ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2007, том 17, № 1, c. 73–82

ИССЛЕДОВАНИЯ, ПРИБОРЫ, МОДЕЛИ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА

УДК 517.925.4: 62 – 408.64

© С. И. Шевченко

О РЕШЕНИИ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА, КОГДА ОБЛАКО ОБЪЕМНОГО ЗАРЯДА ИМЕЕТ ГЛАДКИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ГРАНИЦЫ. II. АКСИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Приведен алгоритм решения двумерного уравнения Пуассона в аксиальной геометрии методом граничных интегральных уравнений на случай, когда облако объемного заряда имеет гладкие криволинейные границы.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является продолжением работ [1, 2] и посвящена развитию алгоритма решения аксиального уравнения Пуассона методом граничных интегральных уравнений на случай, когда облако объемного заряда имеет гладкие криволинейные границы, не сводимые к ступенчатым функциям.

Как и в указанных работах, для вычисления потенциала электростатического поля (ЭСП) будем пользоваться интегральным уравнением, эквивалентным уравнению Пуассона [3],

$$\phi(\mathbf{r}_0) = \int\limits_{(L)} \sigma G \,\mathrm{d}L \quad + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{(S)} Q G \,\mathrm{d}S\,, \tag{1}$$

где $\varepsilon_0 = 8.8542\cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная; Q — функция плотности объемного заряда (ПОЗ); $\sigma(\mathbf{r})$ — функция плотности поверхностного заряда (ППЗ); $G(\mathbf{r},\,\mathbf{r}_0)$ — ядро интегрального уравнения (ядро для задачи Дирихле для уравнения Лапласа); точка $\mathbf{r}_0$, в которой ищется потенциал, — точка наблюдения (ТН); первый интеграл берется по длине контура всех электродов (границы), а второй — по площади, которую занимает объемный заряд (ОЗ); коэффициент $1/4\pi\varepsilon_0$, который должен быть перед первым членом в правой части (1), включен в функцию σ.

В отличие от случая плоской геометрии в случае аксиальной геометрии ядро для задачи Дирихле для уравнения Лапласа имеет вид [4, 5]

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \frac{4r}{\sqrt{(r+r_0)^2+(z-z_0)^2}}\mathrm{K}(k)\,, \tag{2}$$

где $\mathrm{K}(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода,

$$k^2 = \frac{4rr_0}{(r+r_0)^2+(z-z_0)^2}\,.$$

В [6] после некоторых преобразований ядра (2) было получено выражение, в котором удалось выделить логарифмическую сингулярность:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = f_1(z,r) + f_2(z,r)\ln[(r-r_0)^2+(z-z_0)^2], \tag{3}$$

где

$$f_1(z,r) = \frac{4r}{\sqrt{(r+r_0)^2+(z-z_0)^2}}\times$$
$$\times\left\{g_1(z,r) + g_2(z,r)\ln[(r+r_0)^2+(z-z_0)^2]\right\};$$
$$f_2(z,r) = -\frac{4r}{\sqrt{(r+r_0)^2+(z-z_0)^2}}\,;$$
$$g_1(z,r) = \sum_{i=0}^{4} a_i m_1^i\,;$$
$$g_2(z,r) = \sum_{i=0}^{4} b_i m_1^i\,;$$
$$m_1(z,r) = 1-m = 1-k^2 = \frac{(r-r_0)^2+(z-z_0)^2}{(r+r_0)^2+(z-z_0)^2}\,;$$

значения коэффициентов a_i и b_i приведены в справочнике [7]. Входящие в (3) функции f_1, f_2 являются гладкими везде в области $r \neq 0$.

Подробности решения уравнения (1) с ядром (3) можно найти в [2]. Отличие второго интеграла в правой части (1), представляющего собой вклад в потенциал от всего облака ОЗ, в аксиальном случае от аналогичного интеграла в плоском случае определяется видом ядра (3). Этот интеграл, в котором Q и G считаются известными, можно находить численным методом (например, повторным интегрированием методом Гаусса), методом аналитического интегрирования или аналитически-численным методом.

Когда облако пространственного заряда имеет гладкую криволинейную границу, в алгоритм решения уравнения Пуассона приходится вводить некоторые особенности, которые состоят в вычислении суммы вкладов в потенциал от всех граничных ячеек. Эти особенности пока не были отражены в научной литературе.

Представленная работа посвящена рассмотрению трех алгоритмов вычисления вклада в потенциал от граничных ячеек облака ОЗ и сравнению результатов работы этих алгоритмов.

1. ОСНОВЫ АЛГОРИТМА

Для вычисления вклада в потенциал от всего облака пространственного заряда необходимо вычислить второй интеграл в правой части (1). Этот интеграл с помощью введения прямоугольной сетки разбивается на сумму интегралов по площади тех ячеек, которые содержат ОЗ. К таким ячейкам относятся "полные" прямоугольные ячейки, вклад от которых рассмотрен в [2], и "граничные" ячейки, т. е. ячейки, которые пересекаются границей облака ОЗ и которые поэтому находятся частично вне, а частично внутри облака ОЗ, вклад в потенциал от которых будет рассмотрен в данной работе.

Для случая плоской геометрии вклад в потенциал от некоторой граничной ячейки (т. е. от ОЗ, содержащегося в этой граничной ячейке) рассмотрен в [8], где были выделены следующие проблемы:

1) анализ,
2) позиционирование,
3) интерполяция,
4) интегрирование по площади граничной ячейки.

Понятно, что для случая аксиальной геометрии задача нахождения вклада в потенциал от некоторой граничной ячейки содержит те же проблемы. Поэтому в данной работе ограничимся лишь кратким описанием общих для плоской и аксиальной геометрий операций, а подробно остановимся на отличиях алгоритмов в упомянутых случаях.

1.1. Анализ

Вопросы разбиения всех граничных ячеек на разные типы, отнесения каждой граничной ячейки к одному из установленных типов и относительного положения ТН и рассматриваемой граничной ячейки подробно рассмотрены в [9]. Показано, что всего возможны 12 вариантов пересечения ячеек сетки границей расчетной области. Выписан алгоритм анализа полученных вариантов пересечений ячеек сетки границей расчетной области, позволяющий для каждой ячейки установить реализуемый вариант пересечения. В данной работе в качестве границы расчетной области используется граница облака ОЗ.

1.2. Позиционирование

При рассмотрении второго интеграла в правой части (1) важно знать, где расположена ТН (как она позиционируется в пределах граничной ячейки). Возможны следующие варианты [9]: ТН лежит вне, внутри, точно на границе ячейки сетки.

1.3. Интерполяция

В данной работе, подобно тому как это было проделано в работе [8] для случая плоской геометрии, рассмотрено линейное представление границы облака объемного заряда в пределах каждой граничной ячейки. Обсуждается также возможность перехода к более точному представлению этой границы.

В отличие от рассмотренного в [1, 8] случая плоской геометрии для аксиальной геометрии ядро (3) является более сложным. Дополнительно появляются функции f_1 и f_2, для которых требуется осуществить некоторую интерполяцию. В [2], где для аксиального случая рассматривались только вклады в потенциал от ячеек, полностью заполненных объемным зарядом, и использовалась интерполяция в пределах каждой ячейки произведений f_1Q и f_2Q билинейным полиномом, были получены не вполне удовлетворительные результаты.

В данной работе применялось раздельное интерполирование функций f_1 и f_2, ядра (3) и функции $Q(x, y)$ билинейным полиномом

$$f_{1,2} \cdot Q = (A_{1,2} + B_{1,2}x + C_{1,2}y + D_{1,2}xy) \times \\ \times (A + Bx + Cy + Dxy) \quad (4)$$

для граничной ячейки четырехугольной формы. Для треугольной формы граничной ячейки или той (треугольной) части пятиугольной граничной ячейки, которая получается после разбиения пятиугольной граничной ячейки на четырехугольную ячейку и треугольную, — $D = 0, D_{1,2} = 0$.

После простейших преобразований получаем для произведений $f_{1,2} \cdot Q$:

$$f_{1,2} \cdot Q = \sum_{m,n=0}^{2} c_{m,n}^{(1,2)} x^m y^n \ . \quad (5)$$

Коэффициенты $c_{m,n}^{(1,2)}$ связаны с коэффициентами $A, B, C, D, A_{1,2}, B_{1,2}, C_{1,2}, D_{1,2}$ соотношениями, приведенными в Приложении I.

Для повышения точности вычислений для всех форм ячеек (треугольной, четырехугольной и пятиугольной) может быть рассмотрена биквадратичная интерполяционная функция

$$Q(x,y)=c_{0,0}+c_{1,0}\,x+c_{0,1}\,y+c_{1,1}\,xy+c_{2,0}x^2+$$
$$+c_{2,1}x^2y+c_{0,2}\,y^2+c_{1,2}\,xy^2+c_{2,2}x^2y^2.$$

Для нахождения коэффициентов этой интерполяционной функции необходимо использовать не только базовые точки граничной ячейки (узлы сетки плюс точки пересечения границы облака ОЗ с линиями сетки), но и некоторые дополнительные точки, лежащие вне рассматриваемой ячейки. В качестве таких дополнительных точек использовались узлы сетки, ближайшие к рассматриваемой ячейке и лежащие внутри облака ОЗ.

1.4. Интегрирование по площади граничной ячейки

Так же, как в работе [8], посвященной плоскому случаю, для нахождения вклада в потенциал от граничных ячеек будем использовать три метода вычисления второго интеграла в правой части (1), определяющего вклад в потенциал от облака объемного заряда:

1) аналитическое вычисление интегралов;
2) численное вычисление;
3) аналитически-численное вычисление интегралов.

И проведем сравнение эффективности этих методов с точки зрения затрачиваемого на вычисления времени и точности получаемых результатов.

В случае аксиальной геометрии вклад в потенциал от всего облака пространственного заряда имеет вид (второй интеграл в правой части (1))

$$\varphi_p=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{(S)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\;Q(x,y)\cdot G(x,y;x_0,y_0)\,. \quad (6)$$

Этот интеграл с помощью введения прямоугольной сетки разбивается на сумму интегралов по площади тех ячеек, которые содержат ОЗ,

$$\varphi_p=\sum_{i_x=1}^{N_x}\;\sum_{i_y=1}^{N_y}\phi_p(i_x,i_y)\,,$$

т. е. сумму вкладов в потенциал $\phi_p(i_x,i_y)$ как от всех полных ячеек, так и от всех граничных ячеек. Вклад в потенциал от полных ячеек подробно рассмотрен в [2]. В данной работе рассмотрим вклад в потенциал от граничных ячеек (от объемного заряда, содержащегося в граничных ячейках).

Вклад в потенциал от одной граничной ячейки имеет вид

$$\phi_p(i_x,i_y)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times$$
$$\times\int\limits_{x_N}^{x_K}\mathrm{d}x\int\limits_{y_N(x)}^{y_K(x)}\mathrm{d}y\cdot Q(x,y)\cdot G(x,y;x_0,y_0)\,, \quad (7)$$

где пределы "внутреннего" интегрирования: $y_N(x)$ — нижний предел и $y_K(x)$ — верхний предел и пределы "внешнего" интегрирования: x_N — нижний предел и x_K — верхний предел определяются конфигурацией граничной ячейки, по площади которой проводится интегрирование. Один из пределов "внутреннего" интегрирования (по переменной y) является зависящим от "внешней" переменной (x).

При любом из методов нахождения вклада в потенциал можно указать два пути повышения точности решения уравнения Пуассона:

- повышение точности интерполяции функции плотности ОЗ;
- повышение точности интерполяции границы облака ОЗ.

1.4.1. Аналитическое интегрирование

Если в выражение (7) подставить ядро (3) и применить интерполяцию (5), то для вклада в потенциал от одной граничной ячейки получим:

$$\phi_p(i_x,i_y)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{m,n=0}^{2}\left(c^{(1)}_{m,n}\cdot I^{(1)}_{m,n}+c^{(2)}_{m,n}\cdot I^{(2)}_{m,n}\right); \quad (8)$$

$$I^{(1)}_{m,n}=\int\limits_{x_N}^{x_K}x^m\mathrm{d}x\int\limits_{y_N(x)}^{y_K(x)}y^n\mathrm{d}y\,; \quad (9)$$

$$I^{(2)}_{m,n}=$$
$$=\int\limits_{x_N}^{x_K}x^m\mathrm{d}x\int\limits_{y_N(x)}^{y_K(x)}y^n\mathrm{d}y\cdot\ln\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]. \quad (10)$$

Более сложный вид ядра определяет то, что вклад в потенциал от некоторой граничной ячейки в случае аксиальной геометрии содержит (в сравнении с вкладом в потенциал от этой же граничной ячейки в случае плоской геометрии) дополнительные члены, содержащие интегралы $I^{(1)}_{m,n}$ от гладких функций, и дополнительные члены, содержащие интегралы $I^{(2)}_{0,2},I^{(2)}_{1,2},I^{(2)}_{2,2},I^{(2)}_{2,0},I^{(2)}_{2,1}$ с логарифмической сингулярностью и другими степенями переменных интегрирования в подынтегральной функции.

Выражения для интегралов $I^{(1)}_{m,n}$ являются простыми, а выражения для тех интегралов $I^{(2)}_{m,n}$, которые не использовались в [8], приведены в Приложении II для случая, когда переменным является верхний предел "внутреннего" интегрирования ($y_K\equiv y_K(x)=\alpha\cdot x+\beta$).

Повышение точности интерполяции функции плотности ОЗ (т. е. переход от билинейной интерполяции функции ПОЗ к, например, биквадратичной интерполяции (5)) ведет к повышению максимальных степеней переменных x и y в интегралах (8). Отметим, что интегралы $I^{(1,2)}_{m,n}$ по мере повышения степеней x и y имеют все более громоздкий характер. Это ведет к увеличению времени интегрирования, которое становится сравнимым со временем аналогичного интегрирования численным методом. Т. е. теряется главное преимущество метода аналитического интегрирования.

При повышении точности интерполяции границы облака ОЗ (т. е. переходе от кусочно-линейного представления границы к более точному представлению (кусочно-квадратичному или сплайн-представлению)) "внутреннее" интегрирование в интегралах (8) проводится без изменения (по сравнению с кусочно-линейным представлением границы). Во "внешнем" интегрировании возникают интегралы, являющиеся практически неинтегрируемыми. Все попытки преодолеть эту трудность приводили к такому увеличению времени счета, которое делало бессмысленным применение аналитического интегрирования.

1.4.2. Численное интегрирование методом Гаусса

Подробности вычисления вклада в потенциал от плоской граничной ячейки, заполненной объемным зарядом, методом повторного численного интегрирование по формуле Гаусса можно найти в [8].

При вычислениях этим методом, вклад в потенциал от ОЗ, содержащегося в треугольной или четырехугольной граничной ячейке, определяется выражением, реализующим в (7) повторное численное интегрирование методом Гаусса [10]:

$$\phi_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Delta_x \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{N_{gx}} A_{xi}\left[\Delta_y(x_i)\sum_{m=1}^{N_{gy}} A_{ym}\, Q(x_i, y_m)\, G(x_i, y_m; x_0, y_0)\right], \quad (11)$$

где $\Delta_x = F_x[i_x+1] - F\_S_x[i_y]$ для треугольной граничной ячейки или $\Delta_x = F_x[i_x+1] - F_x[i_x]$ для четырехугольной граничной ячейки; $F_x[i_x]$ — линия сетки, параллельная оси x и имеющая номер i_x; $F\_S_x[i_y]$ — x-координата точки пересечения линии сетки $F_y[i_y]$, параллельной оси y, и линии границы облака пространственного заряда; $\Delta_y(x_i) = y_K(x_i) - F_y[i_y]$; N_{gx}, N_{gy} — число узлов интегрирования вдоль направлений x и y; A_{xi}, A_{ym} — коэффициенты квадратурной формулы Гаусса; $x_i = F_x[i_x] + \Delta_x \cdot x_g^{N_{gx}}(i)$ — координаты узлов интегрирования вдоль направления x; $y_m = F_y[i_y] + \Delta_y(x_i)\cdot x_g^{N_{gy}}(m)$ — координаты узлов интегрирования вдоль направления y; $x_g^{N_{gx}}(i)$ и $x_g^{N_{gy}}(m)$ — корни каждого узла интегрирования; $Q(x_i, y_j)$ — значения плотности объемного заряда в узлах интегрирования (x_i, y_j).

Пятиугольная граничная ячейка разбивается на две — треугольник и трапецию, вклад от которых в потенциал вычисляется численным интегрированием по формуле (11).

Для аксиального случая формула двукратного численного интегрирования (11) имеет практически такой же вид, как такая же формула для плоского случая. Отличие заключается лишь в том, что в аксиальном случае в эту формулу следует подставлять значение ядра, вычисляемое по формуле (3).

Повышение точности интерполяции границы облака ОЗ при выполнении численного двукратного интегрирования не привело к возникновению дополнительных сложностей по сравнению со случаем линейного представления границы, и время вычисления вклада в потенциал практически не увеличилось.

Преимущество численного интегрирования в формулах для вклада в потенциал от облака пространственного заряда состоит в том, что имеется возможность использовать точные (а не интерполированные) значения функции плотности ОЗ в точках-узлах численного интегрирования. Кроме того, для формулы границы облака ОЗ в пределах ячейки, по площади которой проводится численное интегрирование, можно использовать как аналитические выражения так и интерполяцию высокого порядка.

1.4.3. Смешанное (аналитически-численное) интегрирование

Если взглянуть на формулу (10), то видно, что "внутреннее" интегрирование (по переменной y) не содержит никаких особенностей и сводится к вычислению табличных интегралов [11]

$$J_n(x) = \int_{y_N(x)}^{y_K(x)} y^n \mathrm{d}y \cdot \ln\left[x^2 + y^2\right];$$

формула записана в системе координат, привязанной к ТН.

Вторая фаза интегрирования ("внешнее" интегрирование) осуществляется численным интегрированием по методу Гаусса.

Положительным качеством смешанного интегрирования (или преимуществом по сравнению с аналитическим интегрированием) является то, что форма границы облака ОЗ во "внутреннем" интегрировании участвует, только когда подставляются пределы в найденную первообразную. Это позволяет легко использовать для описания границы облака ОЗ как аналитические выражения, так и интерполяцию высокого порядка.

Повышение точности интерполяции границы облака ОЗ при смешанном (аналитически-численном) интегрировании не привело к возникновению дополнительных проблем по сравнению со случаем линейного представления границы, и время вычисления вклада в потенциал практически не увеличилось.

К недостаткам смешанного интегрирования можно отнести то, что для его реализации обязательно следует проводить интерполяцию функции плотности ОЗ в пределах каждой ячейки сетки, в которой присутствует ОЗ.

2. ТЕСТОВЫЙ ПРИМЕР И ОБСУЖДЕНИЕ

Для демонстрации возможностей рассматриваемых в данной работе алгоритмов приведем некоторые результаты, появляющиеся при решении уравнения Пуассона для сферического конденсатора.[1)] Для экономии памяти рассмотрим первый квадрант полной плоскости, по краям которого (на двух радиусах) ставятся граничные условия, представляющие собой теоретические значения потенциала. При сравнении различных методов решения уравнения Пуассона (по сути, методов нахождения интегралов (10) по площади ячеек) интересными являются время счета с помощью каждого из алгоритмов и точность этого счета. Полное решение уравнения Пуассона, включающее в себя многие стадии (шаги) алгоритма, может нивелировать собственно нахождение вклада в потенциал от всего облака ОЗ. Поэтому, чтобы избежать этого, рассмотрим соотношение времен выполнения и получаемой точности при нахождении вклада в потенциал от некоторой граничной ячейки.

Выберем треугольную граничную ячейку, которая относится к типу 9 по классификации работы [9]. Для равномерной сетки 10×10 соотношение времен расчетов трех обсуждаемых алгоритмов нахождения вклада в потенциал (аналитическое интегрирование, аналитически-численное интегрирование и двукратное численное интегрирование) составляет примерно 1 : 2.1 : 2.5. Соотношение времен выполнения расчетов вклада в потенциал от одной граничной ячейки не должно зависеть от разбиения сетки. Только общее время вычисления вклада в потенциал от всех граничных ячеек должно зависеть от разбиения, т. к. от этого разбиения зависит общее число граничных ячеек.

В [8] для плоского случая приведено сравнение точности вычисления интегралов. В аксиальном случае часть интегралов $I^{(2)}_{m,n}$ являются такими же, как в плоском случае, а часть — подобными, но с другими степенями переменных интегрирования. Поэтому соотношения точностей вычисления этих интегралов остаются такими же, как для плоского случая. Поэтому в данной работе не будем приводить сравнение значений этих интегралов, а приведем сравнение значений вкладов в потенциал, полученных от всего облака ОЗ для разных делений сетки.

При рассмотрении тестового примера в каждом из трех описанных методов нахождения вклада в потенциал была использована предварительная интерполяция функции плотности объемного заряда, поэтому соотношение точности вычисления в этих трех методах не должно зависеть от точности этой интерполяции, а должно определяться только свойствами этих методов интегрирования. Чтобы избежать влияния на результат точности интерполяции, используем для ОЗ равномерное распределение.

Результаты расчета распределения потенциала и вклада в потенциал от всего облака пространственного заряда вдоль радиуса приведены в табл. 1 и табл. 2. При расчете потенциала использован метод аналитического интегрирования, а расчет вклада в потенциал от всего облака пространственного заряда выполнен тремя методами: A — аналитический, D — численный, AD — аналитически-численный. Разбиение сетки — 10×10 для данных табл. 1 и 100×100 в табл. 2. Вычисления проделаны для равномерного распределения объемного заряда, расположенного между обкладками сферического конденсатора.

Сравнение результатов, представленных в табл. 1, 2, показывает, что при переходе к более частой сетке ошибки в вычислении потенциала и вклада в потенциал от всего облака пространственного заряда значительно уменьшаются, что можно объяснить повышением точности представления криволинейной границы. Уже при разбиении 10×10 потенциал получается с вполне удовлетворительной точностью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в данной работе рассмотрены три алгоритма решения аксиального уравнения Пуассона для случая, когда облако объемного заряда имеет гладкие криволинейные границы. Основное внимание уделено расчету вклада в потенциал от ОЗ, содержащегося в так называемых граничных ячейках.

[1)] В предыдущей работе [8] данного цикла была допущена опечатка: вместо написанного в ней "сферический конденсатор" следует читать "цилиндрический конденсатор"

Табл. 1. Распределения потенциала и вклада в потенциал от всего облака пространственного заряда (колонки A, D, AD) вдоль радиуса. Разбиение сетки 10×10.
№ — номер точки вдоль радиуса; r — радиальное расстояние точки, $P_{\text{числ.}}$ — значения потенциала, полученные в результате работы алгоритма; $P_{\text{теор.}}$ — теоретические значения потенциала; $\delta P = (P_{\text{числ.}} - P_{\text{теор.}}) / P_{\text{теор.max}}$ — величина относительной ошибки; A, D, AD — методы вычислений: соответственно аналитический, численный, аналитически-численный

№	r	$P_{\text{числ.}}$	$P_{\text{теор.}}$	δP	A	D	AD
0	0.070	0.00012	0.00000	0.00012	0.0895844	0.0898250	0.0898250
1	0.073	0.13919	0.13963	–0.00044	0.0900915	0.0903257	0.0903211
2	0.076	0.26714	0.26773	–0.00059	0.0901326	0.0903484	0.0903517
3	0.079	0.38490	0.38559	–0.00069	0.0897511	0.0899660	0.0899603
4	0.082	0.49358	0.49431	–0.00074	0.0889794	0.0891765	0.0891792
5	0.085	0.59412	0.59485	–0.00073	0.0878415	0.0880325	0.0880323
6	0.088	0.68734	0.68803	–0.00068	0.0863549	0.0865337	0.0865371
7	0.091	0.77395	0.77455	–0.00060	0.0845341	0.0847147	0.0847082
8	0.094	0.85456	0.85503	–0.00047	0.0823913	0.0825530	0.0825576
9	0.097	0.92970	0.93002	–0.00032	0.0799350	0.0800950	0.0800939
10	0.100	0. 99973	1.00000	–0.00027	0.0771680	0.0773198	0.0773198

Табл. 2. Распределения потенциала и вклада в потенциал от всего облака пространственного заряда вдоль радиуса. Разбиение сетки 100×100. Обозначения те же, что в табл. 1

№	r	$P_{\text{числ.}}$	$P_{\text{теор.}}$	δP	A	D	AD
0	0.070	0.00012	0.00000	0.00012	0.0960336	0.0960336	0.0960336
1	0.073	0.13960	0.13963	–0.00002	0.0966684	0.0966684	0.0966684
2	0.076	0.26768	0.26773	–0.00004	0.0968104	0.0968104	0.0968104
3	0.079	0.38553	0.38559	–0.00005	0.0964926	0.0964926	0.0964926
4	0.082	0.49425	0.49431	–0.00006	0.0957435	0.0957434	0.0957434
5	0.085	0.59479	0.59485	–0.00006	0.0945876	0.0945876	0.0945876
6	0.088	0.68797	0.68803	–0.00006	0.0930464	0.0930464	0.0930464
7	0.091	0.77450	0.77455	–0.00005	0.0911384	0.0911384	0.0911384
8	0.094	0.85499	0.85503	–0.00004	0.0888799	0.0888798	0.0888799
9	0.097	0.93000	0.93002	–0.00002	0.0862851	0.0862851	0.0862850
10	0.100	0.99989	1.00000	–0.00011	0.0833666	0.0833665	0.0833665

Для нахождения вклада в потенциал проводится двумерное интегрирование по треугольным, четырехугольным и более сложным (но сводимым к треугольным) областям.

Проведено сравнение аналитического, численного и смешанного (аналитически-численного) методов интегрирования при нахождении вклада в потенциал.

Эта точность быстро увеличивается с переходом к более мелкому разбиению сетки на ячейки. Она в значительной мере может определяться предварительной интерполяцией.

Метод аналитического интегрирования при нахождении вклада в потенциал при билинейной интерполяции функции плотности ОЗ и кусочно-линейном представлении границы дает некоторый выигрыш во времени счета. Однако более точная интерполяция плотности ОЗ настолько увеличивает время счета, что делает нецелесообразным применение данного метода.

Метод смешанного интегрирования выполняется несколько быстрее, чем численный метод, и дает вполне удовлетворительную точность. Однако требует интерполяции как функции плотности, так и границы облака ОЗ. Переход к более точной интерполяции как функции плотности ОЗ, так и границы облака ОЗ не привносит в алгоритм трудностей и не ведет к заметному увеличению времени счета.

Численный метод (двукратного численного интегрирования по формуле Гаусса) является самым медленным из трех рассмотренных. И по точности он несколько уступает другим рассмотренным методам. Однако в рамках этого метода возможно не только использование более точной интерполяции для функции плотности ОЗ и для границы облака ОЗ (чем в аналитическом методе), но и применение для них аналитических функций.

Приложение I. **Соотношения между коэффициентами** $c_{m,n}^{(1,2)}$ **и** $A, B, C, D, A_{1,2}, B_{1,2}, C_{1,2}, D_{1,2}$

$c_{0,0}^{(1,2)} = A_{1,2} \cdot A$; $c_{1,0}^{(1,2)} = B_{1,2} \cdot A + A_{1,2} \cdot B$;
$c_{0,1}^{(1,2)} = C_{1,2} \cdot A + A_{1,2} \cdot C$;
$c_{1,1}^{(1,2)} = B_{1,2} \cdot C + C_{1,2} \cdot B + A_{1,2} \cdot D + D_{1,2} \cdot A$;
$c_{2,1}^{(1,2)} = B_{1,2} \cdot D + D_{1,2} \cdot B$; $c_{1,2}^{(1,2)} = C_{1,2} \cdot D + D_{1,2} \cdot C$;
$c_{2,0}^{(1,2)} = B_{1,2} \cdot B$; $c_{0,2}^{(1,2)} = C_{1,2} \cdot C$; $c_{2,2}^{(1,2)} = D_{1,2} \cdot D$.

Приложение II. **Вид интегралов** $I_{i,j}^{(2)};\ i, j = 0 \div 2$

$$I_{0,2}^{(2)} = (\alpha^2+1)\frac{\ln(\alpha^2+1)}{2}\frac{x_K^5 - x_N^5}{5} + \frac{\alpha}{6}(x_K^4 - x_N^4)\left[\frac{\alpha}{6} - \frac{2}{9\cdot 4}\alpha^3 + \frac{\ln(\alpha^2+1)}{4}\alpha\beta\right] +$$
$$+ (x_K^3 - x_N^3)\left[\frac{2\alpha}{9} - \frac{2}{9}y_N - \frac{2}{9}\alpha^2\beta + \frac{2y_N^3}{9} + \frac{\ln(\alpha^2+1)}{6}\beta^2\right] -$$
$$- (x_K^2 - x_N^2)\frac{\alpha\beta^2}{3} + dx\left[\frac{2}{9}y_N^3 - \frac{2}{9}\beta^3 - \frac{2y_N^3}{3} + \frac{2}{3}y_N^5\right] -$$
$$- \ln(x_K^2 + y_N^2)\left[\frac{y_N^3}{3}x_K + \frac{y_N^3}{3}x_K^3\right] + \ln(x_N^2 + y_N^2)\left[\frac{y_N^3}{3}x_N + \frac{y_N^3}{3}x_N^3\right] +$$
$$+ \left(\operatorname{arctg}\frac{x_K}{y_N} - \operatorname{arctg}\frac{x_N}{y_N}\right)\left[\frac{7}{15}y_N^5 - \frac{2}{3}y_N^4\right];$$

$$I_{2.0}^{(2)} = \frac{\alpha(\ln(\alpha^2+1)-2)}{4}\left(x_K^4 - x_N^4\right) + \left(x_K^3 - x_N^3\right)\left[\left(\ln(\alpha^2+1)-2\right)\left(\frac{\beta}{3} + \frac{2}{3}y_N\right) + \frac{y_N}{6} - \frac{2y_N}{9}\right] +$$
$$+ \frac{y_N}{3}\left[x_K^3\ln(x_K^2 + y_N^2) - x_N^3\ln(x_N^2 + y_N^2)\right] +$$
$$+ dx\left[\frac{2y_N^2}{3} - \frac{y_N^3}{2} - \frac{\beta}{2(\alpha^2+1)}x_2^2 + 2\frac{-3\alpha x_1 + \beta}{3}x_2^2 - (-\alpha x_1^3 + \beta x_1^2)\right] +$$
$$- \frac{\alpha}{8}(z_K^4 - z_N^4) + (z_K^3 - z_N^3)\left[-\frac{-6\alpha x_1 + 2\beta}{9} + \frac{\beta}{2(\alpha^2+1)}\right] + \frac{\alpha x_2^2}{4}\left(z_K^2 - z_N^2\right) +$$
$$+ \ln(z_K^2 + x_2^2)\left[\frac{\alpha}{4}(z_K^4 - x_2^4) + \frac{-3\alpha x_1 + \beta}{3}z_K^3 + \frac{-3\alpha x_1 - 2\beta}{2}(z_K^2 + x_2^2) + (-\alpha x_1^3 + \beta x_1^2)z_K\right] -$$
$$- \ln(z_N^2 + x_2^2)\left[\frac{\alpha}{4}(z_N^4 - x_2^4) + \frac{-3\alpha x_1 + \beta}{3}z_N^3 + \frac{-3\alpha x_1 - 2\beta}{2}(z_N^2 + x_2^2) + (-\alpha x_1^3 + \beta x_1^2)z_N\right] +$$
$$+ \left(\operatorname{arctg}\frac{x_K}{y_N} - \operatorname{arctg}\frac{x_N}{y_N}\right)\left[-\frac{2}{3}y_N^4 + \frac{y_N}{2}y_N^3\right] + \left(\frac{x_K^4}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha x_k + \beta}{x_K} - \frac{x_N^4}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha x_N + \beta}{x_N}\right) +$$

$$+\left(\operatorname{arctg}\frac{z_K}{x_2}-\operatorname{arctg}\frac{z_N}{x_2}\right)\left[\frac{\beta x_2^3}{2(\alpha^2+1)}-\frac{-3\alpha x_1+\beta}{3}2x_2^3+(-\alpha x_1^3+\beta x_1^2)2x_2\right]+$$
$$+\left(\frac{x_K^4}{2}\operatorname{arctg}\frac{y_N}{x_K}-\frac{x_N^4}{2}\operatorname{arctg}\frac{y_N}{x_N}\right);$$

$$I_{2,1}^{(2)}=(x_K^5-x_N^5)\left[-\frac{\alpha^2}{10}+\frac{1}{25}+\frac{\ln(\alpha^2+1)}{10}(\alpha^2+1)\right]+(x_K^4-x_N^4)\left[-\frac{\alpha\beta}{4}+\alpha\beta\frac{\ln(\alpha^2+1)}{4}\right]+$$
$$+(x_K^3-x_N^3)\left[-\frac{\beta^2}{6}+\frac{y_N^2}{6}-\frac{y_N^2}{15}+\frac{2y_N^3}{9}+\beta^2\frac{\ln(\alpha^2+1)}{6}\right]+dx\left[\frac{y_N^4}{5}y_N^4-\frac{2y_N^5}{3}\right]-$$
$$-\ln(x_K^2+y_N^2)\left[0.1\cdot x_K^5+\frac{y_N^3}{3}x_K^3\right]+\ln(x_N^2+y_N^2)\left[0.1x_N^5+\frac{y_N^3}{3}x_N^3\right]+$$
$$+\frac{7}{15}y_N^5\left(\operatorname{arctg}\frac{x_K}{y_N}-\operatorname{arctg}\frac{x_N}{y_N}\right);$$

$$I_{2,2}^{(2)}=-\frac{2}{9}\alpha^3\frac{x_K^6-x_N^6}{4}+(x_K^5-x_N^5)\left[-\frac{2}{15}y_N-\frac{2}{15}\alpha^2\beta+\frac{\ln(\alpha^2+1)}{10}(\alpha^2+1)\right]+$$
$$+(x_K^4-x_N^4)\left[\frac{\alpha}{6}-\frac{\alpha\beta^2}{6}+\frac{\ln(\alpha^2+1)}{4}\alpha\beta\right]+$$
$$+(x_K^3-x_N^3)\left[\frac{2\beta}{9}-\frac{2}{27}y_N^3(x_K^3-x_N^3)-\frac{2\beta^3}{27}+\frac{y_N^3}{27}+\beta^2\frac{\ln(\alpha^2+1)}{6}\right]+$$
$$+dx\left[-\frac{2y_N^5}{9}-\frac{\alpha^2+1}{5}x_2^4+\frac{\alpha^2+1}{3}(x_2^3+x_1^2)x_2^2-2x_1x_2^2\right]-$$
$$-\frac{y_N^3}{9}x_K^3\ln(x_K^2+y_N^2)+\frac{y_N^3}{9}x_N^3\ln(x_N^2+y_N^2)+\frac{y_N^3}{9}2y_N^3\left(\operatorname{arctg}\frac{x_K}{y_N}-\operatorname{arctg}\frac{x_N}{y_N}\right)-$$
$$-\frac{\alpha^2+1}{25}(z_K^5-z_N^5)-x_1\frac{\alpha^2+1}{8}(z_K^4-z_N^4)+\frac{\alpha^2+1}{15}x_2^2(z_K^3-z_N^3)\left[\frac{\alpha^2+1}{3}\left(\frac{x_2^2}{15}-\frac{x_2^3+x_1^2}{3}\right)\right]+$$
$$+3\frac{\alpha^2+1}{4}x_1x_2^2(z_K^2-z_N^2)+$$
$$+\ln(z_K^2+x_2^2)\left[\frac{\alpha^2+1}{10}z_K^5+x_1\frac{\alpha^2+1}{4}(z_K^4-x_2^4)+\frac{\alpha^2+1}{6}(x_2^3+x_1^2)z_K^3-\frac{\alpha^2+1}{2}x_1x_2^2(z_K^2+x_2^2)+x_1x_2^2z_K\right]-$$
$$-\ln(z_N^2+x_2^2)\left[\frac{\alpha^2+1}{10}z_N^5+x_1\frac{\alpha^2+1}{4}(z_N^4-x_2^4)+\frac{\alpha^2+1}{6}(x_2^3+x_1^2)z_N^3-\frac{\alpha^2+1}{2}x_1x_2^2(z_N^2+x_2^2)+x_1x_2^2z_N\right]-$$
$$-\left(\operatorname{arctg}\frac{z_K}{x_2}-\operatorname{arctg}\frac{z_N}{x_2}\right)\left[-\frac{\alpha^2+1}{3}(x_2^3+x_1^2)x_2^3+\frac{\alpha^2+1}{5}x_2^5\right]+2x_1x_2^3\left(\operatorname{arctg}\frac{z_K}{a}-\operatorname{arctg}\frac{z_N}{a}\right);$$

$$I_{1,2}^{(2)} = -\frac{y_N}{6}(x_K^4 - x_N^4) + \frac{2\alpha}{15}(x_K^5 - x_N^5) + \frac{\beta}{6}(x_K^4 - x_N^4) + \frac{y_N^3}{9}(x_K^2 - x_N^2) + \frac{y_N^3}{9}(x_K^2 - x_N^2) +$$
$$+\left(\frac{\ln(\alpha^2+1)}{3} - \frac{2}{9}\right)\left[\alpha^3 \frac{x_K^5 - x_N^5}{5} + \frac{3}{4}\alpha^2\beta(x_K^4 - x_N^4) + \frac{3}{4}\alpha\beta^2(x_K^3 - x_N^3) + \frac{\beta^3}{2}(x_K^2 - x_N^2)\right] -$$
$$-\frac{y_N^3}{9}\left[(x_K^2 + y_N^2)\ln(x_K^2 + y_N^2) - (x_N^2 + y_N^2)\ln(x_N^2 + y_N^2)\right] +$$
$$+\alpha^4(z_K^4 - z_N^4) + 3\alpha^2(\beta - \alpha x_1)(z_K^3 - z_N^3) + 3\alpha(\beta - \alpha x_1)\left[-\alpha x_1 + 1\right](z_K^2 - z_N^2) +$$
$$+(\beta - \alpha x_1)^2(\beta - 4\alpha x_1)\cdot dx - x_1(\beta - \alpha x_1)^3,$$

где $dx = x_K - x_N$; $z_K = x_K - x_1$; $z_N = x_N - x_1$; $x_1 = \alpha^2 x_2$; $x_2 = \beta / (\alpha^2 + 1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов В.Я., Шевченко С.И.* О расчете плоских электростатических полей в приборах, имеющих области, заполненные объемным зарядом // Научное приборостроение. 1999. Т. 9, № 4. С. 88–94.
2. *Шевченко С.И.* О расчете аксиально-симметричных электростатических полей в областях, заполненных объемным зарядом // Научное приборостроение. 2002. Т. 12, № 2. С. 23–29.
3. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. М., 1966. 400 с.
4. *Ильин В.П.* Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985. 334 с.
5. *Иванов В.Я.* Методы автоматизированного проектирования приборов электроники. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1986. 193 с.
6. *Шевченко С.И.* Алгоритм получения высокой точности в расчетах аксиально-симметричных электростатических полей // Научное приборостроение. 2002. Т. 12, № 1. С. 40–45.
7. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
8. *Шевченко С.И.* О решении двумерного уравнения Пуассона, когда облако объемного заряда имеет гладкие криволинейные границы. I. Плоская геометрия // Научное приборостроение. 2006. Т. 16, № 1. С. 85–93.
9. *Шевченко С.И.* О расчете траекторий заряженных частиц вблизи криволинейных поверхностей // Научное приборостроение. 2005. Т. 15, № 1. С. 70–79.
10. *Крылов В.И., Шульгина Л.Т.* Справочная книга по численному интегрированию. М.: Наука, 1976. 370 с.
11. *Двайт Г.Б.* Таблица интегралов. Наука, 1973. 228 с.

Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург

Материал поступил в редакцию 25.07.2006.

ON THE SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL POISSON'S EQUATION FOR THE CASE OF A SPACE-CHARGE CLOUD WITH SMOOTH CURVILINEAR BOUNDARIES. II. AXIAL GEOMETRY

S. I. Shevchenko

Institute for Analytical Instrumentation RAS, Saint-Petersburg

The paper presents a solution algorithm to the axial-geometry two-dimensional Poisson's equation by the boundary integral equation method for the case when the space charge cloud has smooth curved boundaries.