
**ИССЛЕДОВАНИЯ, ПРИБОРЫ, МОДЕЛИ
И МЕТОДЫ АНАЛИЗА**

УДК 534

© В. Е. Курочкин, Е. Д. Макарова, Б. П. Шарфаренц

**О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ
В МНОГОСЛОЙНОЙ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ КАМЕРЕ**

В статье рассматриваются звуковые колебания в заполненной жидкостью ограниченной трубе, для которой справедливо предположение о плоском движении. Плотность жидкости и скорость звука могут меняться плавно или скачкообразно по длине трубы. Получены общие выражения для расчета амплитуд давления и колебательной скорости первых двух гармоник. На приведенных расчетных примерах показаны некоторые особенности многослойных волноводов по сравнению с однослойным.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, применение ультразвуковых волн конечной амплитуды получило очень большое применение в различных областях науки и техники (см., например, [1]). В частности, широко применяются всевозможные ультразвуковые камеры, в которых принудительно создаются стоячие акустические волны конечной амплитуды. Эти камеры могут представлять собой достаточно сложные акустические волноводы, в которых, как правило, ограничиваются расчетом акустических полей в линейном приближении (см., например, [2–4]). На практике же может возникнуть необходимость расчета волновых характеристик с учетом нелинейных эффектов. Наиболее простыми в этом смысле являются области, в которых акустические поля описываются в рамках плоского движения (зависимость только от одной переменной). В настоящее время известны решения для поля стоячих волн в простейших случаях узких однородных ограниченных труб для собственных и вынужденных колебаний [5–7]. Обычно в таких случаях пользуются уравнениями гидродинамики в лагранжевых координатах. Исходная задача нелинейной акустики решается, как правило, методом последовательных приближений. В этом случае удается решить задачу аналитически.

В настоящей работе рассматривается ограниченная труба, заполненная жидкостью, для которой справедливо предположение о плоском движении, при этом плотность жидкости и скорость звука в ней носят плоскостойкий характер. Априорно очевидно, что в общем случае такая задача должна решаться численно. Поэтому после постановки проблемы и формулирования ее общего решения на примерах приводятся численные решения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задана труба конечной длины L , с одной стороны которой при $a=0$ установлен поршень, осуществляющий вынужденные гармонические колебания частотой ω , а со второй стороны при $a=L$ задано импедансное краевое условие, в частности граница с воздухом. Труба заполнена жидкостью переменной плотности $\rho_0(a)$ и скорости звука $c_0(a)$, относящихся к равновесному состоянию среды. Для акустических колебаний справедливо допущение о плоском движении, т. е. зависимость от одной переменной. Независимая переменная a рассматривается в лагранжевых координатах и привязана к конкретным частицам среды, находящимся в равновесном положении в точках $a \in [0, L]$. Это связано с тем, что при учете нелинейных эффектов границы уже нельзя полагать неподвижными, они колеблются вместе с акустической волной, а это и учитывает система координат Лагранжа, связывающая акустические величины не с точкой в пространстве как в координатах Эйлера, а с конкретной частицей среды, вернее, с точкой пространства, где эта частица находится в равновесном состоянии.

Функции $\rho_0(a)$ и $c_0(a)$ могут либо быть по крайней мере однажды дифференцируемыми, либо иметь разрывы первого рода, в частности быть кусочно-постоянными.

Необходимо рассчитать величины акустического поля с учетом нелинейных эффектов по крайней мере во втором приближении.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ОБЩЕМ ВИДЕ

Наиболее распространенным методом решения задач для акустических волн конечной амплитуды является метод последовательных приближений,

когда некий параметр акустического поля q представляется в виде ряда по степеням некоего малого параметра, которым обычно выступает число Маха $M = \frac{v}{c}$, где v — акустическая колебательная скорость, c — скорость звука (для акустического давления в воде $1 \text{ атм} \approx 1.0132 \times 10^5 \text{ Па}$ число Маха $M = 0.0004$ [8, с. 267]):

$$\begin{aligned} q &= q_0 + \tilde{q}_1 M + \tilde{q}_2 M^2 + \dots + \tilde{q}_n M^n + \dots = \\ &= q_0 + q_1 + q_2 + \dots + q_n + \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

$$q_l = \tilde{q}_l M^l, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

В (1) для удобства сепарирования величин различной степени малости явно выделены степени малого параметра M .

Далее рассмотрим в лагранжевых координатах одномерную систему уравнений гидродинамики для идеальной жидкости [7, с. 414]:

— уравнение движения

$$\rho_0 \xi_{tt} + p_a = 0; \quad (3)$$

— уравнение неразрывности (закон сохранения масс)

$$\xi_a = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho}; \quad (4)$$

— эмпирическое уравнение состояния (уравнение Гэта) для жидкостей [5, с. 7]

$$p = P_* \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] = p(\rho), \quad (5)$$

или, обращая (5),

$$\rho = \rho(p). \quad (6)$$

В (3–6) введены обозначения: a — переменная в лагранжевых координатах; ξ — смещение частицы относительно положения равновесия; ρ — суммарная плотность; p — избыточное давление жидкости; ρ_0 и P_* — равновесные значения последних в отсутствие акустического поля; γ — эмпирические константы (для жидкостей см. таблицу [9, с. 8]).

Если в уравнения (3), (4), (6) подставить величины

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + M \tilde{\rho}_1 + M^2 \tilde{\rho}_2 + M^3 \tilde{\rho}_3 + \dots = \\ &= \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \dots; \end{aligned}$$

$$\xi = M \tilde{\xi}_1 + M^2 \tilde{\xi}_2 + M^3 \tilde{\xi}_3 + \dots = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots,$$

а (6) разложить в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \rho - \rho_0 &= M \tilde{\rho}_1 + M^2 \tilde{\rho}_2 + M^3 \tilde{\rho}_3 + \dots = \\ &= \frac{d\rho}{dp} \Big|_{p=p_0} (M \tilde{p}_1 + M^2 \tilde{p}_2 + M^3 \tilde{p}_3 + \dots) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d^2 \rho}{dp^2} \Big|_{p=p_0} (M \tilde{p}_1 + M^2 \tilde{p}_2 + M^3 \tilde{p}_3 + \dots)^2 + \\ &+ \frac{1}{6} \frac{d^3 \rho}{dp^3} \Big|_{p=p_0} (M \tilde{p}_1 + M^2 \tilde{p}_2 + M^3 \tilde{p}_3 + \dots)^3 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

и рассмотреть величины одинакового порядка малости, а также учесть переменный характер $\rho_0(a)$ и $c_0(a)$, то после несложных, но достаточно громоздких выкладок можно получить рекурсивную систему неоднородных волновых уравнений, например, для акустического давления с правыми частями, в которых фигурируют только комбинации из предыдущих решений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p_l}{\partial a^2} - \frac{1}{\rho_0(a)} \frac{d\rho_0}{da} \frac{\partial p_l}{\partial a} - \frac{1}{c_0^2(a)} \frac{\partial^2 p_l}{\partial t^2} = \\ = L_l(p_1, p_2, \dots, p_{l-1}); \quad l = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Обозначим: $A = \frac{d\rho}{dp} \Big|_{p=p_0} = \frac{1}{c_0^2(a)}$, где $c_0(a)$ — скорость звука в равновесной среде;

$$B(a) = \frac{1}{2} \frac{d^2 \rho}{dp^2} \Big|_{p=p_0}; \quad C(a) = \frac{1}{6} \frac{d^3 \rho}{dp^3} \Big|_{p=p_0}.$$

$L_l(p_1, p_2, \dots, p_{l-1})$ — функции, характеризующие влияние волн низших гармоник как внешних источников возмущения поля. Приведем первые три функции L_l , $l = 1, 2, 3$:

$$L_1 \equiv 0, \quad (9)$$

$$L_2 = \left(B - \frac{A^2}{\rho_0} \right) \frac{\partial^2 (p_1^2)}{\partial t^2}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} L_3 = & -6Cp_1 \dot{p}_1^2 + 4B\dot{p}_1 \dot{p}_2 - 2 \frac{A\dot{p}_1 (A\dot{p}_2 + B(p_1^2)')}{\rho_0} - \\ & - \rho_0 A p_1 (A\ddot{p}_2 + B(p_1^2)'') - 3Cp_1^2 \ddot{p}_1 + \\ & + 2B(p_2 \ddot{p}_1 + p_1 \ddot{p}_2) - \frac{A\ddot{p}_1 (Ap_2 + Bp_1^2)}{\rho_0} - \\ & - \frac{Ap_1 (A\ddot{p}_2 + B(p_1^2)'')}{\rho_0} \end{aligned}$$

$$-\frac{A\ddot{p}_1}{\rho_0^2}(-6A^3 p_1 \dot{p}_1^2 + 2\rho_0 A \dot{p}_1 (A\dot{p}_2 + B(p_1^2)')) - \frac{A\ddot{p}_1}{\rho_0^2}(3A^3 p_1^2 \ddot{p}_1 + \rho_0 (A p_2 + B p_1^2)). \quad (11)$$

Точки над функциями в (11) означают дифференцирование по времени.

Отметим, что выражения для L_1 и L_2 приведены в [7, с. 416]. Кроме того, из (10, 11) видно, что L_i должно содержать частоты вплоть до $l\omega$, где ω — частота колебаний первой гармоники.

Член $\frac{1}{\rho_0(a)} \frac{d\rho_0}{da} \frac{\partial p_i}{\partial a}$ в уравнении (8) появляется в процессе получения волнового уравнения в данном случае для акустического давления. При этом приходится дифференцировать уравнение движения (3) по переменной a .

Рассмотренные выше уравнения (3–5), (8) справедливы для идеальной жидкости без учета диссипативных эффектов вязкости. С учетом вязкости уравнение (8) приобретает сложный вид, и его упрощают простой диссипативной добавкой [6, с. 130]. В дальнейших рассуждениях диссипативный член учитываться явно не будет, однако при получении решений системы неоднородных уравнений (8) будут использоваться установившиеся вынужденные колебания.

Кроме того, отметим, что метод последовательных приближений правомерен в случае, когда акустическое число Рейнольдса Re невелико [10, с. 203]:

$$Re = \frac{v_0 c_0 \rho_0}{b\omega},$$

где v_0 — амплитуда колебательной скорости; b — диссипативный коэффициент.

Поставим граничные условия при $a=0$ и $a=L$. На границе $a=0$ источником вынужденных колебаний служит плоский поршень. Полагая, что поршень на границе осуществляет линейные колебания, получаем, что на поршне присутствует только первая амплитуда колебательной скорости

$$v(0,t) = v_1(0,t),$$

$$v_2(0,t) = v_3(0,t) = v_4(0,t) = \dots = 0.$$

Поскольку в нелинейной акустике неправомерно использование временного фактора $e^{-i\omega t}$, примем временной фактор в виде $\cos \omega t$, либо $\sin \omega t$. Из уравнения (3) имеем

$$\rho_0 \xi_a + p_a = \rho_0 v_t + p_a = 0,$$

откуда получаем

$$\frac{1}{\rho_0(a)} \frac{\partial p}{\partial a} \Big|_{a=0} = - \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{a=0}. \quad (12)$$

Или, принимая скорость движения поршня на границе $a=0$ как

$$v = -v_0 \sin \omega t, \quad (13)$$

получаем систему граничных условий при $a=0$ в следующем виде:

$$\frac{\partial p_1}{\partial a} \Big|_{a=0} = \omega \rho_0(0) v_0 \cos \omega t, \quad (14)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial a} \Big|_{a=0} = \frac{\partial p_3}{\partial a} \Big|_{a=0} = \dots = 0. \quad (15)$$

Краевое условие на конце $a=L$ при отсутствии сторонних сил может быть принято в виде однородного условия Дирихле, либо Неймана, либо смешанного краевого условия (импедансное краевое условие). Поскольку выбор условия не носит принципиального характера, примем, что жидкость граничит с воздухом, а это соответствует тому, что имеет место однородное условие Дирихле

$$p_1|_{a=L} = p_2|_{a=L} = \dots = 0. \quad (16)$$

Поставим задачу математически. Систему (8) будем решать до второго приближения включительно. Для первой гармоники волновое уравнение запишется в виде

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial a^2} - \frac{1}{\rho_0(a)} \frac{d\rho_0}{da} \frac{\partial p_1}{\partial a} - \frac{1}{c_0^2(a)} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0, \quad (17)$$

где фигурируют соответствующие значения невозмущенной скорости звука c_0 и плотности среды ρ_0 . Краевые условия имеют вид:

$$\frac{\partial p_1}{\partial a} \Big|_{a=0} = \omega \rho_0(0) v_0 \cos \omega t, \quad p_1|_{a=L} = 0. \quad (18)$$

Для второй гармоники волновое уравнение с учетом (10) имеет вид

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial a^2} - \frac{1}{\rho_0(a)} \frac{d\rho_0}{da} \frac{\partial p_2}{\partial a} - \frac{1}{c_0^2(a)} \frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} = \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \rho}{dp^2} \Big|_{p=p_0} - \frac{1}{c_0^4(a) \rho_0(a)} \right) \frac{\partial^2 (p_1^2)}{\partial t^2} \quad (19)$$

с нулевыми краевыми условиями

$$\left. \frac{\partial p_2}{\partial a} \right|_{a=0} = 0, \quad p_2|_{a=L} = 0. \quad (20)$$

Правую часть (19) для идеальной жидкости в случае кусочно-постоянной плотности можно привести к виду [7, с. 417]

$$\left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \rho}{dp^2} \Big|_{p=p_0} - \frac{1}{c_0^4 \rho_0(a)} \right) \frac{\partial^2 (p_1^2)}{\partial t^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{c_0^4 \rho_0} (\gamma + 1) \frac{\partial^2 (p_1^2)}{\partial t^2}, \quad (21)$$

где, например, для воды $\gamma = 6.1$ [9, с. 8].

Предполагая наличие потерь в системе, будем рассматривать установившиеся колебания. Решение будем искать в виде

$$p_1(a, t) = P_1(a) \cos \omega t. \quad (22)$$

Для (17), (18) имеем одномерную краевую задачу

$$\frac{d^2 P_1}{da^2} - \frac{1}{\rho_0(a)} \frac{d\rho_0}{da} \frac{dP_1}{da} + k^2(a) P_1 = 0, \quad (23)$$

$$\left. \frac{dP_1}{da} \right|_{a=0} = \omega \rho_0(0) v_0, \quad P_1|_{a=L} = 0. \quad (24)$$

Известно, что задача (23), (24) сводится к следующей [11, с. 21, 22]:

$$\frac{d^2 P_1}{da^2} - \frac{1}{\rho_0(a)} \frac{d\rho_0}{da} \frac{dP_1}{da} + k^2(a) P_1 = \omega \rho_0(0) v_0 \delta(a), \quad (25)$$

$$\left. \frac{dP_1}{da} \right|_{a=0} = 0, \quad P_1|_{a=L} = 0. \quad (26)$$

Решением задачи (25), (26) является функция

$$P_1(a) = \omega \rho_0(0) v_0 G(a, 0, \omega), \quad (27)$$

где $G(a, \xi, \omega)$ — функция Грина задачи (25), (26), когда правая часть в (25) равна $\delta(a - \xi)$. Учитывая, что уравнение (25) можно переписать в самосопряженном виде, применительно к функции Грина получаем уравнение

$$\rho_0(a) \frac{d}{da} \left(\frac{1}{\rho_0(a)} \frac{dG(a, \xi, \omega)}{da} \right) + k^2(a) G(a, \xi, \omega) = \delta(a - \xi). \quad (28)$$

Используя технику, изложенную в работе [12, с. 572], можно показать, что в этом случае имеет место равенство

$$G(a, \xi, \omega) = \frac{1}{w(\omega, \xi)} \begin{cases} \tilde{y}_1(a) \tilde{y}_2(\xi), & a \leq \xi; \\ \tilde{y}_1(\xi) \tilde{y}_2(a), & a > \xi, \end{cases} \quad (29)$$

где \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 — решения задачи (23), удовлетворяющие краевым условиям (26) соответственно при $a = 0$ и $a = L$; $k = \omega / c_0(a)$; $w(\omega, a)$ — вронскиан решений \tilde{y}_1, \tilde{y}_2

$$w(\omega, a) = \tilde{y}_1(a) \frac{d\tilde{y}_2(a)}{da} - \frac{d\tilde{y}_1(a)}{da} \tilde{y}_2(a). \quad (30)$$

После нахождения решения (27) задачи (25), (26) решается задача (19), (20) с правой частью (10); при этом L_2 с учетом (10), (22) и (27) рассчитывается следующим образом:

$$L_2 = (\tilde{L}_2(a)) \cos 2\omega t = \left(2 \left(\frac{1}{c_0^4(a) \rho_0(a)} - B(a) \right) \omega^4 \rho_0^2(0) v_0^2 G^2(a, 0, \omega) \right) \times \cos 2\omega t. \quad (31)$$

Решение ищем в виде

$$p_2(a, t) = P_2(a) \cos 2\omega t, \quad (32)$$

что приводит к краевой задаче

$$\frac{d^2 P_2(a)}{da^2} - \frac{1}{\rho_0(a)} \frac{d\rho_0}{da} \frac{\partial P_2(a)}{\partial a} + (2k(a))^2 P_2(a) = \tilde{L}_2(a); \quad (33)$$

$$\left. \frac{dP_2}{da} \right|_{a=0} = 0; \quad P_2|_{a=L} = 0, \quad (34)$$

где $\tilde{L}_2(a)$ дано в выражении (31) во внешних круглых скобках; $k(a) = \omega / c_0(a)$.

Решение (33), (34) находится из выражения [12]

$$P_2(a) = \int_0^L G(a, \xi, 2\omega) \tilde{L}_2(\xi) d\xi = y_2(a) \int_0^a \frac{y_1(\xi)}{w(2\omega, \xi)} \tilde{L}_2(\xi) d\xi + y_1(a) \int_a^L \frac{y_2(\xi)}{w(2\omega, \xi)} \tilde{L}_2(\xi) d\xi, \quad (35)$$

где

$$G(a, \xi, 2\omega) = \frac{1}{w(2\omega, \xi)} \begin{cases} y_1(a) y_2(\xi), & a \leq \xi, \\ y_1(\xi) y_2(a), & a > \xi; \end{cases} \quad (36)$$

y_1, y_2 — решения однородного уравнения (33) с краевыми условиями (34) соответственно при $a = 0$ и $a = L$; $w(2\omega, \xi)$ — вронскиан решений y_1

и y_2 . Если функция равновесной плотности $\rho_0(a)$ непрерывна на всем интервале $a \in [0, L]$, то вронскиан применительно к уравнениям (23) и (33) может быть вычислен по формуле [13, с. 76]

$$\left. \begin{aligned} w(\omega, a) &= w(\omega, a_0) \\ w(2\omega, a) &= w(2\omega, a_0) \end{aligned} \right\} e^{\int_{a_0}^a \frac{1}{\rho_0(a')} \frac{d\rho_0}{da'} da'}. \quad (36)$$

Здесь a_0 — некоторая точка, в частности можно положить $a_0 = 0$.

Таким образом, выше были найдены амплитуды первых двух гармоник рассматриваемой задачи в виде (22) и (32) с соответствующими амплитудами стоячих волн в виде (27) и (35) в случае плавного изменения равновесных плотности и скорости звука жидкой среды в трубе. Отметим однако, что практически более реалистичной ситуацией является кусочно-постоянный характер изменения этих характеристик среды. Получим решение задачи применительно к этому случаю.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ МНОГОСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Пусть жидкость в трубе состоит из n смежных слоев с кусочно-постоянными значениями равновесных плотности и скорости звука. Пусть далее краевые условия (14–16) на концах трубы остаются неизменными.

Учтем специфику рассматриваемой задачи, заключающуюся в кусочно-постоянном характере изменения значений равновесной плотности и скорости звука внутри каждого i -го слоя модели. Внутри интервалов постоянства равновесных скорости и плотности в соответствующих уравнениях (25) и (33) составляющая дифференциального оператора

$$\frac{1}{\rho_0(a)} \frac{d\rho_0}{da} \frac{d}{da} \equiv 0$$

аннулируется, а остается только соответственно дифференциальный оператор

$$\tilde{F}_i = \frac{d^2}{da^2} + k_i^2, \quad i = \overline{1, n}, \quad (37)$$

либо

$$F_i = \frac{d^2}{da^2} + (2k_i)^2, \quad i = \overline{1, n}, \quad (38)$$

где $k_i = \omega/c_{0i}$; c_{0i} — равновесная скорость звука в i -м слое.

На каждой i -й границе раздела необходимо вы-

полнять условия сшивки на границах, которые заключаются в непрерывности давления и нормальных к границе компонент колебательной скорости, а именно для колебательных скоростей и акустических давлений на границе a_i сред i и $i+1$ ($i = \overline{1, n-1}$) справедливы равенства

$$v|_{a_{i-}} = v|_{a_{i+}}, \quad p|_{a_{i-}} = p|_{a_{i+}}. \quad (39)$$

Здесь \pm говорит о рассмотрении величин слева от границы a_i (знак $-$) и справа от границы a_i (знак $+$). Из линейности (39) и из (1) получаем аналогичные равенства для всех гармоник $l = 1, 2, 3, \dots$

$$v_l|_{a_{i-}} = v_l|_{a_{i+}}, \quad (40)$$

$$p_l|_{a_{i-}} = p_l|_{a_{i+}}. \quad (41)$$

Для гармонического сигнала условие (40) с учетом (3) преобразуется

$$\left. \frac{dp_l}{da} \right|_{a_{i-}} = \left. \frac{dp_l}{da} \right|_{a_{i+}}. \quad (42)$$

Здесь ρ_{0i} — равновесное значение плотности в i -м слое.

Отметим, что условия сшивки (41), (42) совпадают с аналогичными граничными условиями, принятыми в линейной акустике.

Используя выражение (21), перепишем уравнения (25) и (33) краевых задач (25), (26) и (33), (34) на каждом интервале постоянства плотности и скорости звука в виде

$$\frac{d^2}{da^2} \begin{Bmatrix} P_1(a) \\ P_2(a) \end{Bmatrix} + k_i^2 \begin{Bmatrix} P_1(a) \\ P_2(a) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega \rho_{01} v_0 \delta(a) \\ \alpha \frac{k_i^4}{\rho_{0i}} \varepsilon_i G^2(a, 0, \omega) \end{Bmatrix}, \quad (43)$$

$$a \in [a_{i-1}, a_i], \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь

$$\alpha = 2\rho_{01}^2 v_0^2; \quad (44)$$

$$\varepsilon_i = \frac{(\gamma_i + 1)}{2}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (45)$$

Решения \tilde{y}_1 , \tilde{y}_2 и y_1, y_2 , фигурирующие соответственно в функциях Грина (29) и (36), в этом случае необходимо конструировать следующим образом. Решения \tilde{y}_1 , y_1 удовлетворяют в i -м слое соответственно дифференциальному уравнению $\tilde{F}_i(\tilde{y}_1(a)) = 0$ для первой гармоники и $F_i(y_1(a)) = 0$ для второй, а также граничному условию при $a = 0$ (26) и (34) соответственно; на границах ме-

жду слоями решение удовлетворяет условиям сшивки (41), (42). Решения \tilde{y}_2, y_2 строятся аналогично, но удовлетворяют граничному условию при $a = L$ (26) или (34) соответственно.

Найдем выражение для определения вронскиана в случае кусочно-постоянного поведения равновесной плотности. Как видно из (36), вронсиан решений \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 и y_1, y_2 на каждом интервале $a \in [a_{i-1}, a_i]$ есть величина постоянная. Воспользовавшись условием сшивки (41), (42), получаем следующее выражение для скачкообразного изменения вронскиана при пересечении границы a_i :

$$w(a_{i+}) = \frac{\rho_0(a_{i+})}{\rho_0(a_{i-})} w(a_{i-}), \quad (46)$$

откуда легко получить рекуррентное соотношение

$$w(i) = \frac{\rho_0(i)}{\rho_0(1)} w(1). \quad (47)$$

Окончательно амплитуды первой и второй гармоники запишутся в виде

$$P_1(a) = \omega \rho_{01} v_0 G(a, 0, \omega),$$

$$P_2(a) = \alpha \sum_{i=1}^n \frac{k_i^4 \varepsilon_i}{\rho_{0i}} \int_{a_{i-1}}^{a_i} G(a, \xi, 2\omega) G^2(\xi, 0, \omega) d\xi.$$

ОДНОРОДНАЯ ТРУБА

В качестве примера решим задачу в однослойной среде с плотностью $\rho_0 = \text{const}$ и скоростью $c_0 = \text{const}$, $k = \omega / c_0$, для которой имеем

$$G(a, \xi, \omega) = -\frac{1}{k \cos kL} \begin{cases} \cos ka \sin k(L - \xi), & a \leq \xi; \\ \cos k\xi \sin k(L - a), & a > \xi. \end{cases} \quad (48)$$

Решение задачи (25), (26) с учетом постоянства в слое плотности и скорости звука, таким образом, равно

$$P_1(a) = \rho_0 \omega v_0 G(a, 0, \omega) = -\rho_0 c_0 v_0 \frac{\sin k(L - a)}{\cos kL}, \quad (49)$$

а решение всей задачи (17), (18) равно

$$p_1(a, t) = -\rho_0 c_0 v_0 \frac{\sin k(L - a)}{\cos kL} \cos \omega t. \quad (50)$$

После нахождения p_1 можно решать уравнение (19), правая часть которого равна

$$L_2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{c_0^4 \rho_0} (\gamma + 1) \frac{\partial^2 (p_1^2)}{\partial t^2} = k^2 \alpha_0 \frac{\sin^2 k(L - a)}{\cos^2 kL} \cos 2\omega t; \quad (51)$$

здесь α_0 равно

$$\alpha_0 = 2\varepsilon_0 \rho_0 v_0^2 = 2 \frac{(\gamma + 1)}{2} \rho_0 v_0^2, \quad (52)$$

а $\gamma = \text{const}$ внутри слоя.

Как видно из (51), вынуждающее воздействие при нахождении p_2 имеет уже двойную частоту, а резонансные частоты становятся вдвое чаще (фактор $\cos^2 kL$):

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial a^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} = k^2 \alpha_0 \frac{\sin^2 k(L - a)}{\cos^2 kL} \cos 2\omega t. \quad (53)$$

Полагая

$$p_2(a, t) = P_2(a) \cos 2\omega t, \quad (54)$$

приходим к задаче

$$\frac{d^2 P_2}{da^2} + (2k)^2 P_2 = k^2 \alpha_0 \frac{\sin^2 k(L - a)}{\cos^2 kL}. \quad (55)$$

Решение (55) имеет вид

$$P_2(a) = \frac{k^2 \alpha_0}{\cos^2 kL} \int_0^L G(a, \xi, 2\omega) \sin^2 k(L - \xi) d\xi = \frac{k^2 \alpha_0}{w(2\omega) \cos^2 kL} \left(\begin{aligned} & y_2(a) \int_0^a y_1(\xi) \sin^2 k(L - \xi) d\xi + \\ & + y_1(a) \int_a^L y_2(\xi) \sin^2 k(L - \xi) d\xi \end{aligned} \right). \quad (56)$$

В (56) введены обозначения:

$$w(2\omega) = -2k \cos 2kL, \quad y_1 = \cos 2ka, \quad y_2 = \sin 2k(L - a). \quad (57)$$

Вычисляя (56), получаем

$$P_2(a) = -\frac{\alpha_0}{32 \cos^2 kL \cos 2kL} \times \left(\begin{aligned} & 3 \cos 2ka + \cos 2k(a - 2L) - \\ & -4 \cos 2kL + 2ka(\sin 2ka + \sin 2k(a - 2L)) \end{aligned} \right). \quad (58)$$

Окончательно получаем выражение для $p_2(a, t)$:

$$p_2(a, t) = P_2(a) \cos 2\omega t. \quad (59)$$

Таким образом, во втором приближении поле в однослойной трубе определяется выражением

$$p(a,t) = p_1(a,t) + p_2(a,t) = P_1(a)\cos\omega t + P_2(a)\cos 2\omega t, \quad (60)$$

где $P_1(a)$ и $P_2(a)$ описываются выражениями (49) и (58) соответственно.

Отношение амплитуд примерно равно

$$\left| \frac{p_2(a,t)}{p_1(a,t)} \right| \approx \frac{v_0}{c_0} \frac{2\varepsilon_0}{\cos 2kL \cos kL} = M \frac{2\varepsilon_0}{\cos 2kL \cos kL}$$

и вне резонанса имеет порядок числа Маха M (что соответствует исходным предположениям о соотношении гармоник). Однако либо в окрестностях резонансов первой гармоники, либо второй амплитуда второй гармоники может существенно вырасти и стать соизмеримой с первой. В этом случае, впрочем, предложенный анализ неправилен, т. к. для его справедливости необходимо соблюдение условия $p_1 \gg p_2$. Кроме того, из последнего отношения видно, что коэффициент ε_0 по праву носит название коэффициента нелинейности; при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ вторая гармоника исчезает.

Отметим, что в работах [5, 6] приведено решение задачи для однородной трубы с точно такими же краевыми условиями, но только в терминах смещений частиц ξ в лагранжевой системе координат. После перехода от смещений к давлениям в лагранжевой системе координат по формулам [15, с. 28]

$$p_1(a,t) = -\rho_0 c_0^2 \frac{\partial \xi_1(a,t)}{\partial a},$$

$$p_2(a,t) = -\rho_0 c_0^2 \frac{\partial \xi_2(a,t)}{\partial a} + \varepsilon \rho_0 c_0^2 \left(\frac{\partial \xi_1(a,t)}{\partial a} \right)^2,$$

где $\varepsilon = \frac{\gamma + 1}{2}$, приходим к выражениям (50) и (58),

(59) для первой и второй гармоник давления. Совпадают также выражения для первых двух гармоник колебательной скорости, полученные в [5, 6] дифференцированием соответствующих гармоник смещения по времени, а в настоящей работе — согласно (3), по формулам

$$\frac{\partial v_{1,2}(a,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_{1,2}(a,t)}{\partial a}.$$

ПРИМЕРЫ

Пример 1. Расчет первых двух гармоник в однородной трубе

Здесь представлены графики амплитуд первой и второй гармоник давления и колебательной скорости. Исходные данные: $f = 3$ МГц, $L = 3 \cdot 10^{-4}$ м, $v_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ м/с, $\gamma = 6.1$.

На рис. 1, 2 представлены амплитуды стоячих волн давлений первой и второй гармоник; на рис. 3, 4 — амплитуды стоячих волн колебательных скоростей первой и второй гармоник.

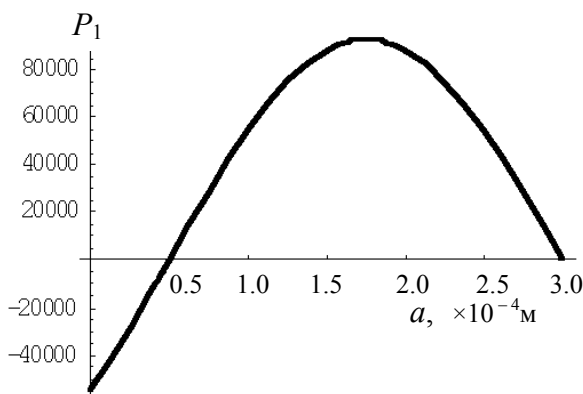


Рис. 1. График зависимости амплитуды 1-й гармоники давления $P_1(a)$

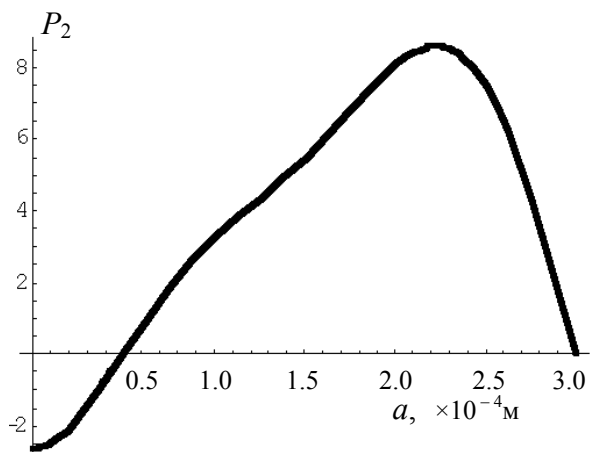


Рис. 2. График зависимости амплитуды 2-й гармоники давления $P_2(a)$

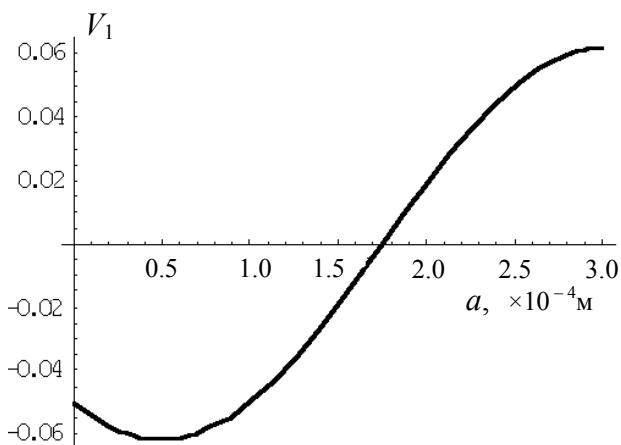


Рис. 3. График зависимости амплитуды 1-й гармоники колебательной скорости $V_1(a)$

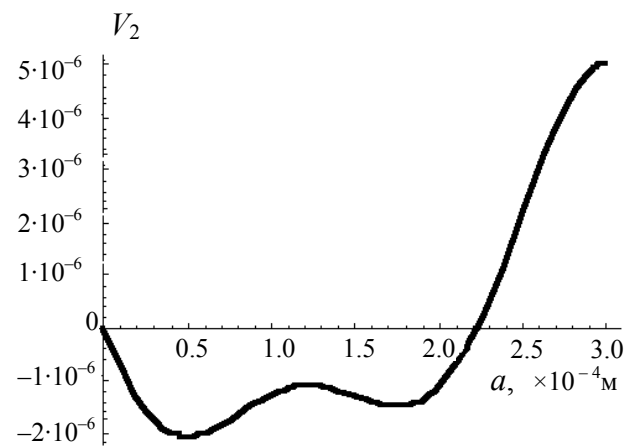


Рис. 4. График зависимости амплитуды 2-й гармоники колебательной скорости $V_2(a)$

Из графиков видно, что вторые гармоники могут представлять собой стоячие волны неправильной формы.

Отдельно остановимся на поведении вронскианов первой и второй гармоник. Из рис. 5 видно, что вронскианы имеют характер линейно нарастающих с частотой гармоник с интервалами между нулями соответственно $\Delta f_1 = \frac{1}{2} \frac{c_0}{L}$ и $\Delta f_2 = \frac{1}{4} \frac{c_0}{L}$, а первые нули находятся соответственно в точках $f_{11} = \frac{c_0}{4L}$ и $f_{12} = \frac{c_0}{8L}$, никогда не совпадая. При выборе параметров трубы необходимо учитывать наличие этих точек резонансов. Реально волновому числу можно приписать мнимую составляющую, зависящую от частоты. В частности, для воды коэффициент затухания при частотах 7–1900 МГц равен $\alpha = 25 \cdot 10^{-15} \cdot f^2 \text{ м}^{-1}$ [10]. Это означает, что волновое число получает положительную добавку $k_i = i\alpha$, которая устраняет бесконечное возрастание амплитуд стоячей волны на резонансах. Например, на частоте $f = 10 \text{ МГц}$ получаем $\alpha = 2.5 \text{ м}^{-1}$. Если принять, что на частотах в окрестности 3 МГц справедлива близкая зависимость коэффициента затухания от частоты, то приблизительно получаем $\alpha \approx 0.25 \text{ м}^{-1}$.

Отметим, что предпочтение необходимо отдавать частотам, для которых значение вронскиана находится в окрестностях экстремумов функции зависимости вронскиана от частоты, что обеспечивает более устойчивое поведение амплитуд гармоник при возмущениях частоты или геометрии камеры. Например, при изменении аргумента в окрестностях $\pm 36^\circ$ (40 % всего диапазона)

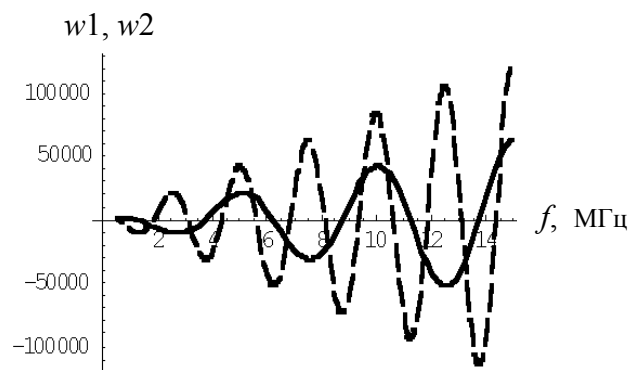


Рис. 5. Графики зависимости вронскианов 1-й гармоники w_1 (сплошная линия) и 2-й — w_2 (пунктир)

относительно экстремума значение \cos меняется всего на 19 %.

Пример 2. Расчет первых двух гармоник в дискретно-слоистой трубе

Рассматривается четырехслойная труба. Характеристики слоев представлены в таблице.

В многослойном волноводе дела обстоят не столь тривиально, как в однослойном, однако особенности формирования поля по-прежнему качественно определяются поведением вронскиана решений первой гармоники. Но в этом случае необходимо детальнее остановиться на физической стороне процесса.

Поскольку при построении первой гармоники давления используется решение $\tilde{y}_2(a)$, удовлетворяющее только краевому условию при $a = L$ (см. (27), (29)), то при анализе можно рассмотреть

Характеристики слоев в примере 2

№ слоя	Скорость звука, м/с	Плотность, кг/м ³	Толщина слоя, м	γ
1	1500	1000	$4 \cdot 10^{-2}$	6.1
2	5570	2600	$1 \cdot 10^{-4}$	6.1
3	1500	1000	$3 \cdot 10^{-4}$	6.1
4	5570	2600	$1 \cdot 10^{-4}$	6.1

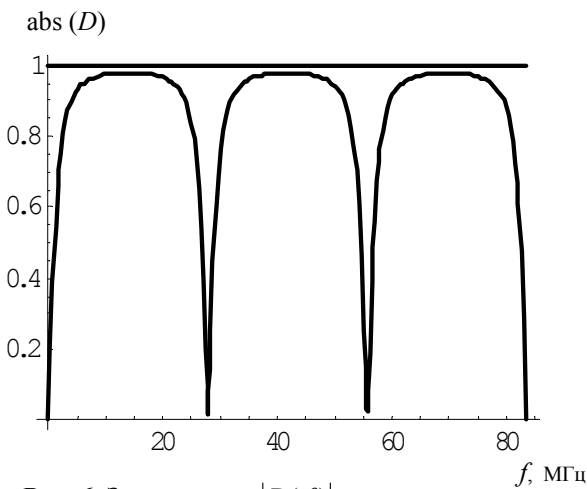


Рис. 6. Зависимость $|D(f)|$

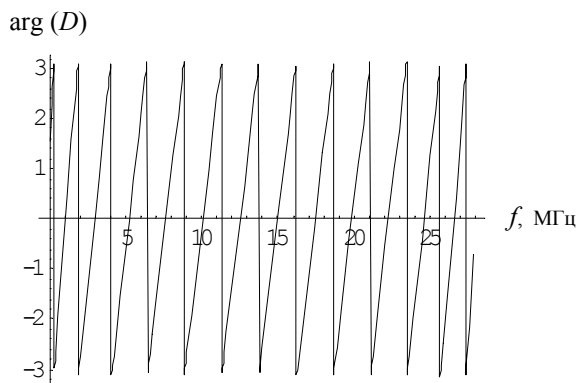


Рис. 7. Зависимость $\arg(D(f))$

слоистое полупространство $a \in (-\infty, L]$, где первый слой заменен однородным полупространством с идентичными первому слою акустическими характеристиками. Тогда поле $\tilde{y}_2(a)$ можно рас-

сматривать как суммарное поле, образованное падающей из $a = -\infty$ плоской волной и волной, отразившейся от границы $a = L$, т. к. это поле является решением соответствующего дифференциального уравнения и удовлетворяет условию на границе $a = L$. При этом существенным является наличие бесконечного числа переотражений плоской волны внутри кусочно-неоднородных слоев 2–4. По аналогии с волноводным случаем, когда нормальные волны рассчитываются путем решения дисперсионного уравнения [16, с. 221, 223], рассмотрим поведение произведения

$$D(f) = \tilde{V}_{32}(f) \tilde{V}_{34}(f) \exp(2ik_3(f)d_3), \quad (61)$$

характеризующего степень резонансности слоев 2–4. Здесь $\tilde{V}_{32}(f)$ — коэффициент отражения плоской волны при ее падении из слоя 3 на слой 2 и далее на полупространство $a \in (-\infty, d_1]$; $\tilde{V}_{34}(f)$ — коэффициент отражения плоской волны при ее падении из слоя 3 на слой 4; $k_3(f) = \frac{2\pi f}{c_3}$ — волновое число в слое 3; d_i — толщина i -го слоя. Соответствующие коэффициенты отражения легко могут быть рассчитаны по методике, изложенной в [16, с. 15–17], и окончательно (61) принимает вид

$$D(f) = \frac{\frac{z_2 - z_3}{z_2 + z_3} + \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \exp(2ik_2(f)d_2)}{1 + \frac{z_2 - z_3}{z_2 + z_3} \cdot \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \exp(2ik_2(f)d_2)} \times \frac{\frac{z_4 - z_3}{z_4 + z_3} - \exp(2ik_4(f)d_4)}{1 - \frac{z_4 - z_3}{z_4 + z_3} \exp(2ik_4(f)d_4)} \cdot \exp(2ik_3(f)d_3). \quad (62)$$

Здесь $z_i = \rho_i c_i$ — импеданс в i -м слое. На рис. 6, 7 представлены модуль и аргумент функции $D(f)$. Модуль функции $D(f)$ носит периодический характер; период равен $F = 27.85$ МГц, что совпадает с первой частотой "полуволновости" слоя 2. На всех частотах, кратных F , модуль функции $D(f)$ равен нулю, включая и частоту $f = 0$. На этих частотах слой 2 прозрачен, и в силу идентичности характеристик слоев 1 и 2 коэффициент отражения $\tilde{V}_{32}(f)$ равен нулю. Максимум модуля функции $D(f)$ не достигает единицы и равен 0.979, поэтому собственных частот внутри слоев 2–4 не возникает. Поведение аргумента функции $D(f)$ представлено на рис. 7; он вследствие его скачкообразного изменения в точках nF , $n = 0, 1, 2, \dots$ (см. рис. 9) ведет себя аperiodично. Средний интервал

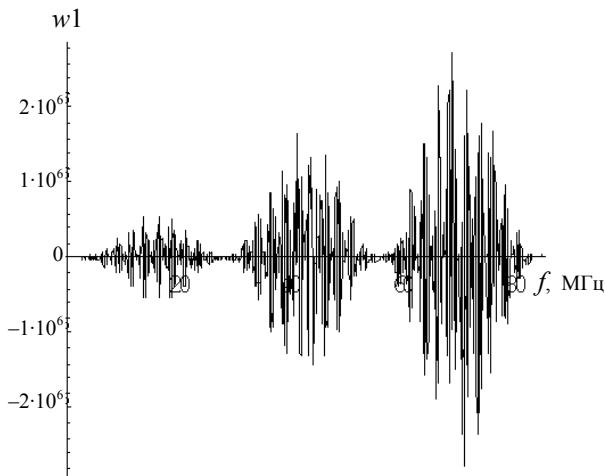


Рис. 8. Зависимость вронскиана $w1$

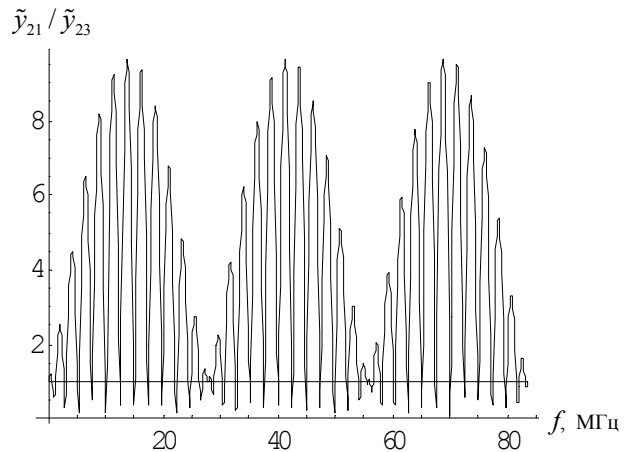


Рис. 10. Отношение $\tilde{y}_{21}(a) / \tilde{y}_{23}(a)$

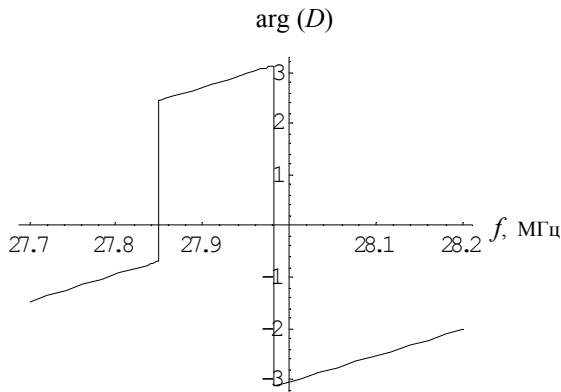


Рис. 9. Зависимость $\arg(D(f))$

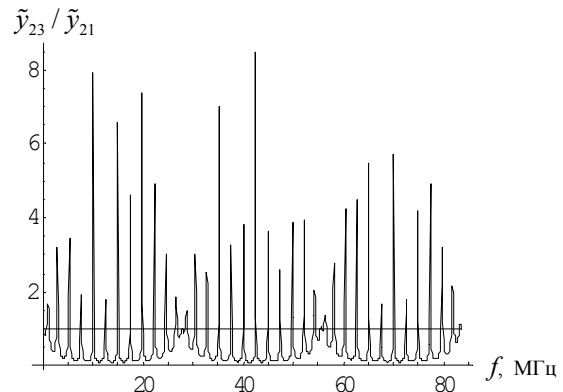


Рис. 11. Отношение $\tilde{y}_{23}(a) / \tilde{y}_{21}(a)$

набега фазы на 2π составляет примерно 2.4 МГц. На интервале F фаза функции $D(f)$ 12 раз оказывается кратной 2π .

На рис. 8 представлено поведение вронскиана $w1$ решений $\tilde{y}_1(a)$, $\tilde{y}_2(a)$. Сравнивая рис. 6 и 8, заключаем, что период биений в поведении вронскиана в точности совпадает с периодом F . Рассмотрим причину такого совпадения.

Следует ожидать, что на частотах, при которых фаза функции $D(f)$ кратна 2π , амплитуда функции $\tilde{y}_2(a)$ внутри слоев 2–4 должна резонировать и тем больше, чем больше модуль функции $D(f)$. На рис. 10 представлена зависимость отношения амплитуды $\tilde{y}_2(a)$ внутри слоя 1 ($\tilde{y}_{21}(a)$) к амплитуде $\tilde{y}_2(a)$ внутри слоя 3 ($\tilde{y}_{23}(a)$). На рис. 11 представлено обратное отношение. Как видно, периодичность вновь составляет F . Горизонтальная

прямая на рис. 10, 11 проходит на уровне 1. Таким образом, амплитуда внутри слоя 3 за счет резонансных явлений может практически на порядок превышать амплитуду внутри слоя 1. На рис. 12, 13 представлены те же зависимости в более крупном масштабе, а именно на интервале, где фаза функции $D(f)$ меняется дважды от $-\pi$ до π . На рис. 14 представлено поведение вронскиана в этом же диапазоне. Видно, что поведение огибающей вронскиана совпадает с поведением кривой на рис. 12 с поправкой на то, что амплитуда вронскиана пропорциональна волновому числу.

Наконец, на рис. 15 представлено поведение вронскиана в окрестностях $f = 2.94534$ МГц, где фаза функции $D(f)$ равна нулю и тем самым где резонирует амплитуда в слое 3.

Как видно, поведение вронскиана имеет характер промодулированной низкой и высокой частотой

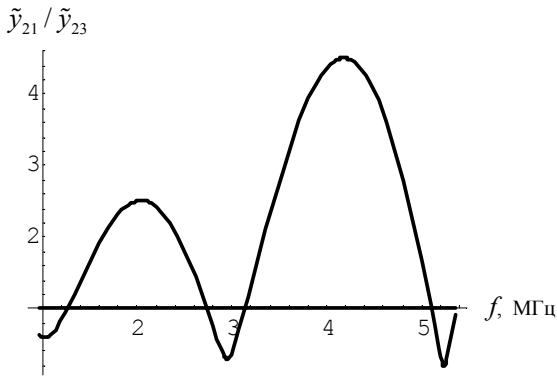


Рис. 12. Фрагмент графика (рис. 10) $\tilde{y}_{21}(a) / \tilde{y}_{23}(a)$

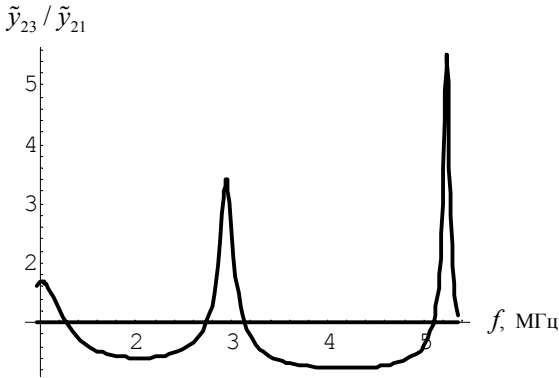


Рис. 13. Фрагмент графика (рис. 11) $\tilde{y}_{23}(a) / \tilde{y}_{21}(a)$

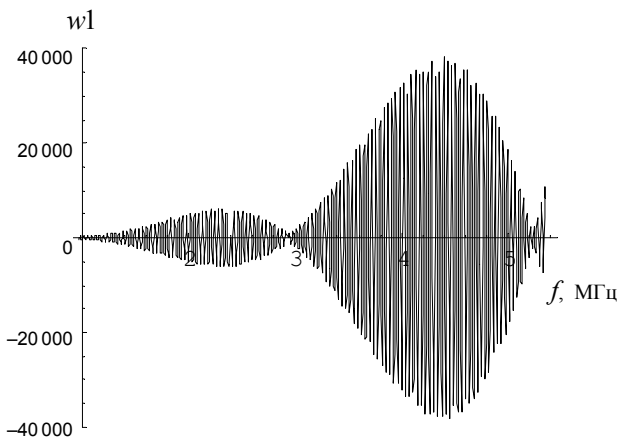


Рис. 14. Зависимость вронскиана $w1$

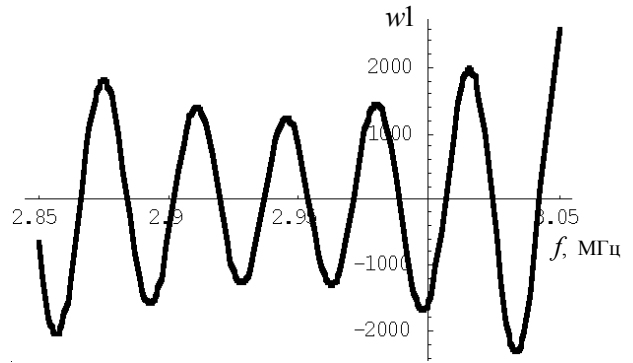


Рис. 15. Фрагмент графика (рис. 14) вронскиана $w1$

гармоники с линейным трендом, пропорциональным частоте. Низкая частота связана с периодичностью изменения модуля, а высокая — с периодичностью изменения фазы функции $D(f)$. Такие же зависимости отношений амплитуд первой гармоники, пропорциональных решению $\tilde{y}_2(a)$, в первом и третьем слоях.

Для выбора рабочей частоты озвучивания трубы необходимо руководствоваться необходимым числом узлов, например, амплитуды давления первой гармоники в нужном слое (например, в слое 3), а также тем, должен ли рабочий слой резонировать или, наоборот, антирезонировать. Кроме того, остаются справедливыми рекомендации по выбору частоты с точки зрения поведения вронскиана, описанные выше.

Число узлов m в l -м слое толщиной L_l легко может быть рассчитано по следующей простой формуле:

$$m = \beta(n) = n \vee (n + 1) \tag{63}$$

при условии

$$n \leq \frac{L_l}{\lambda_l / 2} < n + 1. \tag{64}$$

Здесь λ_l — длина волны в l -м слое; значок \vee означает логическое ИЛИ. Принимая $L_l = 3 \times 10^{-4}$ м, получаем, что $m = \beta(1) = 1 \vee 2$ при условии $f \in [2.5, 5)$ МГц.

Ниже рассчитаны параметры акустического поля для первых двух гармоник для частот 3.00000, 2.94534 и 4.39783 МГц, подобранных из следующих соображений. Число узлов не более 2, значение вронскиана близко к максимуму, и частоты находятся либо в окрестностях резонанса (3.00000 МГц), либо антирезонанса в слоях 2–4 (2.94534 и 4.39783 МГц).

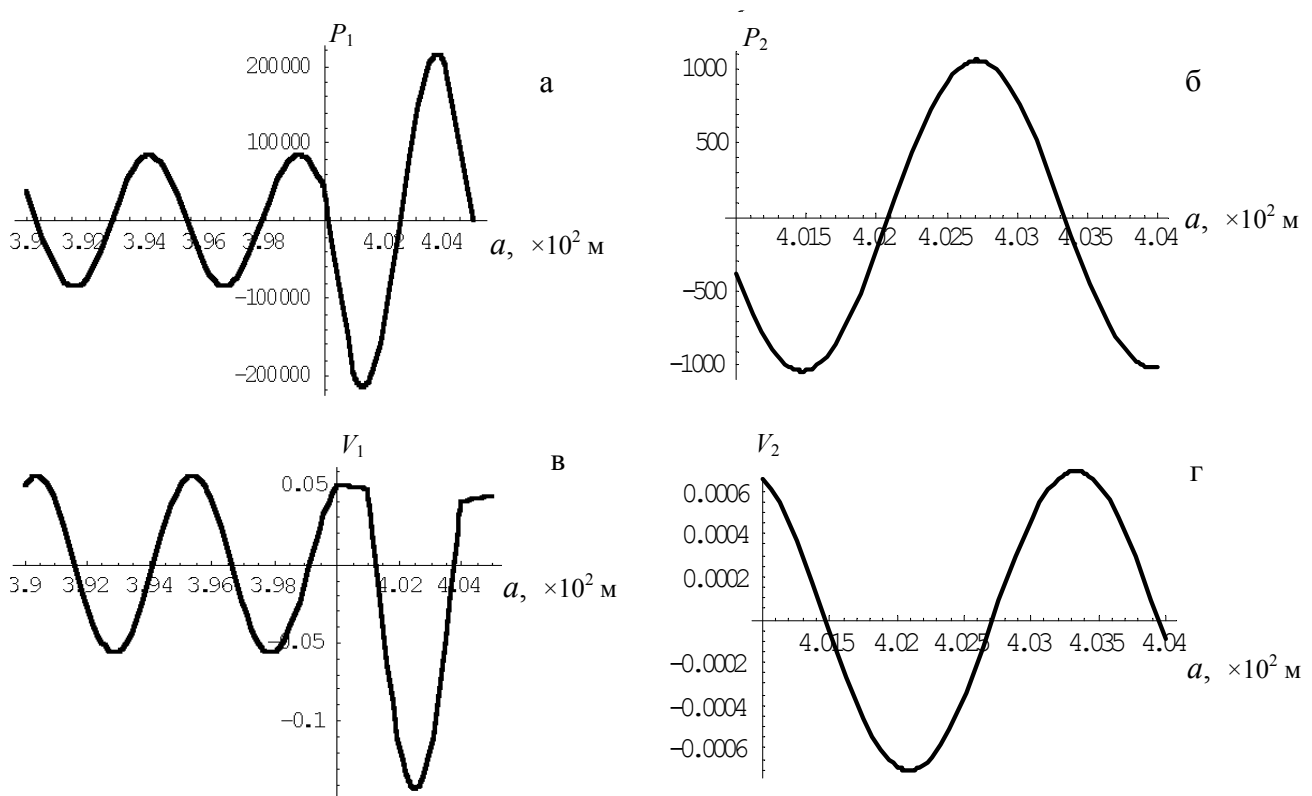


Рис. 16. Амплитуды давления и колебательной скорости первых двух гармоник; $f = 3 \times 10^6$ Гц

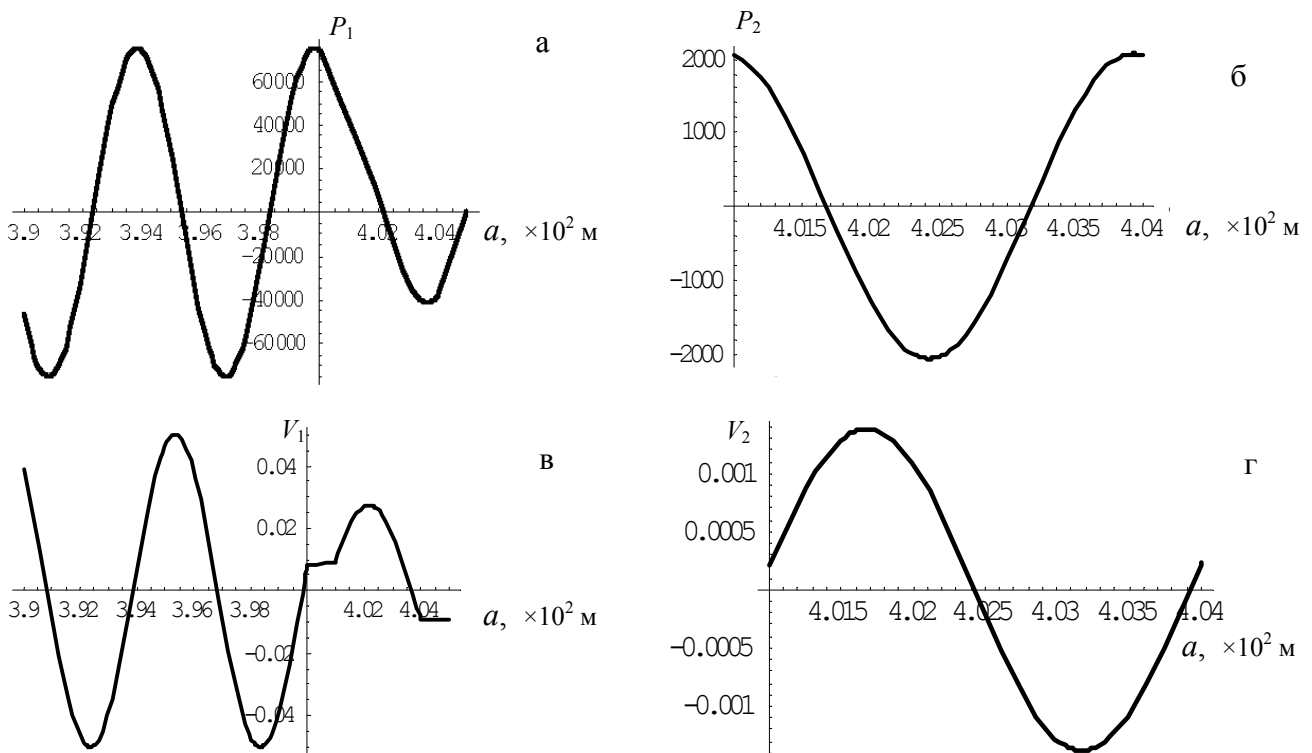


Рис. 17. Амплитуды давления и колебательной скорости первых двух гармоник; $f = 2.5041 \times 10^6$ Гц

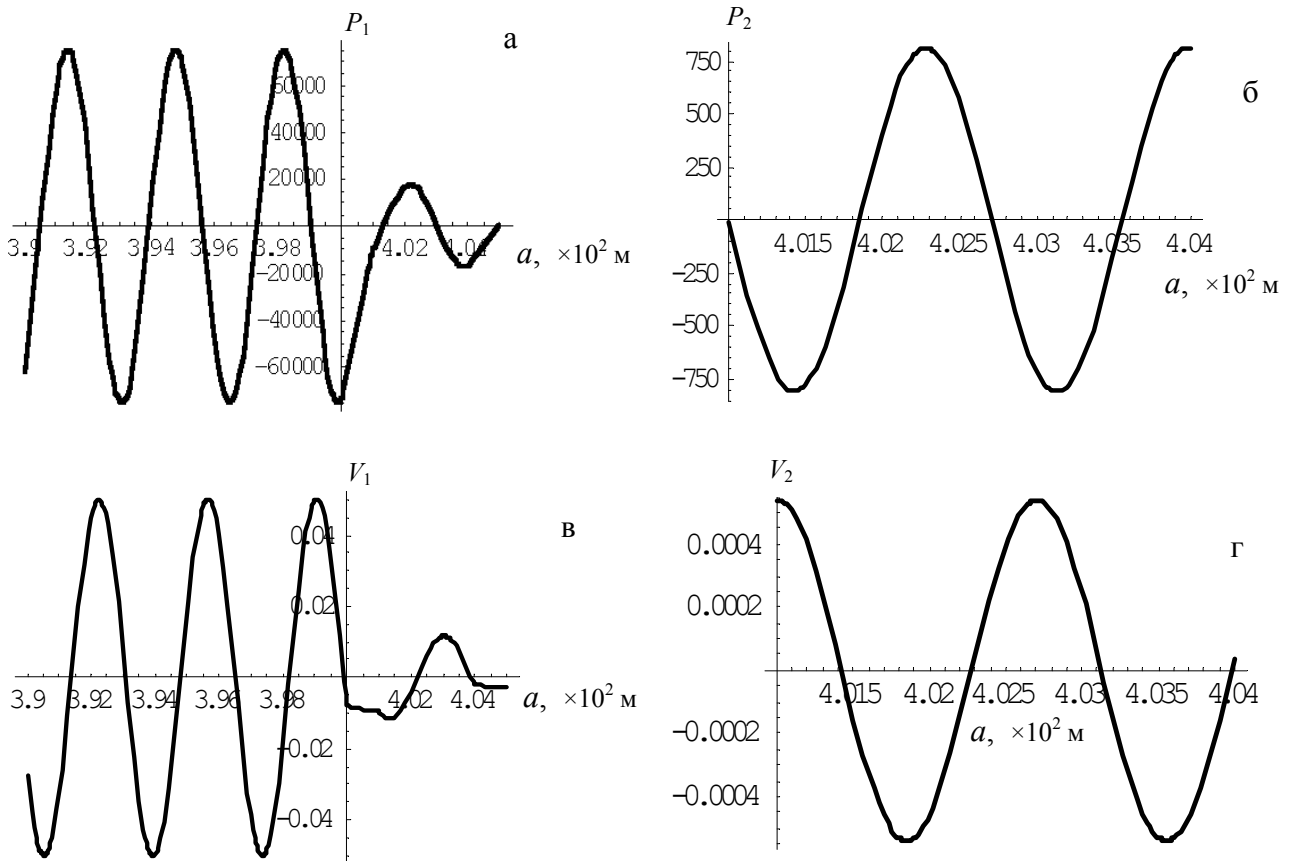


Рис. 18. Амплитуды давления и колебательной скорости первых двух гармоник; $f = 4.39783 \times 10^6$ Гц

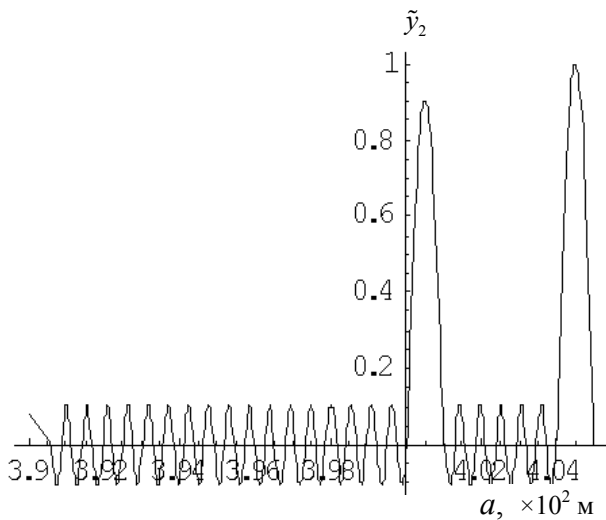


Рис. 19. Поведение функции $\tilde{y}_2(a)$ на частоте просветления $f = 27.85$ МГц

На рис. 16–18 представлены результаты расчетов амплитуд давления и колебательной скорости в стоячей волне первых двух гармоник в много-

слойной трубе при частотах вынуждающих колебаний $f = 3$ МГц (рис. 16), $f = 2.5041$ МГц (рис. 17) и $f = 4.39783$ МГц (рис. 18). Амплитуда скорости поршня $v_0 = 0.5$ м/с. Поле первой гармоники (давление (а) и скорость (в)) рассчитывалось во всех слоях, а поле второй гармоники (давление (б) и скорость (г)) рассчитывалось только в третьем слое (рабочей зоне). Различие в амплитудах составляет более 2 порядков во всех примерах. Во всех случаях первые гармоники имеют 1 или 2 узла; вторые гармоники имеют до 4 узлов.

Кроме того, как видно из сравнения рис. 16–18, в случае наличия резонансных явлений в рамках слоя, состоящего из 2-го–4-го слоев, амплитуды давления и скорости в нем резко возрастают по сравнению с амплитудами в первом слое (рис. 16). И наоборот, в отсутствие резонанса внутри совокупного слоя 2–4 амплитуды в нем много меньше, чем в слое 1.

В заключение приведем поведение функции $\tilde{y}_2(a)$ в случае просветления слоя 2, т. е. на частоте $f = 27.85$ МГц (см. рис. 19).

Как видно, амплитуды в слоях 1 и 2 совпадают, а в слоях 2 и 4 резко возрастают, что необходимо

учитывать при проектировании рабочих ультразвуковых камер.

ВЫВОДЫ

В статье получены общие выражения для поля конечной амплитуды в трубе с переменной плотностью и скоростью для первых двух гармоник давления и скорости, и в частности в однослойной и многослойной трубах. По полученным выражениям произведены расчеты. Выявлены некоторые явления, происходящие в озвучиваемой многослойной трубе. Результаты могут быть полезны в теории и практике использования ультразвука конечной амплитуды.

Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ, грант № 05-03-33108.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранат Б.А., Дубровин М.Н., Хавский Н.Н. и др.* Основы физики и техники ультразвука. М.: Высш. шк., 1987. 352 с.
2. *Hill M.* The selection of layer thicknesses to control acoustic radiation force in layered resonators // *J. Acoust Soc. Am.* 2003. V. 114, N 5. P. 2654–2661.
3. *Hill M., Harris N.R., Townsend R.J., et al.* A microfabricated ultrasonic manipulator with frequency selectable nodal planes // *WCU.* 2003. Paris, September 7–10. P. 1647–1650.
4. *Gröschl M.* Ultrasonic separation of suspended particles. Part I: Fundamentals // *Acustica.* 1998. V. 84. P. 432–447.
5. *Зарембо Л.К.* К вопросу о вынужденных колебаниях конечной амплитуды в трубе // *Акуст. журн.* 1967. Т. 13, № 2. С. 298.
6. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука. 1975. 288 с.
7. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука. 1973. 496 с.
8. *Бейер Р.* Нелинейная акустика // Сб. "Физическая акустика" / Под ред. У. Мэсона. Т. 2, ч. Б. М.: Мир, 1969. С. 266–301.
9. *Зарембо Л.К., Тимошенко В.И.* Нелинейная акустика. М.: МГУ, 1984. 104 с.
10. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухорухов А.П.* Теория волн. М.: Наука. 1979. 384 с.
11. *Бутковский А.Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1979. 224 с.
12. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. Школа, 1970. 712 с.
13. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука. 656 с.
14. *Физические величины. Справочник* / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоиздат, 1991. 1232 с.
15. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.
16. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.

Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург

Материал поступил в редакцию 6.10.2006.

ON THE FORCED FINITE-AMPLITUDE VIBRATION IN A MULTILAYER ULTRASONIC CHAMBER

V. E. Kurochkin, E. D. Makarova, B. P. Sharfarets

Institute for Analytical Instrumentation RAS, Saint-Petersburg

The paper is devoted to the problem of acoustic vibration in a liquid-filled bounded pipe for which the assumption of plane motion holds. The liquid density and sound velocity may vary along the pipe smoothly or stepwise. General expressions for calculation of pressure amplitudes and vibrational velocity of the first two harmonics are obtained. The calculation examples given in the paper demonstrate some specific features of multilayer waveguides as compared to a single-layer one.