

УДК 621.391;519.21;519.245

© А. В. Меркушева, Г. Ф. Малыгина

## МЕТОДЫ И СХЕМЫ АНАЛИЗА СПЕКТРОВ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОЙ МОДИФИКАЦИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Модификация преобразования Фурье (ПФ) — вращаемое ПФ имеет собственные (отличные от ПФ) свойства, правила умножения и свертки сигналов, оказывается полезной при обработке нестационарных сигналов в информационно-измерительных системах. Вращаемое ПФ (ВПФ) при некоторых условиях может быть более эффективным, чем ПФ, в задачах мультиплексирования и фильтрации. Для спектрального анализа методом ВПФ проводится разработка схем, ориентированных на обработку различных типов сигналов. Это — ряды ВПФ и ВПФ дискретного времени. Обе схемы являются обобщениями соответствующих традиционных форм спектральной обработки сигналов методами ПФ.

### ВВЕДЕНИЕ

Для анализа спектров методом преобразования Фурье (ПФ) различных типов сигналов может использоваться несколько схем: обычное ПФ (непрерывного сигнала), ряды Фурье, преобразование Фурье дискретного времени, дискретное ПФ [1, 2]. Вместе с тем анализ Фурье корректно обеспечивает получение частотных компонент сигнала только на квазистационарных интервалах, а в практических приложениях достаточно часто встречаются информационно-измерительные системы (ИИС), в которых сигналы нестационарны. В связи с этим для обработки таких сигналов используются методы время-частотных и время-масштабных (вейвлет-) преобразований [3–6]. Для этой же цели может применяться анализ на основе модифицированной формы преобразования Фурье — вращаемого ПФ, который позволяет выявить смешанные временные и частотные компоненты сигнала.

Вращаемое преобразование Фурье (ВПФ) имеет собственные (отличные от ПФ) свойства, в том числе аддитивность углового параметра ВПФ, связь ВПФ с время-частотными преобразованиями, с преобразованием Радона и с традиционным ПФ. Для операции ВПФ сигналов, умножения двух сигналов в области ВПФ (или свертки сигнала с импульсной передаточной функцией) также свойственны особые правила [7–10].

Для обработки сигналов различных типов на основе обобщенной модификации Фурье метод ВПФ располагает двумя схемами анализа. Это собственно ВПФ [7] и дискретное вращаемое преобразование Фурье (Д\_ВПФ) [10, 11]. Такие схемы анализа используются для непрерывных и дискретных сигналов, и результат преобразований соответственно непрерывный и дискретный. Если следовать пути и логике развития схем традици-

онного ПФ, то представляется целесообразным введение еще двух новых схем анализа сигналов методом ВПФ — рядов вращаемого преобразования Фурье (Р\_ВПФ) и вращаемого преобразования Фурье дискретного времени (ВПФ\_ДВ).<sup>1)</sup>

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛА ВРАЩАЕМЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ФУРЬЕ

Ядро преобразования по методу непрерывного ВПФ определяется выражением:

$$K_{\alpha}(t, u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-j \operatorname{ctg} \alpha}{2\pi}} e^{j[(t^2+u^2)/2] \operatorname{ctg} \alpha - ju \operatorname{cosec} \alpha}, & \text{если } \alpha \text{ не кратно } \pi; \\ \delta(t-u), & \text{если } \alpha \text{ кратно } \pi; \\ \delta(t+u), & \text{если } \alpha + \pi \text{ кратно } 2\pi, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\alpha$  — угол вращения (параметр ВПФ).

Прямое  $S_{\alpha}(u)$  и обратное ВПФ сигнала  $s(t)$  выражаются с помощью ядра  $K_{\alpha}(t, u)$  соотношениями (2) и (3):

$$S_{\alpha}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) K_{\alpha}(t, u) dt, \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Следует отметить, что метод Д\_ВПФ, разработанный Сантанамом и Мак-Клелланом (Santhanam, McClellan) [10], не обеспечивает полного соответствия со схемой непрерывного ВПФ [7], поэтому при рассмотрении новых схем анализа сигналов в рамках концепции обобщенной формы преобразования Фурье (рядов ВПФ и ВПФ дискретного времени) в качестве основы далее будет использоваться метод ВПФ, усовершенствованный Пэйем и Йехом (Peu, Yeh) [11].

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\alpha}(u) K_{-\alpha}(t, u) du. \quad (3)$$

Свойства непрерывного ВПФ приведены в работах [9, 12]. При построении новых схем анализа сигнала методами рядов ВПФ и ВПФ дискретного времени за основную область параметра  $\alpha$ , определяющего вращение время-частотной плоскости, принят интервал  $\alpha \in (0, \pi/2)$ .

**РЯДЫ ВРАЩАЕМОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ**

Частотный спектр периодического сигнала состоит из последовательности импульсов, поэтому такой сигнал представляется в форме ряда Фурье (РФ) (4), коэффициенты разложения которого определяются выражением (5):

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnt\omega_0}, \quad (4)$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_T s(t) e^{-jnt\omega_0} dt, \quad (5)$$

где  $s(t)$  — периодический сигнал с периодом  $T$ ;  $\omega_0 = (2\pi/T)$ ;  $\{C_n\}_{n=-\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty}$  — коэффициенты разложения сигнала в РФ.

Разложение в РФ может использоваться для двух классов непрерывных сигналов:

- так может представляться аperiodический сигнал  $s(t)$ , определенный на некотором интервале  $[0, T]$ ; в этом случае РФ сходится к периодическому расширению  $s(t)$  на область как внутри, так и вне  $[0, T]$ , т. е. сходится к  $s(t+n)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;
- кроме того, РФ может использоваться для представления периодического сигнала (с любым периодом).

Для построения схемы рядов вращаемого преобразования Фурье (Р\_ВПФ) удобно сначала получить ортогональный базис. Для этого используется аналогия с традиционным ПФ. В случае обычного ПФ базисная функция — синусоида, в результате ПФ дает  $\delta$ -образный импульс. При использовании аналогичной взаимосвязи базисные функции ВПФ могут быть найдены так.

- Для импульсной функции  $\delta(t-nt_0)$ , принадлежащей области ВПФ с параметром  $\alpha$ , ее прообраз во временной области выражается с помощью обратного вращения время-частотной плоскости, т. е. путем применения ВПФ с угловым параметром  $-\alpha$ :

$$\begin{aligned} \text{ВПФ}_{-\alpha} [\delta(t-nt_0)] &= \\ &= \sqrt{\frac{1+j \operatorname{ctg} \alpha}{2\pi}} e^{-j[(t^2+(nt_0)^2)/2] \operatorname{ctg} \alpha + j(nt_0)t \operatorname{cosec} \alpha}. \end{aligned} \quad (6)$$

Этот прообраз может служить в качестве базисных функций для Р\_ВПФ, т. е. базисным набором может быть набор  $\{\varphi_{\alpha, n}(t)\}_{n=-\infty, \dots, -1, 0, +1, \dots, \infty}$ , элементы которого определяются соотношением (7):

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha, n}(t) &= \\ &= \sqrt{\frac{1+j \operatorname{ctg} \alpha}{2\pi}} e^{-j[(t^2+(nt_0)^2)/2] \operatorname{ctg} \alpha + j(nt_0)t \operatorname{cosec} \alpha}. \end{aligned} \quad (7)$$

Параметр  $t_0$  называется *центральной частотой* базисного сигнала (7) в области ВПФ. Такое его название связано с установленным ниже условием  $t_0 = 2\pi (\sin \alpha/T)$ , которое необходимо для взаимной ортогональности базисных функций и которое показывает "пропорциональность"  $t_0 \sim 1/T$ , где  $T$  — область задания анализируемого сигнала.

- Базисные функции-сигналы у ВПФ являются так называемыми сигналами с быстро изменяющейся частотой (СБИЧ); это аperiodические сигналы, которым не может быть приписана какая-либо определенная частота. Поскольку сумма аperiodических компонент не может быть периодической, рядами ВПФ представляют только сигналы, определенные на конечной временной области ("финитные" сигналы).<sup>1)</sup>
- Набор базисных сигналов (БС) (7) для разложения в Р\_ВПФ при определенных условиях является ортонормальным. Это показывает интегрирование пары<sup>2)</sup> БС на интервале  $[-T/2, T/2]$ :

$$\begin{aligned} &\int_{-(T/2)}^{T/2} \varphi_{\alpha, m}(t) \varphi_{\alpha, n}^*(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{j[(nt_0)^2 - (mt_0)^2]/2 \operatorname{ctg} \alpha} \int_{-(T/2) \operatorname{cosec} \alpha}^{(T/2) \operatorname{cosec} \alpha} e^{j(m-n)t_0 \bar{t}} d\bar{t}; \end{aligned} \quad (8)$$

из (8) получаем

$$\int_{-(T/2)}^{T/2} \varphi_{\alpha, m}(t) \varphi_{\alpha, n}^*(t) dt =$$

<sup>1)</sup> Ниже будет использоваться термин "базисные сигналы", поскольку рассмотрение схем Р\_ВПФ и ВПФ\_ДФ проводится в контексте обработки и анализа сигналов (функций зависящих от времени), а свойства базисных сигналов трактуются с точки зрения динамики их частоты. Заметим, что в ИИС обычно обрабатываются финитные сигналы, поэтому далее будем говорить просто о сигнале  $s(t)$ .

<sup>2)</sup> В функциональном пространстве интегрирование пары базисных сигналов по области их определения соответствует "произведению", которое обычно используется для проверки ортонормальности базиса (т. е. взаимной "перпендикулярности" при различных индексах элементов базиса и наличия у них единичной длины).

$$= \begin{cases} \frac{T \operatorname{cosec} \alpha}{2\pi} & \text{при } m=n; \\ \frac{1}{j2\pi(m-n)t_0} \times & \\ \times e^{j[(m t_0)^2 - (n t_0)^2]/2} \operatorname{ctg} \alpha e^{j(m-n)t_0(T/2)\operatorname{cosec} \alpha} \times & \\ \times \{e^{j(m-n)t_0 T \operatorname{cosec} \alpha}\} & \text{при } m \neq n. \end{cases} \quad (9)$$

(В преобразованиях, ведущих к получению выражений (8) и (9), использована замена переменных  $\bar{t} = t \operatorname{cosec} \alpha$ ).

• Чтобы  $\varphi_{\alpha,n}$  удовлетворяли условию ортогональности, правая часть в (9) при  $m \neq n$  должна быть равна нулю. Это условие может быть удовлетворено, только когда  $t_0 = 2\pi(\sin \alpha / T)$ . Кроме того, можно разделить каждую  $\varphi_{\alpha,n}$  на величину  $(2\pi)^{-1} T \operatorname{cosec} \alpha$  и получить ортогональный базис  $\{\bar{\varphi}_{\alpha,n}\}$  для Р\_ВПФ:

$$\bar{\varphi}_{\alpha,n}(t) = \frac{\varphi_{\alpha,n}(t)}{\sqrt{\frac{T \operatorname{cosec} \alpha}{2\pi}}} = \sqrt{\frac{\sin \alpha + j \cos \alpha}{T}} \times \exp\{-j[(t^2 + (n(2\pi/T)\sin \alpha)^2/2)]\operatorname{ctg} \alpha + jnt(2\pi/T)\}, \quad (10)$$

где  $n = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$ . Так что набор (множество)  $\{\dots, \bar{\varphi}_{\alpha,-1}, \bar{\varphi}_{\alpha,0}, \bar{\varphi}_{\alpha,1}, \dots\}$  составляет базис ортогональных сигналов.

Приведем еще два замечания.

1) Текущее значение "мгновенной" частоты БС может быть получено вычислением производной от фазы, поэтому текущая частота БС определяется выражением

$$\omega_{\alpha,n}(t) = -t \operatorname{ctg} \alpha + 2\pi n / T. \quad (11)$$

Из (11) видно, что каждый БС является СБИЧ с постоянной скоростью изменения частоты ( $-t \operatorname{ctg} \alpha$ ).

2) Представление (финитного) сигнала в виде Р\_ВПФ интерпретируется как разложение на составляющие элементы (гармоники) — СБИЧ.

Таким образом, разложение сигнала  $s(t)$  в ряд по вращаемому преобразованию Фурье со значением углового параметра  $\alpha$  представляется соотношением:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{\alpha,n} \bar{\varphi}_{\alpha,n}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( C_{\alpha,n} \sqrt{\frac{\sin \alpha + j \cos \alpha}{T}} \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left\{-j\left[\left(t^2 + (n(2\pi/T)\sin \alpha)^2\right)/2\right]\operatorname{ctg} \alpha + jnt(2\pi/T)\right\}\right), \quad t \in [-T/2, T/2], \quad (12)$$

где  $C_{\alpha,n}$  — коэффициенты разложения в Р\_ВПФ с параметром  $\alpha$ .<sup>3)</sup>

Коэффициенты разложения сигнала в Р\_ВПФ определяются выражением (13)<sup>4)</sup>:

$$C_{\alpha,n} = \int_{-(T/2)}^{T/2} s(t) \bar{\varphi}_{\alpha,n}^*(t) dt = \sqrt{\frac{\sin \alpha + j \cos \alpha}{T}} \int_{-(T/2)}^{T/2} s(t) \times \exp\left\{j\left(t^2 + (n(2\pi/T)\sin \alpha)^2/2\right)\operatorname{ctg} \alpha - jnt(2\pi/T)\right\} dt. \quad (13)$$

Разложение в Р\_ВПФ может использоваться для представления аperiodического сигнала  $s(t)$ , который определен на конечном интервале (в (13) принят интервал  $[-T/2, T/2]$ ).

Свойства Р\_ВПФ систематизированы Пэйем—Йехом [11, 13] и показаны в табл. 1. Эти свойства в определенной степени сходны со свойствами ВПФ непрерывного сигнала. Немного позднее (после анализа ВПФ\_ДВ) будет проведено сопоставление свойств сдвига и модуляции для Р\_ВПФ и для рядов обычного преобразования Фурье, а также сопоставление свойства ВПФ\_ДВ и ПФ\_ДВ. Такие сопоставления будут даны в табл. 3.

Этими же авторами установлена взаимосвязь и соотношение между коэффициентами разложения сигнала в Р\_ВПФ и значением ВПФ самого сигнала (при определенным образом масштабированном аргументе ВПФ):

$$C_{\alpha,n} = \sqrt{\frac{2\pi \sin \alpha}{T}} S_{\alpha}\left(n \frac{2\pi}{T} \sin \alpha\right), \quad (14)$$

<sup>3)</sup> В рамках методов ВПФ как обобщенной формы преобразования Фурье обычные ряды Фурье являются частным случаем Р\_ВПФ, соответствующим значению  $\alpha = \pi/2$ . Базисные сигналы обычного РФ — это синусоидальные гармоники (на время-частотной плоскости они представляются горизонтальными линиями).

<sup>4)</sup> Строго говоря, в терминах функционального анализа (13) является произведением сигнала и базисного сигнала  $\bar{\varphi}_{\alpha,n}(t)$ , причем под интегралом (в произведении) второй множитель берется в комплексно-сопряженной форме, т.е.  $\bar{\varphi}_{\alpha,n}^*(t)$ .

где  $C_{\alpha,n}$  — коэффициент разложения сигнала  $s(t)$  в Р\_ВПФ  $S_\alpha$  — ВПФ этого сигнала.

Из (14) видно, что интервал отсчетов зависит как от  $\alpha$  (параметра ВПФ), так и от  $T$  (длины интервала, являющегося областью определения сигнала). При этом, когда интервал  $T$  для вычисления Р\_ВПФ значительно возрастает (в предельном случае  $\rightarrow \infty$ ), интервал отсчетов коэффициентов разложения стремится к нулю. Поэтому по мере возрастания интервала  $T$  Р\_ВПФ будет постепенно переходить просто в ВПФ сигнала, а в предельном случае ( $T \sim \infty$ ) Р\_ВПФ эквивалентен вращаемому преобразованию Фурье сигнала.

**ВРАЩАЕМОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДИСКРЕТНОГО ВРЕМЕНИ**

Известный метод ПФ дискретного времени (ПФ\_ДВ) обеспечивает процедуры вычисления частотных компонент дискретного сигнала. Обычное определение ПФ\_ДВ представляется в форме с нормализацией частоты [2]. Это придает методу независимость от интервала квантования анализируемого сигнала и приводит выражение ПФ\_ДВ к формуле для периодической функции с периодом  $2\pi$ .

ПФ\_ДВ без нормализации частоты дает периодический результат преобразования с периодом  $2\pi/T_1$ , где  $T_1$  — интервал дискретизации сигнала.

Определение прямого и обратного ПФ\_ДВ без нормализации частоты отсчетов сигнала выражается соотношениями (15) и (16):

$$S(\omega) = \sqrt{\frac{T_1}{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) e^{-j\omega T_1 n}, \tag{15}$$

$$s(n) = \sqrt{\frac{T_1}{2\pi}} \int_{-\pi/T_1}^{\pi/T_1} S(\omega) e^{j\omega T_1 n} d\omega. \tag{16}$$

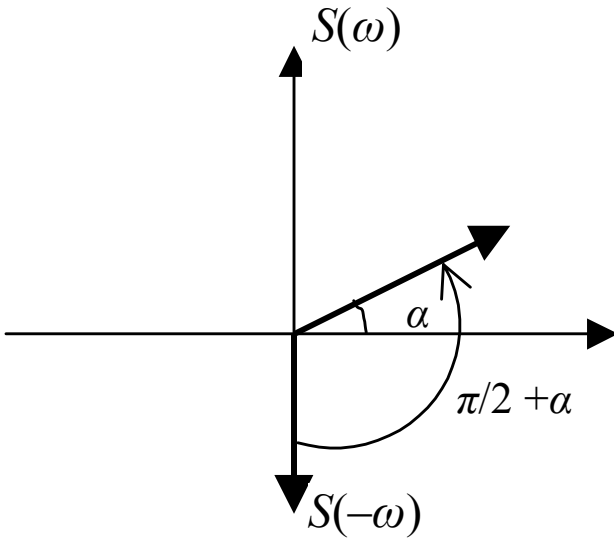
При формировании ВПФ\_ДВ, являющегося обобщением обычного преобразования Фурье дискретного времени, необходимые преобразования удобнее осуществлять на основе выражений (15) и (16) (т. е на основе определения прямого и обратного ПФ\_ДВ без нормализации частоты отсчетов сигнала).

Построение метода ВПФ\_ДТ использует два положения, первое из которых традиционное, а второе имеет специфику, свойственную процедурам аналитического развития схемы ВПФ\_ДТ:

- сигнал  $s(n)$  получен из сигнала  $s(t)$  с ограниченной частотной полосой путем дискретизации его по времени с интервалом  $T_1$ ;
- при построении ВПФ\_ДТ роль временной и частотной осей у Р\_ВПФ взаимно заменяется; делается это для удобства определения ВПФ\_ДТ; это значит, что дискретные отсчеты во временной области трактуются как коэффициенты Р\_ВПФ в частотной области.

Табл. 1. Свойства рядов вращаемого преобразования Фурье

Вид свойства Р_ВПФ	Формализованное представление свойства
Изменение отсчета времени сигнала	$P\_ВПФ[s(-t)] \rightarrow C_{\alpha,(-n)}$
Комплексное сопряжение сигнала	$P\_ВПФ[s^*(t)] \rightarrow j(C_{-\alpha,n})^*$
Сдвиг сигнала по времени на величину $\tau$ (кратную относительно $(2\pi \operatorname{tg} \alpha)/T$ )	$\tau = k(2\pi \operatorname{tg} \alpha)/T; \quad k - \text{целое}; \quad t_0 = (2\pi \sin \alpha)/T;$ $P\_ВПФ[s(t - \tau)] \rightarrow C_{\alpha,n-k} e^{-j\frac{\tau^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha - jm_0 \tau \sin \alpha}$
Модуляция сигнала ( $s(t) \rightarrow s(t)e^{jmt_0 t}$ )	$P\_ВПФ[s(t)e^{jmt_0 t}] \rightarrow C_{\alpha,(n-m \sin \alpha)} e^{-j\frac{(m t_0)^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha + j m m_0 \cos \alpha}$ , где $t_0 = 2\pi(\sin \alpha)/T; \quad (n - m \sin \alpha) — \text{целое}$
Масштабирование сигнала ( $s(t) \rightarrow s(ct)$ )	$P\_ВПФ[s(ct)] \rightarrow C_{\beta,n} \sqrt{c} \times \sqrt{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}} \sqrt{\frac{1 - j \operatorname{ctg} \alpha}{c^2 - j \operatorname{ctg} \alpha}} e^{\frac{j(m t_0)^2 \operatorname{ctg} \beta}{2} \left( c^4 \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} \right)}$
Соотношение Парсеваля	$\alpha \neq m\pi; \quad m — \text{целое}; \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}  C_{\alpha,n} ^2 = \int_T  s(t) ^2 dt$



К концепции использования спектра сигнала в виде  $S(-\omega)$  при построении преобразований для получения вращаемого преобразования Фурье дискретного времени

Логическая последовательность построения ВПФ\_ДТ включает следующие этапы.

- Выполняется разложение спектральной функции  $S(-\omega)$  сигнала  $s(t)$  в Р\_ВПФ с параметром  $(\pi/2 + \alpha)$ .<sup>5)</sup> Эта концепция показана на рисунке. Выбор спектра  $S(-\omega)$  (вместо  $S(\omega)$ ) объясняется тем, что разложение  $S(-\omega)$  в Р\_ВПФ с положительным значением параметра  $(\pi/2 + \alpha)$  может облегчить сложность преобразований, связанных с построением схемы ВПФ\_ДВ [13].

- С помощью (12) осуществляется представление спектра сигнала с дискретными отсчетами в форме выражения (17):

$$S(-\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{(\pi/2)+\alpha,n} \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + j \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{2\pi/T_1}} \times \exp\left\{-j\left[\omega^2 + \left[n\left(\frac{2\pi}{2\pi/T_1}\right)\sin\left((\pi/2)+\alpha\right)\right]^2\right]\right\} \times 1/\left(2\text{ctg}\left((\pi/2)+\alpha\right)\right) + jn\omega\left(\frac{2\pi}{2\pi/T_1}\right)\right\} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ C_{(\pi/2)+\alpha,n} \sqrt{\frac{\cos\alpha - j \sin\alpha}{2\pi/T_1}} \times \exp\left[ j\left( \left(\omega^2 + (nT_1 \cos\alpha)^2\right)/2 \right) \text{tg}\alpha + jn\omega T_1 \right] \right\}. \quad (17)$$

- С помощью (13) вычисляются коэффициенты разложения Р\_ВПФ:

$$D_\alpha[n] = C_{(\pi/2)+\alpha,n} = \int_{-(\pi/T_1)}^{\pi/T_1} S(\omega) \sqrt{\frac{T_1}{2\pi}} (\cos\alpha + j \sin\alpha) \times \exp\left[-j\frac{\omega^2 + n^2 T_1^2 \cos^2 \alpha}{2} \text{tg}\alpha\right] \times \exp[-jn\omega T_1] d\omega; \quad (18)$$

далее из (18)

$$D_\alpha[n] = \frac{T_1}{2\pi} \sqrt{\cos\alpha + j \sin\alpha} \exp\left[-j\left(\frac{n^2 T_1^2}{2}\right) \sin\alpha \cos\alpha\right] \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] \int_{-(\pi/T_1)}^{\pi/T_1} \exp[-j(\omega^2/2) \text{tg}\alpha] \times \exp[j\omega T_1(k-n)] d\omega \quad (19)$$

и затем из (19)

$$D_\alpha[n] = \frac{T_1}{2} \sqrt{\frac{1 - j \text{ctg}\alpha}{2\pi}} \sqrt{\cos\alpha} \times \exp\left[-j\left(\frac{n^2 T_1^2}{2}\right) \sin\alpha \cos\alpha\right] \times \sum_{-\infty}^{\infty} s[k] \Gamma(n, k, \alpha), \quad (20)$$

где  $D_\alpha[n]$  является ВПФ\_ДВ дискретного сигнала  $s[k]$ ;  $\alpha \neq m\pi + \pi/2$  ( $m$  — целое). Кроме того, в (20) введено обозначение для функции  $\Gamma(n, k, \alpha)$ , которая выражается через функцию плотности распределения вероятности (ФРВ) ("функцию ошибок"):

<sup>5)</sup> Отметим, что спектральная функция берется для противоположного отсчета аргумента, т. е.  $S(-\omega)$ .

$$\Gamma(n, k, \alpha) = \left\{ -\text{ФРВ} \left( j \frac{-\pi \operatorname{tg} \alpha + T_1^2 (n-k)}{T_1 \sqrt{2j \operatorname{tg} \alpha}} \right) + \text{ФРВ} \left( j \frac{\pi \operatorname{tg} \alpha + T_1^2 (n-k)}{T_1 \sqrt{2j \operatorname{tg} \alpha}} \right) \right\} \times \exp \left( j \left( T_1^2 (k-n)^2 / 2 \right) \operatorname{ctg} \alpha \right), \quad (21)$$

где ФРВ (для гауссовой плотности — так называемого нормального распределения) определяется известным выражением

$$\text{ФРВ}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du. \quad (22)$$

Соотношение (18) обеспечивает метод для вычисления ВПФ\_ДВ на основе сигнала, заданного в частотной области. Соотношение (20) — способ получения ВПФ\_ДВ из временной формы сигнала ( $\{s[k]_{k=-1,0,1,\dots}\}$ ).

При  $\alpha = 0$  результат преобразования  $D_\alpha[n]$  будет соответствовать начальному сигналу  $x[k]$ . Однако при  $\alpha = m\pi + \pi/2$  преобразование становится обычным преобразованием Фурье дискретного времени.

Обратное ВПФ\_ДВ вычисляется на основе соотношения:

$$s[n] = \frac{T_1}{2} \sqrt{\frac{1+j \operatorname{ctg} \alpha}{2\pi}} \sqrt{\cos \alpha} \times \exp \left[ -j \left( \frac{n^2 T_1^2}{2} \right) \sin \alpha \cos \alpha \right] \times \sum_{-\infty}^{\infty} D_\alpha[k] \Gamma(n, k, -\alpha), \quad (23)$$

где вспомогательная функция  $\Gamma(n, k, \alpha)$  определена соотношением (21).

Из (23) видно, что первоначальный сигнал может быть восстановлен из ВПФ\_ДВ со значением параметра  $(-\alpha)$ . Подобно тому как в случае Р\_ВПФ при значительном уменьшении интервала дискретизации  $T_1$  (в пределе при  $T_1 \rightarrow 0$ ) результат ВПФ\_ДВ может быть получен с использованием отсчетов ВПФ:

$$D_\alpha[n] = \sqrt{T_1 \cos \alpha} S_\alpha(n T_1 \cos \alpha), \quad (24)$$

где  $S_\alpha(\cdot)$  — ВПФ сигнала со специальной формой отсчетов при параметре  $\alpha$ .

Из (24) видно, что расстояние между отсчетами ("интервал дискретизации") ВПФ\_ДВ будет становиться меньше, когда угловой параметр  $\alpha$  приближается к значению, равному  $(m\pi + (\pi/2))$  с целым  $m$ . Если параметр  $\alpha$  равен  $(m\pi + (\pi/2))$ , то расстояние между отсчетами ВПФ\_ДВ становится нулевым. Это отвечает известному результату, состоящему в том, что в этом случае выход ВПФ\_ДВ является непрерывной функцией.

Свойства ВПФ\_ДВ, систематизированные в табл. 2, подобны свойствам Р\_ВПФ, за исключением того, что угловой параметр должен быть изменен.

Аналогично случаю Р\_ВПФ свойства ВПФ\_ДВ, относящиеся к модуляции и к сдвигу, выполняются при некоторых ограничениях, и они отдельно собраны в табл. 3 с сопоставлением их со свойствами этого типа у ПФ\_ДВ. В первой части табл. 3 (она упоминалась выше) показаны свойства, относящиеся к модуляции и к сдвигу для Р\_ВПФ, дано их сопоставление с соответствующими свойствами РФ и вид ограничений, при которых эти свойства выполняются.

В табл. 4 показаны типы сигналов различных схем ВПФ, разработанных до самого последнего времени [13]. Для сравнения в последнем столбце таблицы показаны типы схем традиционного преобразования Фурье. Среди четырех таких схем

- обычное (ПФ), являющееся первичным методом;
- РФ — дискретные, аperiodические;
- ПФ\_ДВ — непрерывные, периодические;
- Д\_ПФ, которое определено для дискретизованного по времени и периодического сигнала и дает в результате дискретный и периодический спектр [2]. Поэтому типы первоначальных сигналов и преобразований для Д\_ПФ относятся как к дискретизованному, так и периодическому видам.

**Табл. 2.** Свойства вращаемого преобразования Фурье дискретного времени (ВПФ\_ДВ)

Вид свойства ВПФ_ДВ	Формализованное представление свойства
Изменение отсчета аргумента	ВПФ_ДВ[ $s(-n)$ ] $\rightarrow D_\alpha[-n]$
Комплексное сопряжение сигнала	ВПФ_ДВ[ $s^*(n)$ ] $\rightarrow j(D_{-\alpha}^*[n])$
Сдвиг сигнала по времени на величину $\tau$	ВПФ_ДВ[ $s(n - \tau)$ ] $\rightarrow D_\alpha[n - \tau \cos \alpha] e^{j \frac{(\tau \omega_0)^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha - j n \tau \omega_0^2 \sin \alpha}$ , $\omega_0 = T_1 \cos \alpha$ и $(n - \tau \cos \alpha)$ — целые
Модуляция сигнала ( $s[n] \rightarrow s[n] e^{j n \tau T_1}$ )	ВПФ_ДВ[ $s[n] e^{j n \tau T_1}$ ] $\rightarrow D_\alpha[n - k] e^{-j \frac{(\tau)^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha + j n \omega_0 \tau \cos \alpha}$ , $\tau = k \times T_1 \operatorname{ctg} \alpha$ , где переменная $k$ — целое число
Соотношение Парсеваля	$(\alpha \neq m\pi + \pi/2)$ и $m$ — целое $\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty}  s[n] ^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}  D_\alpha[n] ^2$

**Табл. 3.** Ограничения для свойств сдвига и модуляции у Р\_ВПФ и ВПФ\_ДВ

Вид преобразования	Свойство сдвига	Свойство модуляции
Ряд вращаемого преобразования Фурье (Р_ВПФ)	$s(t - \tau)$ , $\tau = k(2\pi/T) \operatorname{tg} \alpha$ , $k$ — целое	$s(t) e^{jvt}$ , $v = k(2\pi/T)$ , $k$ — целое
Ряд Фурье	$s(t - \tau)$ , $\tau$ — произвольное	$s(t) e^{jvt}$ , $v = k(2\pi/T)$ , $k$ — целое
Вращаемое преобразование Фурье дискретного времени (ВПФ_ДВ)	$s(n - \tau)$ , $\tau$ и $(\tau \cos \alpha)$ — целые числа	$s(n) e^{jnvT_1}$ , $v = kT_1 \cos \alpha$ , $k$ — целое
Преобразование Фурье дискретного времени (ПФ_ДВ)	$s(n - \tau)$ , $\tau$ — целое	$s(n) e^{jnvT_1}$ , $v$ — произвольное

Тип ВПФ\_ДВ, построенный по обсуждавшейся выше логике, является дискретным и аperiodическим в области ВПФ (при угловом параметре  $0 < \alpha < \pi/2$ ) и имеет там "бесконечную область определения".<sup>6)</sup> Кроме того, получаемая для

<sup>6)</sup> Возможна также логика построения ВПФ\_ДВ, основанная на ВПФ сигнала  $s(t)$   $\mathbf{F}_\alpha(s(t)) = \mathbf{F}_\alpha \{ \sum_n s(n) \delta(t - n) \}$ . Такое определение приводит в области ВПФ к непрерывному результату, но он не будет обладать хорошими граничными условиями для случая  $\alpha \approx 0$ . Поэтому использованная в статье логика более удобна, т. к. обеспечивает получение дискретного, аperiodического ВПФ\_ДВ с "бесконечной областью определения" в области ВПФ.

ВПФ\_ДВ дискретизация (интервал между отсчетами) составляет  $T_1 \cos \alpha$ . Причем, если  $\alpha = m\pi + \pi/2$ , то интервал отсчетов ВПФ\_ДВ становится нулевым (точнее стремится к нулю) и ВПФ\_ДВ будет сводиться к обычному дискретному преобразованию Фурье (ДПФ). Близкая ситуация возникает и в случае Р\_ВПФ: интервал отсчетов составляет  $2\pi \sin \alpha / T$  и он становится нулем при  $\alpha = m\pi$ , так что в результате получается непрерывный сигнал. (Для полноты сопоставления различных схем (набора методов), связанных с ПФ, ДПФ, Р\_ПФ, ВПФ\_ДВ, последняя строка в табл. 4 показывает тип данных дискретного вращаемого преобразования Фурье (Д\_ВПФ), которое детально не обсуждалось в нашей статье).

**Табл. 4.** Типы сигналов, получаемых в результате применения различных схем их анализа при использовании нескольких форм преобразований на основе традиционного и вращаемого преобразований Фурье

Схема преобразования	Временная область $\alpha = 0$	Область ВПФ $0 < \alpha < \pi/2$	Частотная область $\alpha = \pi/2$
Вращаемое преобразование Фурье (ВПФ)	Непрерывный	Непрерывный	Непрерывный (ПФ)
Ряд ВПФ (Р_ВПФ)	Непрерывный, периодический	Дискретный, апериодический	Дискретный, апериодический (РФ)
Вращаемое преобразование Фурье дискретного времени (ВПФ_ДВ)	Дискретный, апериодический	То же	Непрерывный, периодический (ПФ_ДВ)
Дискретное ВПФ	Дискретный, периодический	Дискретный	Дискретный, периодический (ДПФ)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исходя из проведенного анализа, может быть отмечен ряд положений.

- Ряды вращаемого преобразования Фурье (Р\_ВПФ) являются обобщением традиционных рядов Фурье; это обобщение построено на основе модифицированной формы ПФ, называемой вращаемым преобразованием Фурье.

- Коэффициенты разложения в такой ряд (в ряд вида Р\_ВПФ) являются величинами отсчетов ВПФ.

- Отсчеты у огибающей коэффициентов Р\_ВПФ становятся все более тесно расположенными по мере того как возрастает общий интервал  $T$  вычисления этих коэффициентов. Когда интервал вычисления приближается к бесконечности, Р\_ВПФ сходится к вращаемому преобразованию Фурье.

- Вращаемое преобразование дискретного времени (ВПФ\_ДВ) является обобщением традиционного ПФ\_ДВ и может быть получено дуальным разложением Р\_ВПФ. Дискретное ВПФ (Д\_ВПФ) может обеспечить метод для вычисления вращаемого преобразования Фурье для дискретных сигналов. С помощью алгоритма ВПФ\_ДВ может быть реализован анализ дискретных сигналов на основе метода ВПФ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989. 540 с.
2. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 848 с.
3. Guanaurd G.C., Strifors H.C. Signal analysis by means of time-frequency transformation of Wigner type // Proceedings of IEEE. 1996. V. 84, N 9. P. 1231–1247.
4. Hlawatsch F., Boudreaux-Bartels G.F. Linear and quadratic time-frequency signal representation // IEEE Signal Processing Magazine. 1992. V. 9, N 4. P. 21–67.
5. Jawerth B., Sweldens W. Wavelet-based multiresolution analysis // SIAM (Society of Industrial Association on Matematics) Review. 1994. V. 36, N 3. P. 377.
6. Меркушева А.В. Классы преобразований нестационарного сигнала в информационно-измерительных системах. II. Время-частотные преобразования // Научное приборостроение. 2002. Т. 12, № 2. С. 59–70.
7. Ozactas H.M. Fractional Fourier domain // Signal Processing. 1995. V. 46. P. 119–124.
8. Lohmann A.W. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform // Journal of Optic Society of America. 1993. V. 10. P. 2181–2186.



9. *Almeida L.B.* The fractional Fourier transform and time-frequency representations // IEEE Transactions on Signal processing. 1994. V. 42. P. 3084–3091.
10. *Santhanam B., McClellan J.H.* Discrete rotational Fourier transform // IEEE Transactions on Signal processing. 1996. V. 42, N 4. P. 994–998.
11. *Pei S.C., Yeh M.H.* Improved discrete fractional Fourier transform // Optical Letters. 1997. V. 22. P. 1047–1049.
12. *Arikan O., Kutay M.A., Onural L., Ozactas H.M.* Optimal filtering in fractional Fourier domain // Proceedings of IEEE International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing. Detroit, MI, 1995. P. 937–940.
13. *Pei S.C., Yeh M.H.* Rotational Fourier series expansion for finite signals // IEEE Transactions on Signal Processing. 1998. N 10. P. 2889–2899.

*Санкт-Петербург*

Материал поступил в редакцию 3.05.2006.

## METHODS AND SCHEMES FOR SIGNAL SPECTRUM ANALYSIS BASED ON GENERALIZED MODIFICATION OF THE FOURIER TRANSFORM

**A. V. Merkusheva, G. F. Malychina**

*Saint-Petersburg*

Modification of the Fourier transformation (FT) — rotational FT has its own (different from FT) properties, specific rules for signal multiplication and convolution; it is useful for processing the non-stationary signals in information-measurement systems. Rotational FT (RFT) in some conditions may be more efficient than FT in the problems of multiplexing and filtering. For spectral analysis by means of the RFT method, we developed the schemes oriented to processing different types of signals. These are the RFT series and discrete time RFT. Both schemes are the generalization of corresponding traditional forms of signal processing by means of FT.