
**ИССЛЕДОВАНИЯ, ПРИБОРЫ, МОДЕЛИ
И МЕТОДЫ АНАЛИЗА**

УДК 534.23

© Б. П. Шарфарец

К ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛЕНИИ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ОБЪЕМНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ РАССЕИВАТЕЛЕЙ

В работе приводятся некоторые подходы к вычислению амплитуды рассеяния акустических рассеивателей, применяемые в различных областях теории рассеяния волн и частиц. Рассматриваются как объемные, так и поверхностные рассеиватели. Приводятся примеры конкретных расчетов, проведенных различными методами.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важнейших характеристик используемых в задачах рассеяния волн и частиц является амплитуда рассеяния (ар). Ар является как бы "паспортом" рассеивателя, характеризующим его свойства. С помощью этой характеристики решаются всевозможные прямые и обратные задачи теории и практики рассеяния. В частности, знание ар отдельных рассеивателей является необходимым условием для проведения вычислений по приведенному в работе [1] и других работах автора методу учета многократного рассеяния в акустике и электродинамике. В настоящей работе некоторые подходы к вычислению ар, применяемые в различных областях теории рассеяния, адаптируются к нуждам теории рассеяния в акустике. Рассматриваются как объемные, так и поверхностные рассеиватели.

АМПЛИТУДА РАССЕЯНИЯ ОБЪЕМНЫХ РАССЕИВАТЕЛЕЙ. ОБЩИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Рассмотрим случай объемного рассеивателя, вызванного наличием в однородном пространстве \mathbf{R}^3 некоторой ограниченной области D , включающей в себя начало координат, с возмущенными плотностью среды $\rho_1(\mathbf{x})$ и скоростью звука $c_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D$:

$$c(\mathbf{x}) = \begin{cases} c = \text{const}, & \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \setminus D; \\ c_1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D; \end{cases} \quad (1)$$

$$\rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho = \text{const}, & \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \setminus D; \\ \rho_1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D, \end{cases}$$

где c и ρ — невозмущенные значения скорости звука и плотности среды пространства \mathbf{R}^3 .

Запишем уравнение для звукового давления $p(\mathbf{x})$ в этом случае [2]:

$$\Delta p(\mathbf{x}) + k^2 n(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) - \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \rho(\mathbf{x}) \cdot \nabla p(\mathbf{x}) = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3,$$

где $\mathbf{x} = (x, y, z)$; $k = \omega/c$ — волновое число; $n(\mathbf{x}) = c^2/c^2(\mathbf{x})$ — показатель преломления, равный единице в области $\mathbf{R}^3 \setminus D$. Заметим, что в (2) предполагается дифференцируемость плотности ρ . После замены $u = p/\rho$ получаем:

$$\Delta u + K^2(\mathbf{x})u = 0, \quad (3)$$

где

$$K^2(\mathbf{x}) = k^2 n(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\rho} \Delta \rho - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \rho \right). \quad (4)$$

Перепишем (3) с учетом (1) и (4) в виде неоднородного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = \left[k^2 (1 - n(\mathbf{x})) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \rho \right) - \frac{1}{2\rho} \Delta \rho \right] u. \quad (5)$$

Решение (5) при условии наличия первичной падающей волны u_i ищется формально из интегрального уравнения (ИУ) Липпмана—Швингера, которое при стандартном допущении о том, что u_i представляет собой плоскую волну $u_i = e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}}$, где \mathbf{k}_i — соответствующий ей волновой вектор, имеет вид [3]

$$u(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}} - k^2 \int_D \frac{\exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} m(\mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d^3 y, \quad (6)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3,$$

где с учетом (5)

$$m(\mathbf{y}) = 1 - n + \frac{1}{k^2} \left(\frac{3}{4} \frac{1}{\rho} \nabla \rho - \frac{1}{2\rho} \Delta \rho \right). \quad (7)$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \text{ — фундаментальное ре-}$$

шение уравнения Гельмгольца.

Отметим, что $p(\mathbf{x}) \equiv u(\mathbf{x})$ в области $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \setminus D$.
Наконец, полагая $\rho(\mathbf{x}) = \rho = \text{const}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$, прих-
одим к обычной форме уравнения Липпмана—
Швингера [3] для $m(\mathbf{x})$:

$$m(\mathbf{x}) = 1 - n(\mathbf{x}) = 1 - \frac{c^2}{c_1(\mathbf{x})^2}. \quad (7a)$$

В работе [3, теорема 8.7] показано, что уравне-
ние Липпмана—Швингера (6) при всяком $k > 0$
имеет единственное решение, непрерывно зави-
сющее от амплитуды падающей волны u_i .

Из (6) следует выражение для ар [3], получае-
мое предельным переходом $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ под знаком
интеграла и выделением множителя при сфериче-
ской волне $\frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|}$:

$$T(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) = -\frac{k^2}{4\pi} \int_D \exp(-i\mathbf{k}_s \mathbf{y}) m(\mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d^3 y. \quad (8)$$

Здесь учтено, что функция $u(\mathbf{x})$ из (6) и (8) зави-
сит от направления падения плоской волны
 $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, \mathbf{k}_i)$. Из (8) очевидно, что нахождение ар
в общем случае является нетривиальной задачей,
т. к. для этого предварительно необходимо решить
интегральное уравнение (6) и вычислить функцию
 $u(\mathbf{x}, \mathbf{k}_i)$ для всех необходимых значений вектора
 \mathbf{k}_i .

Выражение для ар также можно получить, вос-
пользовавшись разложением сферической волны
в (6) по плоским волнам [2] и техникой, изложен-
ной в работах [4, 5]. В этом случае выражение (6)
перепишется в виде

$$u(\mathbf{x}) = u_i + u_s = e^{ik^n \mathbf{x}} + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\exp(i\mathbf{k}_s \mathbf{x})}{\alpha_s} T_m^n(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) dk_{sx} dk_{sy}, \quad (9)$$

$m, n = 1, 2.$

Здесь $\mathbf{k}^1 = (k_x, k_y, \alpha)$, $\mathbf{k}^2 = (k_x, k_y, -\alpha)$, $\alpha = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$, а $T_m^n(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s)$ определяется из (8).
При $m=1$ плоская падающая волна распростра-
няется снизу вверх в сторону увеличения коорди-
наты z , при $m=2$ — в сторону уменьшения коор-
динаты z . При $n=1$ рассеянная волна распро-
страняется снизу вверх в сторону увеличения ко-
ординаты z , при $n=2$ — рассеянная волна рас-

пространяется сверху вниз в сторону уменьшения
координаты z .

Приближение Борна для ар имеет вид [3, 6]:

$$T_m^n(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) = T_m^n(\mathbf{k}_i^m - \mathbf{k}_s^n) = -\frac{k^2}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \exp(i(\mathbf{k}_i^m - \mathbf{k}_s^n) \mathbf{y}) m(\mathbf{y}) d^3 y. \quad (10)$$

Как видно из (10), ар в приближении Борна за-
висит только от одной переменной $\rho = \mathbf{k}_i^m - \mathbf{k}_s^n$,
равной вектору, соединяющему две точки на сфе-
ре радиусом k .

Следуя идее, изложенной в работе [6, с. 76],
умножим обе части в (9) на $-\frac{k^2}{4\pi} \exp(-i\mathbf{k}^l \mathbf{x}) m(\mathbf{x})$,
 $l=1, 2$ и проинтегрируем по \mathbf{x} в области D . В ре-
зультате получаем уравнения, связывающие ар (8)
и ар в приближении Борна (10):

$$T_m^l(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}) = T_m^l(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}) + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \frac{T_n^l(\mathbf{k}_s, \mathbf{k})}{\alpha_s} T_m^n(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) dk_{sx} dk_{sy}; \quad (11)$$

$l, m, n = 1, 2.$

Для получения интегрального уравнения необхо-
димо в (11) потребовать выполнения условия $n=l$.
В результате получаем интегральное уравнение

$$T_m^l(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}) = T_m^l(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}) + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \frac{T_l^l(\mathbf{k}_s, \mathbf{k})}{\alpha_s} T_m^l(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) dk_{sx} dk_{sy}; \quad (12)$$

$l, m = 1, 2.$

Отметим, что ИУ в виде (12) отличаются от по-
лученных в [6] и других работах тем, что в (12)
рассматривается не в 3-, а в 2-мерном импульсном
пространстве.

Теперь, предварительно вычислив ар в при-
ближении Борна (10), можно из (12) вычислить
искомую амплитуду рассеяния. В работе [6] при-
веден пример решения ИУ (12) для потенциала
Юкава.

Как видно из (12), ар $T_m^l(\mathbf{k}_i, \mathbf{k})$ представляет
собой разрешающее ядро (резольвенту) ядра
 $T_m^0(\mathbf{k}_i, \mathbf{k})$, совпадающего с ар в приближении Бор-
на, что может быть использовано для изучения
свойств ар $T_m^l(\mathbf{k}_i, \mathbf{k})$.

Таким образом, задача нахождения ар в общем
случае может быть сведена либо к решению инте-

грального уравнения (6) для $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D$ с последующим вычислением ар из выражения (8), либо напрямую из интегрального уравнения (12).

РЕШЕНИЕ ИСХОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (6)

Приведем некоторые методы решения исходного интегрального уравнения (6) с учетом того, что достаточно найти решение $u(\mathbf{x})$ только в области D . После этого можно воспользоваться выражением (8) для вычисления ар, с помощью которой можно затем найти поле рассеяния [1] (такой подход является альтернативным методу нахождения поля рассеяния путем решения интегрального уравнения (8) в области $\mathbf{R}^3 \setminus D$ (см. библиографию в [3])). Отметим, что ядро интегрального уравнения (6) имеет слабую особенность, поэтому его необходимо заменять близким по норме непрерывным ядром.

Аппроксимация ядра интегрального уравнения близким по норме ядром

Ядро $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ИУ (6) является ядром со слабой особенностью, оставаясь при этом фредгольмовским [7, 8]:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} m(\mathbf{y}). \quad (13)$$

В работе [8, с. 299] показано, что при замене ядра со слабой особенностью (13) непрерывным ядром

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{\exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} m(\mathbf{y}), & |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq \varepsilon; \\ \frac{\exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi\varepsilon} m(\mathbf{y}), & |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \varepsilon, \end{cases} \quad (14)$$

где ε — некоторая малая константа, норма разностного ядра $R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ равна

$$\|R(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{\infty} = \max_{\mathbf{x} \in B} \int_B |R(\mathbf{x}, \mathbf{y})| d\mathbf{y} \leq \frac{M\varepsilon^2}{2}, \quad (15)$$

где $M = \|m(\mathbf{x})\|_{\infty} = \max_{\mathbf{x} \in D} |m(\mathbf{x})|$, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ и при достаточно малых величинах M дает хорошее приближение.

Пусть далее ядро L из каких-либо соображений в свою очередь необходимо аппроксимировать другим (к примеру, вырожденным) ядром $L_N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Тогда норма результирующего разностного ядра удовлетворяет неравенству

$$\|R_1\|_{\infty} = \|K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - L_N(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{\infty} =$$

$$\begin{aligned} &= \|K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - L_N(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{\infty} \leq \\ &\leq \|R\|_{\infty} + \|R_{L_N}\|_{\infty} = \alpha, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\|R_{L_N}\|_{\infty} = \|L - L_N\|_{\infty}$, и при малом ε $\|R_1\|_{\infty}$ практически не превосходит нормы ядра $R_{L_N} = L - L_N$.

После определения нормы $\|R_1\|_{\infty}$ можно воспользоваться различными оценками [7, 9, 10] для получения нормы разности решений интегрального уравнения соответственно с исходным ядром и аппроксимирующим ядром. Из всего многообразия оценок приведем наиболее простую [11, с. 359], которая применительно к ядру (13) имеет вид

$$|u(\mathbf{x}) - u_N(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in D} = O(\alpha). \quad (17)$$

Здесь $u(\mathbf{x})$ — решение инт. уравнения (6); $u_N(\mathbf{x})$ — решение инт. уравнения вида (6), где вместо ядра K фигурирует L_N . Отметим, что в указанных работах приведены более точные оценки невязки решения инт. уравнения при аппроксимации исходного ядра. Впрочем, в рамках настоящей работы ограничимся оценкой (17).

Далее рассмотрим некоторые методы решения интегрального уравнения (6).

Метод последовательных приближений

Одним из часто применяющихся является метод последовательных приближений. Пусть B — шар минимального радиуса a с центром в начале координат, описывающий включающую в себя все неоднородности область D . Тогда (6) для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ может быть переписано в виде (в силу того, что $m(\mathbf{y}) \equiv 0$ в области $B \setminus D$)

$$u(\mathbf{x}) = u_i - k^2 \int_B \frac{\exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} m(\mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d^3 y, \quad (18)$$

$\mathbf{x} \in D$.

Как показано в [3], метод последовательных приближений сходится к точному решению при условии

$$ka < \sqrt{\frac{2}{M}}. \quad (19)$$

В этом случае справедлива оценка [9]

$$\|u(\mathbf{x}) - u_r(\mathbf{x})\|_{\infty} \leq \frac{(Ma^2 k^2 / 2)^{r+1}}{1 - Ma^2 k^2 / 2}. \quad (20)$$

Здесь

$$u_r(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^r (-1)^n k^{2n} K^n [u_i](\mathbf{x}), \quad (21)$$

где

$$K^n[u_i](\mathbf{x}) = \int_B \left\{ \int_B \dots \int_B G(\mathbf{x}, \mathbf{t}_1) m(\mathbf{t}_1) G(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) m(\mathbf{t}_2) \dots \dots G(\mathbf{t}_{n-1}, \mathbf{y}) m(\mathbf{t}_{n-1}) \underbrace{dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}}_{n-1} \right\} \times m(\mathbf{y}) u_i(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

В случае если условие (19) не выполнено, то для $k \geq \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{M}}$ резольвенту интегрального оператора (18) $R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k^2 + \lambda)$ можно вычислить с помощью аналитического продолжения [10]

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k_0^2 + \lambda) = R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k_0^2) + \lambda R_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k_0^2) + \lambda^2 R_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k_0^2) + \dots,$$

где R_n — повторные ядра резольвентного ядра R ; k_0 — некоторое значение k , для которого выполняется условие (19).

Ниже на рис. 1 приведена зависимость величины $\sqrt{\frac{2}{M}}$ от значения c_1 для случая, когда в (7а) $c_1(\mathbf{x}) = c_1 = \text{const}$. При этом $c = 1500$ м/с. В точке $c_1 = 1500$ на графике сингулярность. Очевидно, что в окрестностях этой точки ka из (18) может варьироваться в широких пределах: от $ka = 2$

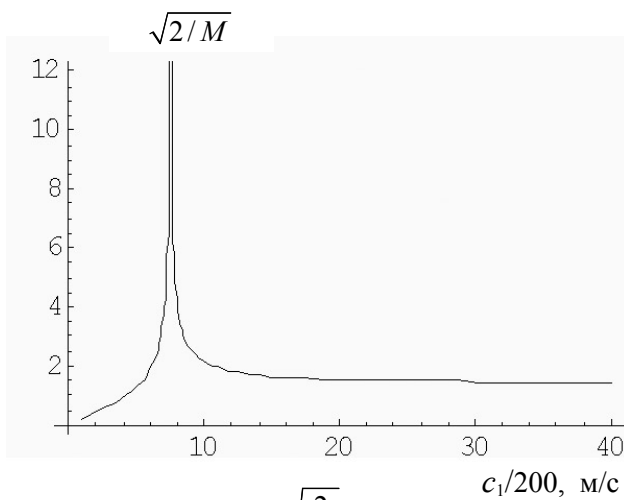


Рис. 1. Зависимость $\sqrt{\frac{2}{M}}$ от скорости звука в неоднородном включении

при $c_1 \in [1225, 2122]$ до $ka \rightarrow \infty$ при $c_1 \rightarrow 1500_{\pm 0}$. Вне этой окрестности $ka < 2$.

Редукция исходного трехмерного интегрального уравнения к системе одномерных

В задачах с радиальной симметрией, когда $m(\mathbf{x}) = m(r)$, возможна редукция трехмерного ИУ (6) к системе одномерных [12, 13 и др.]. В этом случае в ИУ (6) используется разложение [3, с. 29]

$$\frac{\exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{ik}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) f_n(r, r') P_n(\cos \Theta), \quad (22)$$

где

$$f_n(r, r') = \begin{cases} j_n(kr) h_n^{(1)}(kr'), & r \leq r', \\ j_n(kr') h_n^{(1)}(kr), & r > r'; \end{cases}$$

$r = |\mathbf{x}|$; $r' = |\mathbf{y}|$; Θ — угол между \mathbf{x} и \mathbf{y} ; P_n — полиномы Лежандра; $j_n, h_n^{(1)}$ — сферические функции Бесселя соответственно первого и третьего рода. В реальных вычислениях необходимо в (22) оперировать конечной суммой. В качестве аппроксимирующего ядра L_N возьмем конечную сумму

$$L_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{ik}{4\pi} m(r') \sum_{n=0}^N (2n+1) f_n(r, r') P_n(\cos \Theta). \quad (23)$$

В качестве L примем ядро (14). Для оценки N необходимо вычислить норму разностного ядра $\|L - L_N\|$. Анализ выражения (22) показывает, что модуль остаточного члена ряда как функции \mathbf{y} при $r = |\mathbf{x}| = \text{const}$ и при $R = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \text{const}$ возрастает с ростом r . При $r = 0$ ряд (22) вырождается в единственный член ряда с индексом $n = 0$, и тем самым $L_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ точно описывает ряд (22) (остаточный член тождественно равен нулю). На рис. 2 приведены зависимости $50 \times |L_{10}|$ и $|L_{500}|$ в центре сферической волны $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 0$ от величины r удаления этого центра от начала координат. Из рисунка видно, что, во-первых, точность падает с ростом r , а во-вторых, достаточно точно выполняется зависимость $N_2 \times |L_{N_1}(r, r)| = N_1 \times |L_{N_2}(r, r)|$, $N_i \neq 0$.

На рис. 3–5 представлены зависимости модуля разностного ядра R_{L_N} в зависимости от N и r_1 , где $r_1 = |\mathbf{y}|$, а точка \mathbf{y} лежит на луче, соединяющем начало координат и точку \mathbf{x} .

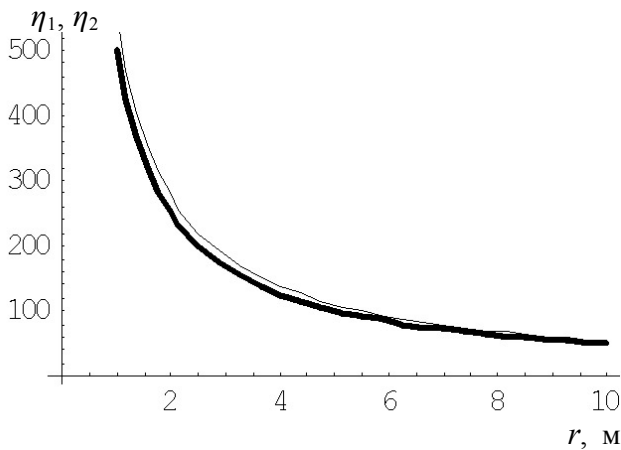


Рис. 2. Зависимости $\eta_1 = 50 \times |L_{10}(r, r')|$ (——) и $\eta_2 = |L_{500}(r, r')|$ (——) от r

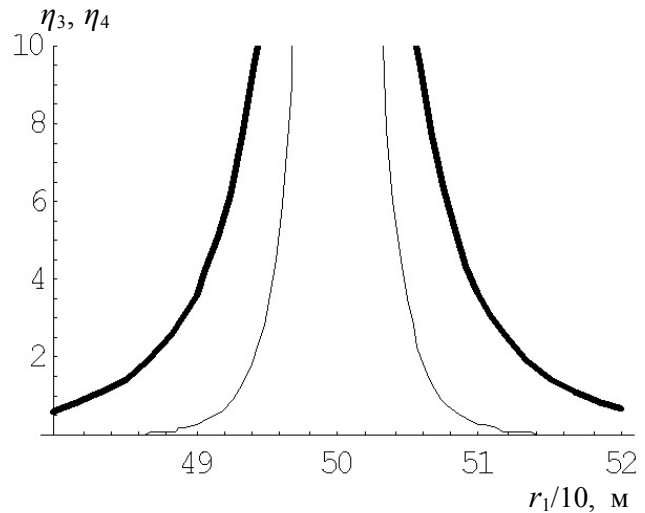


Рис. 3. Зависимости $\eta_3 = R_{L_5}$ (——) и $\eta_4 = R_{L_{100}}$ (——) при $r = 1$

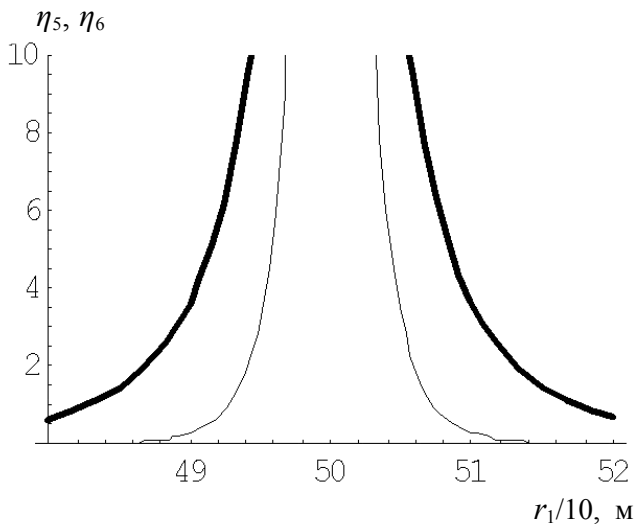


Рис. 4. Зависимость $\eta_5 = R_{L_{50}}$ (——) и $\eta_6 = R_{L_{180}}$ (——) при $r = 5$

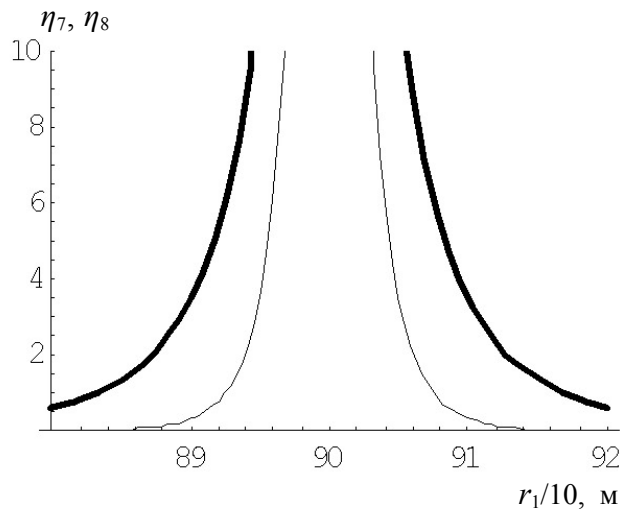


Рис. 5. Зависимость $\eta_7 = R_{L_{95}}$ (——) и $\eta_8 = R_{L_{310}}$ (——) при $r = 9$

На рис. 3–5 утолщенные и обычные кривые соответственно рассчитаны с одинаковой точностью. Видно, что по мере роста $r = |\mathbf{x}|$ (r соответственно равно 1, 5 и 9) число членов суммы N в (23) монотонно растет для утолщенных и обычных кривых соответственно в пропорции 9 : 50 : 95 и 100 : 180 : 310. Очевидно, что при достаточно больших N разностное ядро существенно отличается от нуля только в ближайшей окрестности центра сферической волны $r = r_1$ и чем дальше этот центр от начала координат, тем большим должно быть N для обеспечения заданной точности.

Во всех приведенных выше расчетах было принято $k = 1$. Отметим, что оценку нормы остаточного члена (15), (16) достаточно уметь вычислять для $k = 1$. Действительно, норма разностного ядра (15) не зависит от k , а для нормы (16) легко показать, что имеет место следующее равенство:

$$\int_B |R_{L_N}(k, \mathbf{x}, \mathbf{y})| d\mathbf{y} = \frac{1}{k^2} \int_{kB} |R_{L_N}(k=1, \mathbf{X}, \mathbf{Y})| d\mathbf{Y}.$$

Здесь $\mathbf{X} = k\mathbf{x}$; $\mathbf{Y} = k\mathbf{y}$; $B' = kB$ — шар радиусом, в k раз превышающим радиус шара B . От-

метим, что величина ε , фигурирующая в непрерывном ядре (14), при переходе к координатам $(k=1, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ трансформируется в величину $\varepsilon' = k\varepsilon$, а шар $B_\varepsilon \Rightarrow B_{k\varepsilon}$.

После определения величины N можно записать ИУ с аппроксимирующим ядром L_N :

$$u_N(\mathbf{x}) = e^{ik\mathbf{x}} - k^2 \int_B L_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_N(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (24)$$

где

$$L_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{ik}{4\pi} m(r') \sum_{n=0}^N (2n+1) f_n(r, r') P_n(\cos \Theta). \quad (25)$$

В рассматриваемом случае область D представляет собой шар B радиусом a с центром в начале координат (радиус a может быть и бесконечным) и $m(\mathbf{x}) = m(r)$. Положим в силу симметрии задачи, что плоская первичная волна распространяется вдоль положительного направления оси z . Тогда (6) преобразуется к виду

$$u(\mathbf{r}) = e^{ikz} - k^2 \int_B \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} m(r') u(\mathbf{r}') d^3r', \quad (26)$$

$$\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3.$$

Как показано в [6, 13], решение интегрального уравнения (26) сводится к решению счетной системы одномерных интегральных уравнений вида

$$\chi_n(r) = \tilde{j}_n(kr) + k^2 \int_0^a g_n(r, r') m(r') \chi_n(r') dr'; \quad (27)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad r \in [0, \infty).$$

$$\text{Здесь } g_n(r, r') = \begin{cases} \frac{1}{k} \tilde{j}_n(kr) \tilde{n}_n(kr'), & r < r', \\ \frac{1}{k} \tilde{j}_n(kr') \tilde{n}_n(kr), & r > r' \end{cases} \quad \text{— функ-}$$

ция Грина задачи;

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 + \frac{n(n+1)}{r^2} \right) g_n(r, r') = \delta(r - r'), \quad (28)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\tilde{j}_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) = kr j_n(kr);$$

$$\tilde{n}_n(kr) = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} J_{-(n+\frac{1}{2})}(kr) = kr n_n(kr);$$

J — цилиндрическая функции Бесселя первого рода; $n_n(kr)$ — сферические функции Бесселя вто-

рого рода; $\tilde{j}_n(kr)$, $\tilde{n}_n(kr)$ — линейно независимые решения однородного уравнения (28).

Тогда решение (26) выражается через решения (27) в виде:

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{kr} \sum_{n=0}^{\infty} i^n A_n (2n+1) \chi_n(r) P_n(\cos \Theta), \quad (29)$$

$$\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3,$$

где

$$A_n = \frac{1}{1 + ik \int_0^a m(r') \tilde{j}_n(kr') \chi_n(r') dr'}$$

Асимптотика поля (29) имеет вид [17]

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{kr} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) e^{i\delta_n} \sin(kr - \frac{n\pi}{2} + \delta_n) P_n(\cos \Theta),$$

откуда следует выражение для амплитуды рассеяния [4, 17]

$$f(\Theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (e^{2i\delta_n} - 1) P_n(\cos \Theta). \quad (30)$$

Здесь δ_n определяется выражением

$$\text{tg}(\delta_n) = -k \int_0^a m(r) \tilde{j}_n(kr) \chi_n(r) dr. \quad (31)$$

Таким образом, после решения счетной системы (27) и нахождения из последних выражений постоянных δ_n может быть рассчитана амплитуда рассеяния из (30). Очевидно, что замена ряда (30) конечной суммой первых $N+1$ членов эквивалентна решению интегрального уравнения (24) с усеченным аппроксимирующим ядром (25).

Еще больше упрощается задача расчета ap в случае радиально-симметричной неоднородности, сосредоточенной в ограниченном шаре B .

СЛУЧАЙ РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Пусть задан сферически симметричный ограниченный рассеиватель, заключенный в шаре B радиусом a с центром в начале координат. Решение задачи рассеяния $u = u_i + u_s$ внутри области B , где $u_i = e^{ikz}$ — первичная падающая плоская волна, u_s — рассеянная волна, имеет применительно к акустике вид [13]:

$$u(r, \Theta) = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \chi_l(k, r) P_l(\cos \Theta), \quad (32)$$

где

$$\chi_l'' + [k^2(1 - m(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2}] \chi_l = 0, \quad (33)$$

$$\chi_l(0) = 0, \quad r \in [0, a]$$

или с учетом (7а):

$$\chi_l'' + [k^2 \frac{c^2}{c_1^2(\mathbf{x})} - \frac{l(l+1)}{r^2}] \chi_l = 0, \quad (34)$$

$$\chi_l(0) = 0, \quad r \in [0, a].$$

Вне шара B решение задачи рассеяния имеет вид

$$u = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \times$$

$$\times \left[\tilde{j}_l(kr) + \frac{1}{2} \alpha_l \tilde{h}_l^{(1)}(kr) \right] P_l(\cos \Theta), \quad (35)$$

где $\tilde{h}_l^{(1)}(kr) = kr h_l^{(1)}(kr)$; $h_l^{(1)}(kr)$ — сферическая функция Ханкеля; α_l — неизвестные постоянные. При всех $\alpha_l = 0$ выражение (35) представляет собой падающую плоскую волну.

Из (35) следует выражение для ар [13]:

$$f(\Theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \alpha_l P_l(\cos \Theta). \quad (36)$$

Коэффициенты α_l определяются из соотношения [13]:

$$\alpha_l = -2 \frac{L_l \tilde{j}_l(ka) - ka \tilde{j}_l'(ka)}{L_l \tilde{h}_l^{(1)}(ka) - ka \tilde{h}_l^{(1)'}(ka)}, \quad (37)$$

где $L_l = \left(\frac{d \ln \chi_l}{d \ln r} \right)_{r=a}$ — логарифмическая производная на границе $r = a$; производные в (37) берутся по аргументу kr . Логарифмические производные L_l легко рассчитываются при помощи решений χ_l . Например, решением (34) при постоянном показателе преломления $n(r) = n = c^2 / c_1^2$ является функция

$$\tilde{j}_l(k_1 r) = A_l \sqrt{\frac{\pi k_1 r}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(k_1 r),$$

где $k_1 = k \frac{c}{c_1}$; A_l — некоторые постоянные коэффициенты. При этом для нахождения величин L_l отпадает необходимость вычисления постоянных A_l , которые в этом случае просто сократятся.

Отметим, что имеет место соотношение [13]

$$\alpha_l = (e^{2i\delta_n} - 1).$$

СЛУЧАЙ ОДНОРОДНОГО ШАРА

Наиболее простым для анализа является случай, когда в качестве объемного рассеивателя выбран шар B , радиусом a с центром в начале координат. Плотность шара совпадает с плотностью окружающей среды, скорость звука постоянна:

$$m(\mathbf{x}) = \begin{cases} |1 - c^2 / c_1^2| = M = \text{const}, & \mathbf{x} \in B; \\ 0, & \mathbf{x} \notin B. \end{cases}$$

Рассмотрим ряд (36). Учитывая, что $|P(x)| \leq 1$, $x \in [-1, 1]$, а также то, что при $l \gg 1$ справедливо

отношение $\frac{2l+1}{2l+3} \sim 1$, приходим к выводу, что

скорость сходимости ряда (36) определяется поведением коэффициентов α_l . Для случая однородной сферы при различных радиусах a поведение коэффициентов α_l представлено в таблице. Скорость звука в окружающей среде $c_1 = 1500$ м/с, частота $f = 1000$ Гц. Как видно, при $a = 1$ м последовательность α_l мажорируется геометрической прогрессией со знаменателем 10^{-1} уже начиная с $l_0 = 5$; при $a = 2$ м — начиная с $l_0 = 13$ и т. д. Поэтому погрешность оценки ряда (36) конечной суммой l_0 слагаемых ($l = 0, 1, \dots, l_0 - 1$), не превышает $\frac{10}{9} \alpha_{l_0}$. Реально с ростом a число слагаемых в конечной сумме ряда можно принимать значительно меньшим соответствующего значения l_0 (см. таблицу).

Ниже на рис. 6–10 представлены кривые модуля ар в зависимости от угла падения при a , равных соответственно 1 м, 2 м, ..., 5 м. На рис. 11 они представлены в одних координатах. Как видно, величина первого минимума кривых уменьшается от $\sim \pm 70^\circ$ при $a = 1$ м до $\sim \pm 10^\circ$ при $a = 5$ м. Амплитуда максимума при этом возрастает соответственно от 0.679 до 68.8.

Отметим, что близкие результаты получены автором при вычислении ар из системы одномерных интегральных уравнений (27) при $n = 4$ для случая, относящегося к рис. 6 ($f = 1000$ Гц, $a = 1$, $c = 1500$ м/с, $c_1 = 1500$ м/с). Уравнения решались методом квадратур с использованием квадратурной формулы Симпсона [15]. Отметим, однако, что скорость вычислений при это уменьшилась практически на порядок по сравнению со случаем использования формул (36), (37).

Коэффициенты α_l в случае объемного рассеивателя в виде однородной сферы при различных радиусах a

l	$a = 1$ м	$a = 2$ м	$a = 3$ м	$a = 4$ м	$a = 5$ м
0	0.455	1	1.459	1.732	1.914
1	0.549	0.971	1.360	1.732	1.946
2	0.407	0.998	1.433	1.705	1.909
3	0.163	0.842	1.341	1.730	1.936
4	0.039	0.895	1.327	1.653	1.903
5	0.006	0.821	1.340	1.704	1.905
6	0.0006	0.533	1.172	1.620	1.903
13	$1.1 \cdot 10^{-13}$	$1 \cdot 10^{-5}$	0.047	1.07	1.595
14	$2.28 \cdot 10^{-15}$	$9.19 \cdot 10^{-7}$	0.012	0.723	1.571
20	$1.2 \cdot 10^{-26}$	$3.28 \cdot 10^{-14}$	$1.52 \cdot 10^{-7}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	0.249
21	$1.1 \cdot 10^{-28}$	$1.27 \cdot 10^{-15}$	$1.48 \cdot 10^{-8}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	0.109
27	$1.2 \cdot 10^{-41}$	$7 \cdot 10^{-25}$	$1.62 \cdot 10^{-15}$	$2.3 \cdot 10^{-9}$	$3.7 \cdot 10^{-5}$
28	$6.3 \cdot 10^{-44}$	$1.5 \cdot 10^{-26}$	$8.4 \cdot 10^{-17}$	$2.3 \cdot 10^{-10}$	$6.56 \cdot 10^{-6}$
35	$1.9 \cdot 10^{-60}$	$5.5 \cdot 10^{-39}$	$1.2 \cdot 10^{-26}$	$2.8 \cdot 10^{-18}$	$3.5 \cdot 10^{-12}$
36	$3.8 \cdot 10^{-63}$	$212 \cdot 10^{-41}$	$3.6 \cdot 10^{-22}$	$1.6 \cdot 10^{-19}$	$3.3 \cdot 10^{-13}$

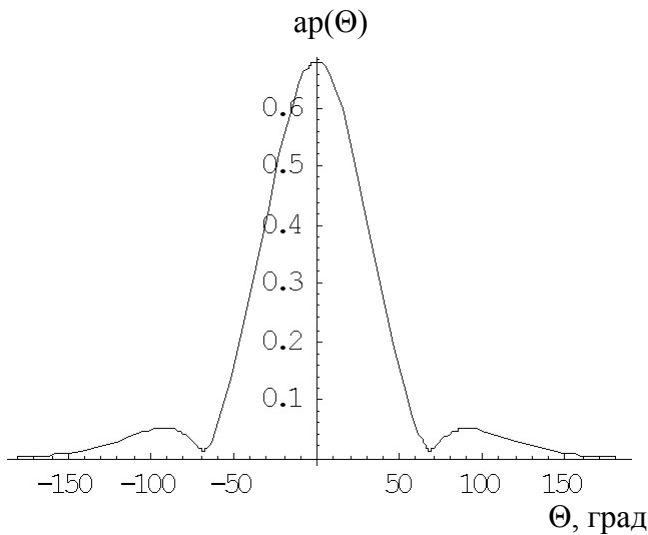


Рис. 6. Зависимость модуля ar от угла Θ при $ka = 4/3 \pi$, $a = 1$

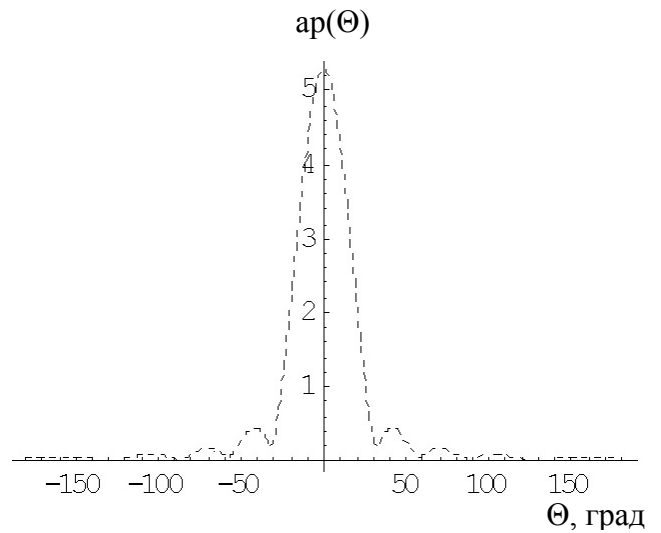


Рис. 7. Зависимость модуля ar от угла Θ при $ka = 8/3 \pi$, $a = 2$

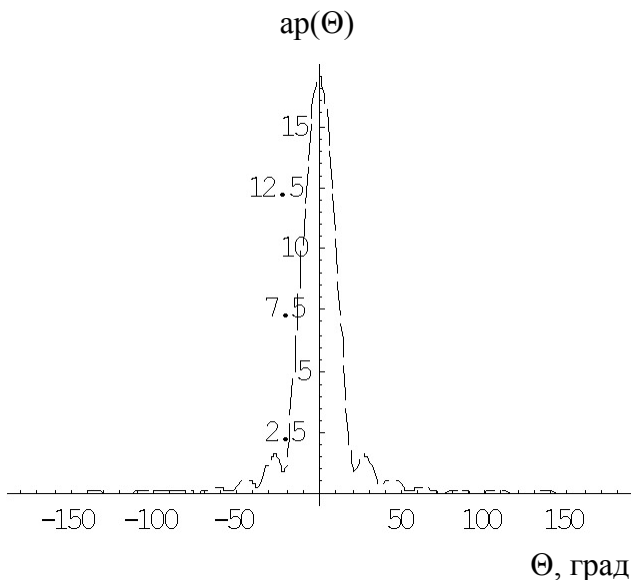


Рис. 8. Зависимость модуля ар от угла Θ при $ka = 4\pi$, $a = 3$

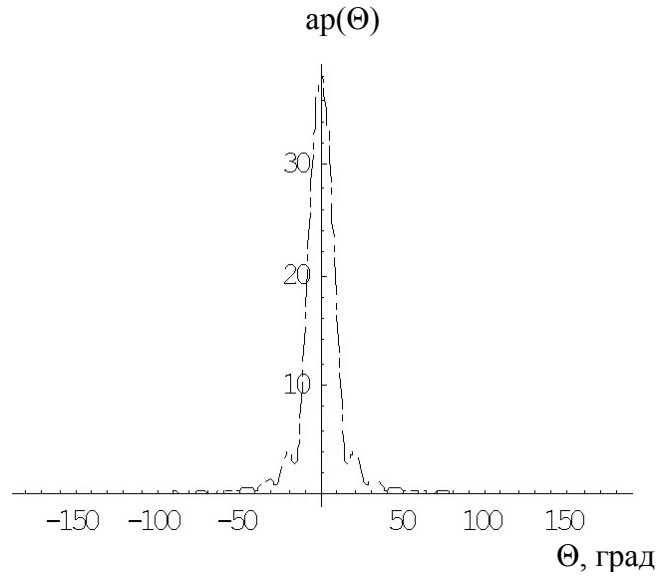


Рис. 9. Зависимость модуля ар от угла Θ при $ka = 16/3\pi$, $a = 4$

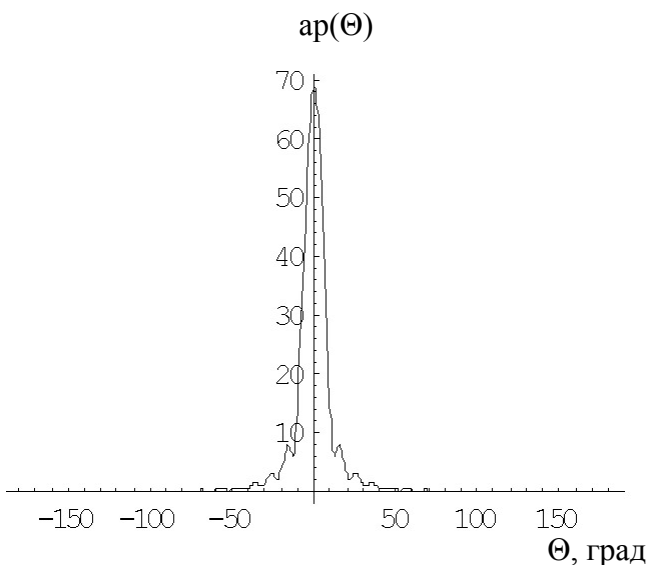


Рис. 10. Зависимость модуля ар от угла Θ при $ka = 20/3\pi$, $a = 5$

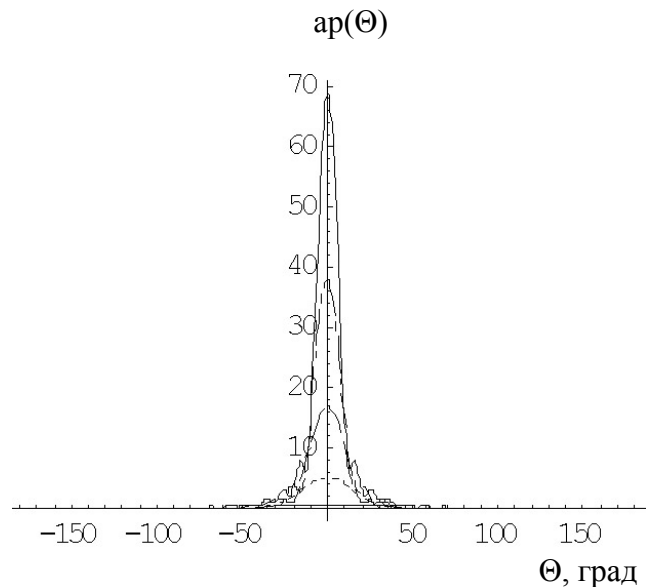


Рис. 11. Зависимость модуля ар от угла Θ для всех случаев, показанных на рис. 6–10

АМПЛИТУДА РАССЕЙЯНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ РАССЕИВАТЕЛЕЙ

Пусть в \mathbf{R}^3 в поле плоской падающей волны $u_i = e^{ik_i x}$ находится поверхностный рассеиватель, занимающий область D с гладкой замкнутой границей ∂D . Рассмотрим две задачи: на границе рассеивателя для суммарного поля падающей

и рассеянной волн $u(\mathbf{x}) = u_i + u_s$ выполняется

- 1) однородное условие Дирихле

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D \quad (38)$$

или

- 2) однородное условие Неймана

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D, \quad (39)$$

где \mathbf{n} — вектор внешней нормали к поверхности ∂D .

Тогда суммарное поле можно определить соответственно из выражений [12]:

$$u(\mathbf{x}) = u_i(\mathbf{x}) - \int_{\partial D} \psi(\mathbf{y}) G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds_y \quad (40)$$

для условия Дирихле и

$$u(\mathbf{x}) = u_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial D} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds_y \quad (41)$$

для условия Неймана. В (40) и (41) $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \setminus D$; \mathbf{n}' в (41) — вектор внешней нормали к ∂D в точке \mathbf{y} ;

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (42)$$

Для определения функций $\psi(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x})$ из (40), (41) следуют интегральные уравнения [12]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \psi(\mathbf{x}) + \int_{\partial D} \psi(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds_y = \\ = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D; \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varphi(\mathbf{x}) - \int_{\partial D} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds_y = \\ = u_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D. \end{aligned} \quad (44)$$

Из (40), (41) следуют обычным порядком выражения для амплитуд рассеяния для обоих рассматриваемых случаев

$$T_D(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \psi(\mathbf{y}) \exp(-i\mathbf{k}_s \mathbf{y}) ds_y, \quad (45)$$

$$T_N(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) = \frac{i}{4\pi} \int_{\partial D} (\mathbf{k}_s \mathbf{n}') \varphi(\mathbf{y}) \exp(-i\mathbf{k}_s \mathbf{y}) ds_y. \quad (46)$$

Здесь по-прежнему учтено, что имеют место зависимости

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}_i), \quad \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k}_i). \quad (47)$$

В работе [12] приведено решение интегрального уравнения для шара с однородными условиями Дирихле и Неймана. В общем случае интегральные уравнения (43), (44) рассматриваются в работе [14].

ВЫВОДЫ

В настоящей работе применительно к акустике рассмотрены различные методы вычисления ам-

плитуды рассеяния объемных и поверхностных рассеивателей, принятые в теории рассеяния волн и частиц. Приведены точные и приближенные методы вычислений. Указаны погрешности использования приближенных методов. Приведены примеры расчетов и некоторые вычислительные тонкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шарфарец Б.П. Метод решения задач множественного рассеяния на нескольких телах в однородной безграничной среде // Акуст. журн. 2005. Т. 51, № 5. С. 672–681.
2. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
3. Colton D., Kress R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. Springer, New York, 1998.
4. Шарфарец Б.П. Поле направленного излучателя в слоисто-неоднородном волноводе // Акуст. журн. 1985. Т. 31, № 1. С. 119–125.
5. Hansen T.B. and Yaghjian A.D. Plane-wave theory of time-domain fields. IEEE Press, New York, 1999.
6. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960. 860 с.
7. Забрейко П.П., Кошелев А.И. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
8. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
9. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ. Справочное пособие. Киев: Наукова думка, 1986. 584 с.
10. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975. 304 с.
11. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука, 1965. 384 с.
12. Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
13. Флюгге З. Задачи по квантовой механике. Т. 1. М.: Мир, 1974. 341 с.
14. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
15. Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003. 608 с.

Санкт-Петербург

Материал поступил в редакцию 26.06.2006.

ON CALCULATION OF SCATTERING AMPLITUDES OF BULK AND SURFACE SCATTERERS

B. P. Sharfarets

Saint-Petersburg

The paper describes some approaches to calculation of acoustic scatterers' scattering amplitudes, which are used in various fields of wave and particle scattering theory. Both bulk and surface scatterers are considered. Specific examples of calculations obtained by various methods are presented.