency Formulation of Optimum Detection // IEEE Transactions on Acoustic, Speech and Signal Processing. 1988. V. 36, N 9. P. 1377–1384.
19. *Hlawatsch F., Kozek W.* Second-Order Time-Frequency Synthesis of Nonstationary Random Processes // IEEE Transactions on Information Theory. 1995. V. 41, N 1. P. 225–267.
20. *Boudreaux-Bartlets G.F., Parks T.W.* Time-Varying Filtering and Signal Estimation Using Wigner Distribution Synthesis Techniques // IEEE Transactions on Acoustic, Speech and Signal Processing. 1986. V. 34, N 6. P. 442–451.
21. *Claasen T.A.C.M., Mecklenbrauker W.F.G.* Wigner Distribution − A Tool for Time-Frequency Signal Analysis. Part I // Philips Journal of Research. 1980. V. 35. P. 217–250.
22. *Меркушева А.В.* Классы преобразований нестационарного сигнала в информационно-измерительных системах. I. Элементы теории // Научное приборостроение. 2002. Т. 12, № 2. С. 50–58.
23. *Krattenthaler W., Hlawatsch F.* Time-Frequency Design and Processing of Signals via Smoothed Wigner Distributions // IEEE Transactions on Signal Processing. 1993. V. 41, N 1. P. 278–287.
24. *Krattenthaler W., Hlawatsch F.* Bilinear Signal Synthesis // IEEE Transactions on Signal Processing. 1992. V. 40, N 2. P. 252–363.

Санкт-Петербург

Материал поступил в редакцию 21.03.2007.

TRANSFORMATION CLASSES FOR NON-STATIONARY SIGNALS IN INFORMATION MEASUREMENT SYSTEMS. IV. RELATIONSHIP BETWEEN THE COVARIANCE FORM AND TIME-FREQUENCY TRANSFORMATION TYPE

G. F. Malychina, A. V. Merkusheva

Saint-Petersburg

Time-frequency transformations (TFT) used in signal analysis can change their form and characteristics of two-dimensional representation of non-stationary signals at the given form of the so-called covariance that is the property of TFT form modification associated with time or frequency scaling of the signal under analysis. Extended interpretation of the covariance property manifests itself in modification of TFT representation analytical forms. The paper considers some elements of theoretical methods for obtaining various TFTs and the measure of their adaptation to the specificity of signal under analysis. The methods for constructing IMS non-stationary signal transformations have been generalized. The main TFT structures were represented earlier ("Nauchnoe priborostroenie", v. 12 (2, 3), 2002).