ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2006, том 16, № 4, с. 85–96

ОБРАБОТКА И АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

УДК 621.391;519.21;519.245

© А. В. Меркушева, Г. Ф. Малыхина

МЕТОД ОБОБЩЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ ВРЕМЯ-ЧАСТОТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, МУЛЬТИПЛЕКСИРОВАНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИГНАЛОВ В ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Предлагается расширенная форма трактовки обобщенной модификации преобразования Фурье (ПФ) с использованием операторной формы и концепции собственных функций. Разработанные виды обобщения ПФ процедурно связаны с вращением время-частотной плоскости (отсюда термин "вращаемое ПФ"— ВПФ) и реализуются в новых разновидностях рядов Фурье и ПФ дискретного времени. Здесь рассмотрены соотношения ВПФ с время-частотными преобразованиями, с сигналами с быстро изменяющейся частотой, возможности ВПФ при мультиплексировании и фильтрации нестационарных сигналов в информационных системах.

ВВЕДЕНИЕ

Обобщенная модификация преобразования Фурье (ПФ), введенная Намиасом, Мак-Брайдом и Кером в прикладной математике и квантовой физике [1, 2], реализована оптическими методами Лохманом, Мендловичем и Озактасом [3, 4, 5], а затем нашла развитие в области методов ПФ для спектрального анализа сигналов в информационных системах (ИС).[1)] Преобразования, ведущие к обобщению существующих разновидностей схем ПФ, связаны с вращением время-частотной плоскости, поэтому для этих схем используется аббревиатура ВПФ — вращаемое преобразование Фурье: ряды ВПФ, ВПФ дискретного времени [6]. Действие ВПФ на сигнал переводит его в область значений ВПФ — в двумерное пространство, одной из компонент которого служит угловой параметр ВПФ. С помощью аналитических преобразований получен результат применения ВПФ к разнообразным сигналам специальной формы, к произведениям и к сверткам сигнала с простыми типами передаточных функций.[2)]

Несмотря на существование эффективного способа реализации ВПФ оптическим методом и достаточно полной систематизации свойств прямого и обратного ВПФ на сигналах-функциях и их комбинациях, использование методов обобщенной модификации ПФ в приложениях, связанных с обработкой нестационарных сигналов в ИС, сдерживается недостаточной проработкой отдельных методических аспектов применения этого преобразования. Поэтому представляется полезным показать возможности использования ВПФ в задачах мультиплексирования и фильтрации сигналов в ИС и отметить специфику сигналов (в области их частотно-временнóй структуры), при которой методы ВПФ могут оказаться более эффективными сравнительно с традиционными способами мультиплексирования и частотной фильтрации. Кроме того, проанализирована взаимосвязь ВПФ с время-частотными преобразованиями общего вида, с преобразованием Радона и с сигналами типа СБИЧ (сигналами с быстро изменяющейся частотой; чаще всего с линейным изменением).

Предварительно дана расширенная трактовка обобщенной модификации преобразования Фурье с использованием операторной формы и концепции собственных функций.

ОПЕРАТОРНАЯ ФОРМА ВПФ И СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ [8, 9]

В наиболее компактной форме прямое и обратное ПФ сигнала $s(t)$ представляется в виде соотношений:

[1)] Термин "информационная система", использованный здесь ради краткости, подразумевает любую из информационно-измерительных систем (ИИС) или информационно-управляющих систем (ИУС), в которых осуществляется контроль и обработка измеряемых или синтезируемых (для управления), как правило, нестационарных сигналов.

[2)] Многие свойства ВПФ нашли отражение в обзоре [7], который содержит также библиографические указания.

$$S(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\exp(-2\pi j\nu t)\mathrm{d}t,$$

$$s(t)=\int_{-\infty}^{\infty} S(\nu)\exp(2\pi j\nu t)\mathrm{d}\nu.$$

Введение операторной формы позволяет представить прямое ПФ (первое соотношение)[3] как $S=\mathbf{F}s$. При этом $\mathbf{F}^2 s(t)=s(-t)$ и $\mathbf{F}^4 s(t)=s(t)$, где $\mathbf{F}^n$ означает повторное n-кратное применение ПФ.

Если к уравнению

$$\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2}+4\pi^2\left(\frac{2n+1}{2\pi}-t^2\right)s(t)=0, \qquad (1)$$

где в качестве функции $s(t)$ временно не имеется в виду какой-либо определенный сигнал, применить ПФ (с использованием правил для ПФ от $\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2}$ и от $t^2\cdot s(t)$), то уравнение (1) преобразуется в свою "частотную" форму (2):

$$\frac{\mathrm{d}^2 S(\nu)}{\mathrm{d}\nu^2}+4\pi^2\left(\frac{2n+1}{2\pi}-\nu^2\right)S(\nu)=0, \qquad (2)$$

где $S(\nu)=\mathbf{F}\left[s(t)\right]$.

Уравнение (2) по форме идентично (1). Но поскольку решением уравнений такого вида являются функции Эрмита—Гаусса[4] $H_n\left(\sqrt{2\pi}\,t\right)\exp\left(-\pi t^2\right)$, то именно эти функции являются (исходя из (2)) собственными функциями операции (оператора) преобразования Фурье.

Нормированные функции Эрмита—Гаусса $\{\tilde{\Psi}_n(t)\}_{n=1,2,\ldots}$ служат набором, образующим базис, и имеют вид

$$\tilde{\Psi}_n(t)=\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2^n n!}}H_n\left(\sqrt{2\pi}\,t\right)\exp\left(-\pi t^2\right). \qquad (3)$$

Эти функции являются собственными функциями оператора ПФ $\mathbf{F}$, т. е. удовлетворяют уравнению

$$\mathbf{F}\left(\tilde{\Psi}_n(t)\right)=\lambda_n\tilde{\Psi}_n(t)\ , \qquad (4)$$

где $\lambda_n=j^{-n}$ — собственные значения, соответствующие n-й собственной функции.

Поскольку собственные функции Эрмита—Гаусса $\left\{\tilde{\Psi}_n(t)\right\}_{n=1,2,\ldots,\infty}$ составляют базис, то любой сигнал (как функция) может быть представлен рядом по этим собственным функциям:

$$s(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{A}_n\tilde{\Psi}_n(t), \qquad (5)$$

где коэффициенты $\tilde{A}_n=\int\tilde{\Psi}_n(t)s(t)\mathrm{d}t.$

Применение к (5) оператора $\mathbf{F}$ позволяет получить в аналогичной форме представление ПФ сигнала $s(t)$:

$$\mathbf{F}\left(s(t)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{A}_n\, j^{-n}\,\tilde{\Psi}_n(t). \qquad (6)$$

Оператор вращаемого преобразования Фурье порядка α (т. е. $\mathbf{F}^{\alpha}$) может быть определен на основе действия оператора традиционного ПФ на свои собственные функции:

$$\mathbf{F}^{\alpha}\left(\tilde{\Psi}_n(t)\right)=\left(\lambda_n\right)^{\alpha}\tilde{\Psi}_n(t)=(j)^{-\alpha n}\tilde{\Psi}_n(t). \qquad (7)$$

Таким образом, оператор ВПФ имеет те же собственные функции, что и оператор ПФ, а собственные значения ВПФ с угловым параметром α равны значению $\left(\lambda_n\right)^{\alpha}$.

Оператор ВПФ является линейным, поэтому ВПФ любого сигнала может быть выражено рядом, который по структуре аналогичен ряду (6):

$$\left\{\mathbf{F}^{\alpha}\left(s(t)\right)\right\}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{A}_n\, j^{-\alpha n}\,\tilde{\Psi}_n(t). \qquad (8)$$

Результат применения к сигналу оператора ВПФ может быть представлен также в виде (чаще используемом) интегрального преобразования с ядром $B_{\alpha}(t,t')$ [1, 2, 8]. Это осуществляется подстановкой в (8) выражения для коэффициентов $\tilde{A}_n$ из (5):

$$\left\{\mathbf{F}^{\alpha}\left(s(t)\right)\right\}(t)=\int B_{\alpha}\left(t,t'\right)s\left(t'\right)\mathrm{d}t', \qquad (9)$$

$$\begin{aligned}B_{\alpha}\left(t,t'\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda_n\right)^{\alpha}\tilde{\Psi}_n(t)\tilde{\Psi}_n(t')=\\&=\sqrt{2}\exp\left[-\pi\left(t^2+t'^2\right)\right]\times\\&\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{j^{-\alpha n}}{2^n n!}H_n\left(\sqrt{2\pi}\,t\right)H_n\left(\sqrt{2\pi}t'\right).\end{aligned} \qquad (10)$$

Из выражения (10) ядра ВПФ может быть получена более простая форма (11). Это реализуется путем использования у ВПФ вместо α приведен-

[3] Далее интегрирование $\left(\int_{-\infty}^{\infty}\right)$ будет писаться (для краткости) без указания пределов.

[4] $H_n(\cdot)$ — функция Эрмита (полином n-порядка). Уравнение (2) является почти классическим уравнением математической физики и может быть найдено, например, в [10–12].

ной (или "нормированной") величины[5)] φ: $\varphi = \alpha/(\pi/2)$. При вращении время-частотной плоскости на угол α в пределах $0<\alpha<\pi$, "нормированный" параметр φ меняется в пределах $0<\varphi<2$:

$$B_\varphi(t,t') = \frac{e^{(-j(\pi\hat{\alpha}/4-\alpha/2))}}{|\sin\alpha|^{1/2}}\times$$
$$\times\exp\Big(j\pi\Big(t^2\operatorname{ctg}\alpha - 2tt'\operatorname{cosec}\alpha + t'^2\operatorname{ctg}\alpha\Big)\Big), \quad (11)$$

где $\alpha = \varphi\cdot\pi/2$ и $\hat{\alpha} = \operatorname{sign}(\sin\alpha)$.

Следует заметить, что выражения (7)–(10) не зависят от нормировки параметра α и остаются справедливыми при любой интерпретации параметра ВПФ — и как фактического углового параметра α, и как нормированного параметра φ.

Ядро (11), определенное отдельно для $\varphi = 0$ и $\varphi = 2$, получает упрощенное значение; оно выражается дельта-функциями:[6)] $B_0(t,t') = \delta(t-t')$; $B_2(t,t') = \delta(t+t')$.

Из основных свойств оператора ВПФ, приведенных в достаточно полной форме в [3, 5, 7, 13], полезно отметить наиболее важные и используемые в последующем анализе:

- линейность оператора ВПФ (**F**);
- соответствие оператора $\mathbf{F}^{(\varphi=1)}$ (т. е. $\mathbf{F}^{(\alpha=\pi/2)}$) традиционному оператору ПФ (**F**);
- аддитивность оператора ВПФ по угловому параметру $\mathbf{F}^{\alpha_1}\mathbf{F}^{\alpha_2} = \mathbf{F}^{\alpha_1+\alpha_2}$.

С точки зрения реализации ВПФ небезынтересна возможность его применения к двумерному сигналу $s(t_1, t_2)$ (например, к изображению) и выполнение этого преобразования оптическими методами [3, 5]. ВПФ описывает распространение луча (эмулирующего сигнал) в оптической среде с квадратично изменяющимся коэффициентом преломления, и если свет с распределением интенсивности $s(t_1, t_2)$ падает на одну сторону такой оптической среды с толщиной αL, то на другой стороне этого слоя получается двумерное ВПФ с параметром α. Так что "кусок" такой оптической среды может использоваться для аналогового вычисления ВПФ.

Далее у координатных переменных в области ВПФ будут использоваться индексы типа t_α. Так что $t_0 = t$ и $t_{\pi/2} = v$; s_α — ВПФ сигнала, $s_0 = s$, $s_{\pi/2} = S$ (где S — ПФ сигнала s). Кроме того, время-частотное преобразование (ВЧП) Вигнера—Вилле в зависимости от контекста будет обозначаться как $\mathbf{W}[s]$, $\mathbf{W}[s](t,v)$ или как $S_\mathbf{W}(t,v)$.

ВПФ И ВРЕМЯ-ЧАСТОТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВИГНЕРА—ВИЛЛЕ

Взаимосвязь ВПФ сигнала и его ВЧП Вигнера—Вилле является отражением одного из наиболее значительных свойств ВПФ.[7)] Свойство состоит в том, что применение операции ВПФ с параметром α к сигналу $s(t)$ соответствует вращению распределения (результата преобразования) Вигнера—Вилле на угол α по часовой стрелке. Распределение на время-частотной плоскости, получаемое в результате ВЧП Вигнера—Вилле, определяется соотношением:

$$\mathbf{W}[s(t)] = S_W(t,v) =$$
$$= \int s(t+t'/2)\cdot s^*(t-t'/2)\cdot\exp(-2\pi jvt')\mathrm{d}t', \quad (12)$$

где $\mathbf{W}$ — оператор ВЧП Вигнера—Вилле; $S_W(t,v)$ — время-частотное распределение, результат ВЧП сигнала $s(t)$ [14–17]; * — символ комплексного сопряжения.

Базовые свойства преобразования Вигнера—Вилле свидетельствуют, что его маргиналы (интегралы по одной из переменных результата ВЧП) дают распределение энергии сигнала (квадрата его модуля) в частотной и во временно́й областях, а полное интегрирование дает соответственно полную энергию сигнала:

$$|s(t)|^2 = \int S_W(t,v)\mathrm{d}v,$$
$$|S_W(v)|^2 = \int S_W(t,v)\mathrm{d}t;$$

полная энергия сигнала равна $\int S_W(t,v)\mathrm{d}t$; $S_W(t,v)$ интерпретируется как двумерное распределение энергии сигнала во время-частотной области.[8)]

Более сложные свойства получаются из рассмотрения вращения время-частотного распределения

[5)] Именно с этим преобразованием связано встречающееся для ВПФ название его "дробным преобразованием Фурье" [1, 2].

[6)] Дельта-функции $\delta(\cdot)$ является аналогом δ-символа Кронекера; основное свойство $\delta(\cdot)$ выражается соотношением:

$\int_a^b f(u)\delta(u-u')\mathrm{d}u = f(u')$ при $u'\in[a,b]$

и равняется нулю при $u'\notin[a,b]$.

[7)] Это свойство в [2] даже использовалось в качестве определения ВПФ, но затем было показано, что такое определение полностью эквивалентно (более естественно трактуемому) определению, которое опирается на вращение время-частотной плоскости.

[8)] $S_W(t,v)$ может также быть выражено через спектральную функцию (ПФ) сигнала $S(v)$ или даже в виде функции от ВПФ сигнала $s(t)$ при любом $0<\alpha<\pi$.

Вигнера—Вилле (результата этого ВЧП) и применения к нему преобразования Радона. Так, если ввести оператор $\mathbf{R}_\alpha$ вращения двумерного распределения на угол α против часовой стрелки, то применение этого оператора к соотношению (12) и сравнение полученного результата с распределением Вигнера—Вилле для ВПФ с параметром $\alpha/(\pi/2)$ приводит к соотношению (13) или к эквивалентному ему соотношению (14):

$$\mathbf{R}_{-\alpha}\mathbf{W}[s_0] = \mathbf{W}[s_{\alpha/(\pi/2)}], \tag{13}$$

$$\mathbf{W}[s_\alpha] = \mathbf{R}_{-\alpha(\pi/2)}\mathbf{W}[s_0]. \tag{14}$$

Поскольку и оператор ВПФ, и оператор вращения $\mathbf{R}_\alpha$ имеют свойство аддитивности относительно своих угловых параметров (т. е. $\mathbf{R}_{\alpha_1}\mathbf{R}_{\alpha_2} = \mathbf{R}_{\alpha_1+\alpha_2}$ и $\mathbf{F}^{\alpha_1}\mathbf{F}^{\alpha_2} = \mathbf{F}^{\alpha_1+\alpha_2}$), то аналогичное свойство переносится на взаимосвязь оператора Вигнера—Вилле с оператором вращения результата применения ВЧП к сигналу [7]. Расширенное свойство аддитивности по угловым параметрам операторов $\mathbf{R}_\alpha$ и $\mathbf{W}[s_\alpha]$ определяется соотношением

$$\mathbf{W}[s_{\alpha_2}] = \mathbf{R}_{(-\alpha_2(\pi/2)+\alpha_1(\pi/2)}\mathbf{W}[s_{\alpha_1}]. \tag{15}$$

Еще одно свойство, связанное одновременно с ВПФ, ВЧП Вигнера—Вилле и с преобразованием Радона, установлено Лохманом [5, 8]. Преобразование Радона[9] $\mathbf{RAD}_\psi$ некоторой функции двух переменных (такой, как распределение Вигнера—Вилле) зависит от углового параметра (назовем его ψ), и результатом преобразования является проекция этой функции на ось, составляющей угол ψ с осью t (в координатной системе (t, ν)). При этом термин "проекция" понимается (в смысле функционального анализа) как интеграл преобразуемой функции вдоль соответствующей оси. Используя введенные обозначения, анализируемое свойство выражается соотношением (16) или эквивалентным ему соотношением (17):

$$\mathbf{RAD}_\psi\left\{\mathbf{W}[s]\right\} = \left|\mathbf{F}^{[\alpha=\psi/(\pi/2)]}[s]\right|^2, \tag{16}$$

$$\left|\mathbf{F}^\alpha[s]\right|^2 = \mathbf{RAD}_{(\psi=\alpha\pi/2)}\left\{\mathbf{W}[s]\right\}. \tag{17}$$

Оператор преобразования Радона в соответствии с трактовкой его процедуры может быть связан с оператором вращения $\mathbf{R}$ соотношением (18)

$$\mathbf{RAD}_{(\psi=\alpha)}\left\{\mathbf{W}[s](t,\nu)\right\} = \int \mathbf{R}_{-\alpha}\left\{\mathbf{W}[s](t,\nu)\right\}\mathrm{d}\nu, \tag{18}$$

где операторы **RAD** и **R** действуют на распределение Вигнера—Вилле (сигнала) в точке (t, ν).

Соотношения (17) и (18) отражают обобщенные свойства распределения Вигнера—Вилле, которые получены при его анализе совместно с оператором ВПФ, и операторами вращения, и Радона. Еще одно обобщение получается, если дополнительно ввести так называемый оператор среза $\mathbf{S}_\alpha$. Действие этого оператора на время-частотное распределение (или любую другую функцию) таково, что результатом являются значения ВЧР на оси, составляющей угол α с осью времени в плоскости время—частота, т. е. в координатной системе (t, ν). Кроме того, результат применения $\mathbf{S}_\alpha$ является одномерной функцией, т. к. две переменные ВЧР теперь принадлежат одной прямой. (Заметим, что после интегрирования оператор среза дает оператор Радона, и в этом их сходство и различие).

Понятие оператора среза позволяет представить еще одно обобщенное свойство ВЧП Вигнера—Вилле, которое объединяет это ВЧП с операторами среза, Радона, ПФ и двумерным ПФ ($\mathbf{F}_2$). Это свойство выражается соотношением (16)[10]

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{RAD}_{(\psi=\alpha)}\cdot\mathbf{W}[s] = \mathbf{S}_\alpha\cdot\mathbf{F}_2\cdot\mathbf{W}[s]. \tag{16}$$

ДИСКРЕТНОЕ ВПФ

Дискретные сигнал ($\{s_i\}_{i=0,1,\dots,N-1}$) и его N-точечное ПФ ($\{S_k\}_{k=0,1,\dots,N-1}$) связаны соотношениями [19]:

$$S_k = \sum_{i=0}^{N-1} s_i w^{ki}; \quad s_i = \sum_{k=0}^{N-1} S_k w^{-ki}, \tag{20}$$

где $w^{ki} = (1/\sqrt{N})\exp(-2\pi jki/N)$.

В операторной форме (в нашем дискретном случае оператор — это матрица) соотношения (20) представляются в виде (21):

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s}; \qquad \mathbf{s} = \mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{S}, \tag{21}$$

где $\mathbf{S} = [S_0, S_1, \dots, S_{N-1}]^\mathrm{T}$ и $\mathbf{s} = [s_0, s_1, \dots, s_{N-1}]^\mathrm{T}$ — векторы; оператор-матрица $\mathbf{F}$ имеет в качестве своих

---

9) Преобразование Радона, аналитическая форма которого введена в математике достаточно давно (как и ВПФ), только сравнительно недавно стало использоваться в томографии [18], а в самое последнее время находит применение в методах обработки изображений.

10) Упомянем еще одно обобщенное свойство. Форма его использует дополнительное понятие ВЧП $\mathbf{A}$, дуального относительно ВЧП Вигнера—Вилле: $\mathbf{A}(\nu,t) = \int s(\tau + t/2)s^*(\tau - t/2)e^{-2\pi j\nu\tau}\,\mathrm{d}\tau$. Обобщенное свойство выражается соотношением: $\mathbf{F}\cdot\left|\mathbf{F}^\alpha[s]\right|^2 = \mathbf{S}_{\alpha(\pi/2)}\left[\mathbf{A}(\nu,-t)\right]$. Это свойство является двойственным по отношению к свойству (17).

элементов $\{F_{ik} = w^{(i-1)(k-1)}\}_{i,k=0,1,\ldots,N-1}$, а оператор $\mathbf{F}$ представляет ВПФ $\mathbf{F}^{(\varphi=1)} = \mathbf{F}^{(\alpha=\pi/2)}$.

При этом $\mathbf{F}^{(\alpha=2\pi)} = \mathbf{F}^{(\varphi=2)}\mathbf{I}$, $\mathbf{I}$ — единичная матрица и выполняется соотношение (22), выражающее ортонормальность между строками (и между столбцами) матрицы $\mathbf{F}$ и ее комплексно сопряженной $\mathbf{F}^*$:

$$\sum_{i=0}^{N-1} w^{ik} w^{-il} = \delta_{kl} \quad (k,l = 1,2,\ldots,N-1). \tag{22}$$

Уравнение, определяющее собственные значения и собственные функции оператора ВПФ (проанализированное выше для традиционного ПФ), имеет вид $\mathbf{Fs} = \lambda\mathbf{s}$, и поскольку $\mathbf{F}^{\varphi=2} = \mathbf{I}$, то $\lambda^4 = 1$ и, следовательно, $\lambda_n = \exp(-jn\pi/2) = j^{-n}$ при любых целых значениях n.

Для получения собственных значений и собственных функций матрицы (оператора) дискретного ВПФ (Д_ВПФ) для нецелых значений углового параметра φ удобно воспользоваться представлением Дикинсона (Dickinson [13]) для $\mathbf{F}^{\varphi}$ в виде суммы $\mathbf{F}^{(\varphi=k)}$, т. е. суммы матриц Д_ВПФ с целыми значениями нормированного (или приведенного) углового параметра $\varphi = \alpha/(\pi/2)$:

$$\begin{gathered}\mathbf{F}^{(\varphi)} = \sum_{k=0}^{3} \mathbf{F}^k p_k(\varphi), \\ p_k(\varphi) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} \exp[ji(\varphi - k(\pi/2)].\end{gathered} \tag{23}$$

Представление (23)[11)] позволяет показать, что собственные функции у оператора Д_ВПФ такие же, как у ПФ, а собственные значения являются φ-степенями от соответствующих собственных значений ПФ. Таким образом, если выполняется соотношение $\mathbf{F}^{\varphi=1}\mathbf{s}_n = \lambda_n\mathbf{s}_n$ для целых n, то оно также выполняется и для Д_ВПФ при нецелых значениях нормированного углового параметра: $\mathbf{F}^{\varphi}\,\mathbf{s}_n = \lambda_n{}^{\varphi}\mathbf{s}_n$, или $\mathbf{F}^{\alpha/(2\pi)}\,\mathbf{s}_n = \lambda_n{}^{\alpha/(2\pi)}\mathbf{s}_n$.

Любой дискретный сигнал (в виде вектора $\mathbf{s}$) может быть представлен разложением по ортогональным собственным векторам Д_ПФ: $\mathbf{s} = \sum_{n=1}^{N} A_n\mathbf{s}_n$, где $A_n = \mathbf{s}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_n$ — коэффициенты разложения. Аналогичным образом оператор Д_ВПФ вектора $\mathbf{s}$ — дискретизованного сигнала представляется разложением

$$\mathbf{F}^{\alpha}\,\mathbf{s} = \sum_{n=1}^{N} A_n \lambda_n{}^{\alpha}\mathbf{s}_n. \tag{24}$$

11) Выражение (23) справедливо для диапазона $0 < \alpha < \pi/2$. Для других значений α применяется свойство аддитивности ВПФ относительно углового параметра: $\mathbf{F}^{\alpha+1} = \mathbf{F}\,\mathbf{F}^{\alpha}$.

ВЗАИМОСВЯЗЬ ПРОЦЕДУР СВЕРТКИ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ В ОБЛАСТИ ВПФ С ВЧР ВИГНЕРА—ВИЛЛЕ

До анализа особенностей применения мультиплексирования и фильтрации в области ВПФ в этом разделе будет рассмотрен ряд соотношений, которые связывают процедуру свертки и произведение двух сигналов (в обычном виде и в области α-ВПФ[12)]) с время-частотным распределением Вигнера—Вилле (ВЧР_ВВ) и с применением оператора ВПФ к результату этих операций [20, 21]. При этом будет применяться сокращенная форма записи для свертки и произведения сигналов в области ВПФ, которая ниже показана в правых частях выражений (25) и (26).

Свертку сигнала с импульсной передаточной функцией (ИПФ) фильтра или с ИПФ управляющего звена удобно анализировать на примере операторного описания свертки сигнала s и ИПФ h (ИПФ h в дальнейшем для симметрии будем условно также называть сигналом). Кроме того, для отличия от традиционной процедуры свертки $s*h$ свертка сигналов (функций) s и h в области α-ВПФ, т. е. сигналов s_α и h_α, будет далее обозначаться в виде $g_\alpha = s\overset{\alpha}{*}h$. Таким образом, запись операции свертки (с явным указанием принадлежности сворачиваемых компонент (s и h) к области ВПФ) будет заменяться более компактной формой в соответствии с соотношением (25):

$$\begin{aligned} g_\alpha(t_\alpha) &= \mathbf{F}^{\alpha}[g] = \mathbf{F}^{\alpha}[s] * \mathbf{F}^{\alpha}[h] = \\ &= s_\alpha(t_\alpha) * h_\alpha(t_\alpha) \;\Rightarrow\; g_\alpha = s\overset{\alpha}{*}h. \end{aligned} \tag{25}$$

При $\alpha = 0$ эта операция переходит в обычную свертку. При $\alpha = \pi/2$ ($\mathbf{F}^{(\alpha=\pi/2)}$ переходит в операцию ПФ — $\mathbf{F}$) она переходит в свертку ПФ от сворачиваемых компонент $\mathbf{F}[g] = \mathbf{F}[s] * \mathbf{F}[h]$, которая эквивалентна равенству $g = s\cdot h$; следовательно, эта операция свертки равноценна произведению сворачиваемых сигналов. Свертка в области ВПФ с $\alpha = \pi/4$ является чем-то промежуточным между обычной сверткой и произведением.

Точно так же (как для свертки) удобно ввести компактную форму представления произведения двух сигналов в области ВПФ. Смысл такой формы показывает выражение (26), построенное по аналогии с (25):

$$\begin{aligned} g_\alpha(t_\alpha) &= \mathbf{F}^{\alpha}[g] = \mathbf{F}^{\alpha}[s] \times \mathbf{F}^{\alpha}[h] = \\ &= s_\alpha(t_\alpha)\cdot h_\alpha(t_\alpha) \;\Rightarrow\; g_\alpha = s\overset{\alpha}{\times}h. \end{aligned} \tag{26}$$

12) Ниже ради краткости будет использоваться сокращение α-ВПФ вместо полного названия "ВПФ со значением углового параметра α".

Как указано выше, для свертки и произведения сигналов в области ВПФ далее будет применяться сокращенная форма записи, показанная в правой части выражений (25) и (26), а форма взаимосвязи процедур свертки и произведения сигналов в области ВПФ с ВЧР_ВВ и применением оператора ПФ к результатам этих процедур будет представлена с использованием символа импликации[13] $\Rightarrow$.

- Операция свертки двух сигналов (функций) во временнóй области соответствует свертке в области ВЧР Вигнера по времени:

$$g(t)=s(t)*h(t)\Rightarrow \mathbf{W}_g(t,\nu)=$$
$$=\int \mathbf{W}_s(t',\nu)\,\mathbf{W}_h(t-t',\nu)\,\mathrm{d}t'.$$

- Произведению двух сигналов $g(t)=$ $=s(t)h(t)$ соответствует свертка ВЧР Вигнера—Вилле (ВЧР_ВВ) по частоте:

$$g(t)=s(t)h(t)\ \text{(т.е. } \mathbf{F}[g]=\mathbf{F}[s]*\mathbf{F}[h])\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbf{W}_g(t,\nu)=\int \mathbf{W}_s(t,\nu')\,\mathbf{W}_h(t',\nu-\nu')\,\mathrm{d}\nu'.$$

Сходное соотношение процедур имеется при осуществлении свертки α-ВПФ сигналов и произведения ВПФ сигналов:

- Свертке сигналов в области α-ВПФ соответствует свертка ВЧР_ВВ (этих сигналов) по направлению t_α:

$$g_\alpha=s\overset{\alpha}{*}h\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbf{W}_{g_\alpha}(t_\alpha,\nu_\alpha)=\int \mathbf{W}_{s_\alpha}(t'_\alpha,\nu_\alpha)\,\mathbf{W}_{h_\alpha}(t_\alpha-t'_\alpha,\nu_\alpha)\,\mathrm{d}t'_\alpha.$$

- Произведению сигналов в области α-ВПФ соответствует свертка ВЧР_ВВ (этих сигналов) по направлению ν_α:

$$g_\alpha=s\overset{\alpha}{\times}h\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbf{W}_{g_\alpha}(t_\alpha,\nu_\alpha)=\int \mathbf{W}_{s_\alpha}(t_\alpha,\nu'_\alpha)\,\mathbf{W}_{h_\alpha}(t_\alpha,\nu_\alpha-\nu'_\alpha)\,\mathrm{d}\nu'_\alpha.$$

Свойства, отражающие взаимосвязь свертки и произведения сигналов в области ВПФ, имеют более компактную форму выражения при использовании нормированного значения углового параметра α, т. е. при формулировании этих свойств в терминах параметра $\varphi=\alpha/(\pi/2)$. Умножение двух функций s и h в области φ-ВПФ, т. е. в области ВПФ с параметром $\alpha=\varphi(\pi/2)$, имеет вид (27) и может быть обозначено как $g_\varphi=s\overset{\varphi}{\times}h$:

$$g_\varphi(t_\varphi)=\mathbf{F}^\varphi[g]=\mathbf{F}^\varphi[s]\times\mathbf{F}^\varphi[h]=$$
$$=s_\varphi(t_\varphi)h_\varphi(t_\varphi)\Rightarrow g_\varphi=s\overset{\varphi}{\times}h. \qquad (27)$$

Тогда выполняются следующие соотношения, связывающие применение ВПФ к свертке и произведению сигналов (в ВПФ области) с изменением величины нормированного углового параметра:

- $\mathbf{F}^{\varphi+1}\left[s\overset{\varphi}{\times}h\right]=\mathbf{F}^{\varphi+1}[s]*\mathbf{F}^{\varphi+1}[h]=\mathbf{F}^{\varphi+1}\left[s\overset{\varphi}{\times}h\right]$;
- $\mathbf{F}^{\varphi+1}\left[s\overset{\varphi}{*}h\right]=\mathbf{F}^{\varphi+1}[s]\times\mathbf{F}^{\varphi+1}[h]=\mathbf{F}^{\varphi+1}\left[s\overset{\varphi+1}{*}h\right]$;
- два взаимно дуальные соотношения, следующие из двух приведенных выше:

$$s\overset{\varphi}{\times}h=s\overset{\varphi+1}{*}h=s\overset{\varphi-1}{*}h;\qquad s\overset{\varphi}{*}h=s\overset{\varphi+1}{\times}h=s\overset{\varphi-1}{\times}h.$$

Это означает, что свертка с области φ-ВПФ соответствует умножению в области (φ +1)-ВПФ или в области (φ –1)-ВПФ. Таким же образом умножение в области φ-ВПФ соответствует свертке в области (φ +1)-ВПФ или в области (φ –1)-ВПФ.

ОГРАНИЧЕНИЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВПФ

В ИИС ограниченность области определения сигнала (равенство его нулю вне конечной области), называемое компактностью, реализуется почти всегда. Однако для ВПФ и ВЧР_ВВ это не так, но компактность в этом может быть получена введением дополнительного множителя в форме прямоугольного импульса, или так называемого *прямоугольного окна* (ПО). В области α-ВПФ, ПО с переменной-аргументом t_α, шириной Δt_α и началом $t_{\alpha;0}$ имеет вид: $\text{ПО}\left(\dfrac{t_\alpha-t_{\alpha;0}}{\Delta t_\alpha}\right)$. Так что для получения свойства компактности ВПФ или ВЧР умножается на ПО:

$$g_\alpha(t_\alpha)=\left\{\text{ПО}\left(\frac{t_\alpha-t_{\alpha;0}}{\Delta t_\alpha}\right)\right\}\times s_\alpha(t_\alpha).$$

В частности, придание компактности в области $\alpha=\pi/2$ означает низкочастотную фильтрацию, поскольку вводится ПО на частотной оси.

Получение компактности сигнала в некоторой области α-ВПФ связано с умножением его на ПО. Это соответствует свертке ВЧР_ВВ от $s(t_\alpha)$ с ВЧР_ВВ от ПО, и эта свертка должна осущест-

---

[13] Символ импликации $\Rightarrow$ служит для указания того, что из левого утверждения или соотношения следует правое. (Так же символ $\Leftrightarrow$ для указания того, что оба утверждения эквивалентны, т. е. из первого следует второе и, наоборот, из второго — первое). Кроме того, чтобы избежать перегрузки формул, ВЧР Вигнера—Вилле сигнала $s(t)$ будет обозначаться как $\mathbf{W}_s(t,\nu)$, или просто как $\mathbf{W}_s$.

вляться вдоль направления $t_{\alpha+\pi/2}$, т. е. свертка по ν_α. Поэтому следует выполнить следующие преобразования.

- Определяется ВЧР_ВВ для ПО:

$$\mathbf{W}_{\text{ПО}}(t_\alpha,\nu_\alpha)=\int \text{ПО}\left(\frac{t_\alpha+t'/2-t_{\alpha;0}}{\Delta t_\alpha}\right)\times$$
$$\times\text{ПО}\left(\frac{t_\alpha-t'/2-t_{\alpha;0}}{\Delta t_\alpha}\right)\times\exp(-2\pi jt'\nu_\alpha)\,\mathrm{d}t=$$
$$=\int \text{ПО}\left\{\frac{t'}{2\Delta t_\alpha\left[1-|2(t_\alpha-t_{\alpha;0})/\Delta t_\alpha|\right]}\right\}\times$$
$$\times\exp(-2\pi jt'\nu_\alpha)\,\mathrm{d}t'=$$
$$=2\Delta t_\alpha\left[1-|2(t_\alpha-t_{\alpha;0})/\Delta t_\alpha\;\right]\times$$
$$\times\text{sinc}\left\{2\Delta t_\alpha\left[1-|2(t_\alpha-t_{\alpha;0})/\Delta t_\alpha|\right]\nu_\alpha\right\}. \quad (28)$$

- $\mathbf{W}_{\text{ПО}}(t_\alpha,\nu_\alpha)$ выражается по (28) только при $\text{ПО}\big((t_\alpha-t_{\alpha;0})/\Delta t_\alpha\big)=1$, и $\mathbf{W}_{\text{ПО}}(t_\alpha,\nu_\alpha)=0$ — при $\text{ПО}\big((t_\alpha-t_{\alpha;0})/\Delta t_\alpha\big)=0$. Замечаем, что ВЧР_ВВ является ненулевым только вдоль коридора, определяемого функцией ПО. Следовательно, ограничение области определения α-ВПФ сигнала (получение компактности средствами ПО) по t_α обеспечивает компактность ВЧР_ВВ в пределах коридора, который перпендикулярен оси t_α, т. е. компактность ВЧР_ВВ по переменной ν_α.
- Выполнение свертки $\mathbf{W}_{\text{ПО}}(t_\alpha,\nu_\alpha)$ с ВЧР_ВВ $\mathbf{W}_s(t_\alpha,\nu_\alpha)$ (сигнала в области α-ВПФ) по ν_α приводит в результате к уширению $\mathbf{W}_s(t_\alpha,\nu_\alpha)$ по направлению ν_α. Это уширение сравнимо по величине с шириной $\mathbf{W}_{\text{ПО}}(t_\alpha,\nu_\alpha)$ по ν_α. Огибающая для $\mathbf{W}_{\text{ПО}}(t_\alpha,\nu_\alpha)$ как функция от ν_α (при данном значении t_α) равна $1/(\pi\,\nu_\alpha)$ и фактически не зависит от t_α. Ширина основной части этого распределения $\mathbf{W}_{\text{ПО}}(t_\alpha,\nu_\alpha)$ в направлении ν_α равна $\sim 1/\Delta t_\alpha$ (рис. 1).
- Из-за резких перепадов у прямоугольного окна (ПО) уширение ВЧР_ВВ по переменной ν_α, т. е. в направлении, перпендикулярном к t_α, получается немного большим, чем возможная минимальная ширина ВЧР_ВВ по метрологической оценке в рамках "принципа неопределенности" [22]. Однако при использовании (для получения компактности) сглаживающего окна большей гладкости можно снизить уширение до минимальной величины, диктуемой соотношением принципа время-частотной неопределенности.

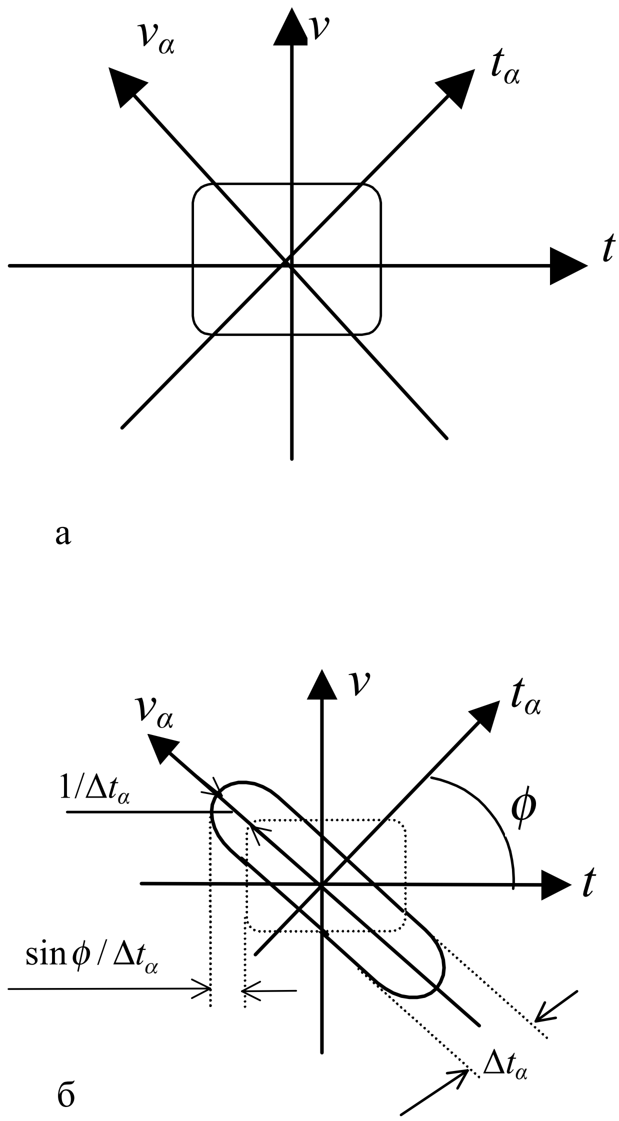

Рис. 1. Время-частотное распределение Вигнера—Вилле (а) и характер его изменения при получении компактности по оси t_α за счет введения прямоугольного окна (б). Здесь горизонтальное направление вторичного уширения ВЧР_ВВ ($\sin\phi/\Delta t_\alpha$) находится под углом ϕ к ν_α-направлению основного уширения $1/\Delta t_\alpha$, т. е. $\Delta\phi$ в данном случае оказалось равным величине самого угла ϕ

Таким образом, получение компактности (ограничения области определения) ВЧР_ВВ в направлении t_α (любого α-ВПФ) ведет к уширению этого распределения в ортогональном направлении (ν_α) до величины $\sim 1/\Delta t_\alpha$. Это приводит также к уширению $\approx|\sin\Delta\phi|/\Delta t_\alpha$ в любом другом направлении в области ВПФ, отличающемся на угол $\Delta\phi$.

Отмеченные закономерности уширения ВЧР_ВВ в направлении, ортогональном к тому, по которому получают компактность ВЧР введением ПО, отражают модификацию общего принципа неопределенности. Этот принцип свойственен всем время-частотным распределениям (в том числе Вигнера и вейвлет-представлению сигнала) безотносительно к вращению (t, v)-плоскости. Согласно этому принципу вычисленное значение ВЧР_ВВ не может быть локализовано в области, меньшей чем $\Delta t_\alpha \Delta v_\alpha \sim 1$; это предельно возможная разрешающая способность деталей ВЧР.[14)]

ФИЛЬТРАЦИЯ В ОБЛАСТИ ВРАЩАЕМОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ [20]

При работе в области ПФ приходится ограничиваться линейными инвариантными к сдвигу (ЛИС) операциями, которые могут быть выражены в форме обычной свертки (т. е. в "нулевой области" — в области ВПФ с нулевым угловым параметром). Свертка в области ВПФ не относится к ЛИС-операциям, и в отдельных случаях это обеспечивает большие возможности фильтрации и мультиплексирования, когда их процедуры реализуются в области ВПФ.

В терминах ВПФ временнáя и частотная оси время-частотной плоскости трактуются как области определения сигнала при $\alpha = 0$ и при $\alpha = \pi/2$. Тогда полное разделение сигнала от шума частотной фильтрацией методом ПФ, т. е. при $\alpha = \pi/2$, возможно только в том случае, если спектры сигнала и шума не накладываются. Достаточно простое разделение сигнала и шума при их несовпадении по времени может трактоваться как фильтрация при $\alpha = 0$. Однако, если ВЧР сигнала и шума занимают промежуточное положение (рис. 2), то их разделение возможно только фильтрацией в области α-ВПФ $\alpha = \pi/4$, а частотное разделение (методом ПФ) или временнóе разделение неэффективно. В другом более сложном случае (на рис. 3 он представлен схематично) выделение сигнала из шума не может быть достигнуто ни частотным методом ПФ ни временным разделением, но может быть эффективно выполнено поочередной фильтрацией в области ВПФ с $\alpha = 0$, $\alpha = \pi/4$ и $\alpha = \pi/2$.

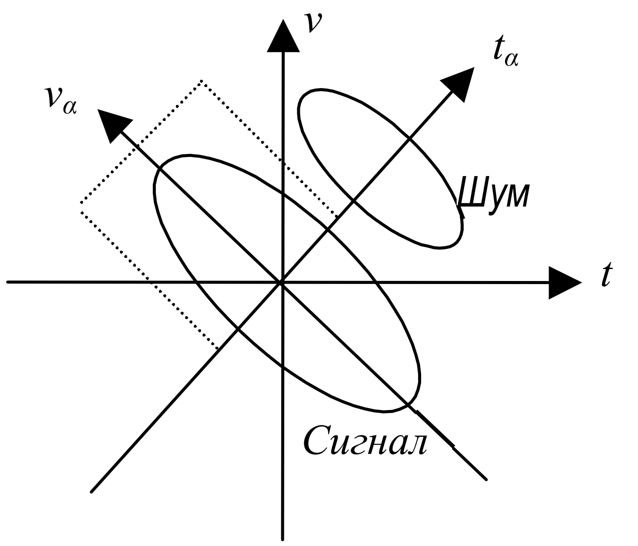

Рис. 2. Разделение сигнала и шума фильтрацией в области α-ВПФ

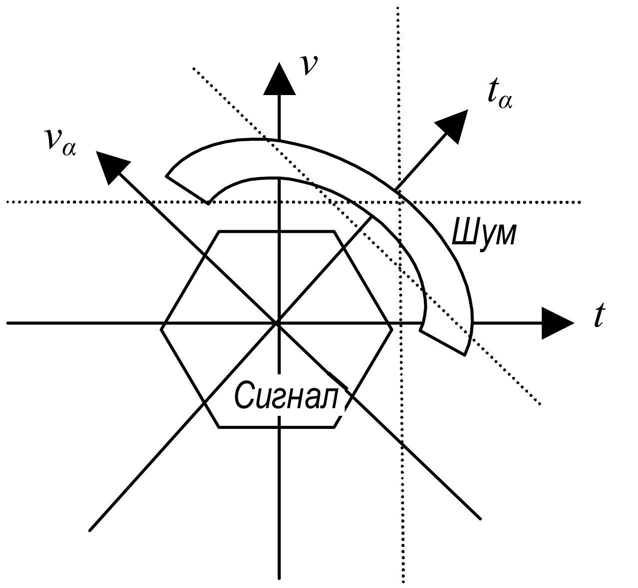

Рис. 3. Разделение сигнала и шума методом повторной фильтрацией в области α-ВПФ при $\alpha = 0$, $\alpha = \pi/4$ и $\alpha = \pi/2$

Преимущества фильтрации в области ВПФ (ВПФ-фильтрации) шире, чем показано на рассмотренных примерах с различной конфигурацией ВЧР_ВВ сигнала и шума. Даже в случае частичного наложения этих распределений при ВПФ-фильтрации получается восстановление сигнала с близкой к минимальной среднеквадратичной ошибкой.

---

14) В частности, ниже относительно мультиплексирования и фильтрации в области ВПФ и представления набора сигналов их ВЧР-распределениями следует иметь в виду, что контуры ВЧР ограничивают почти 100%-ю энергию сигнала и в действительности слегка размыты в пределах ячейки неопределенности.

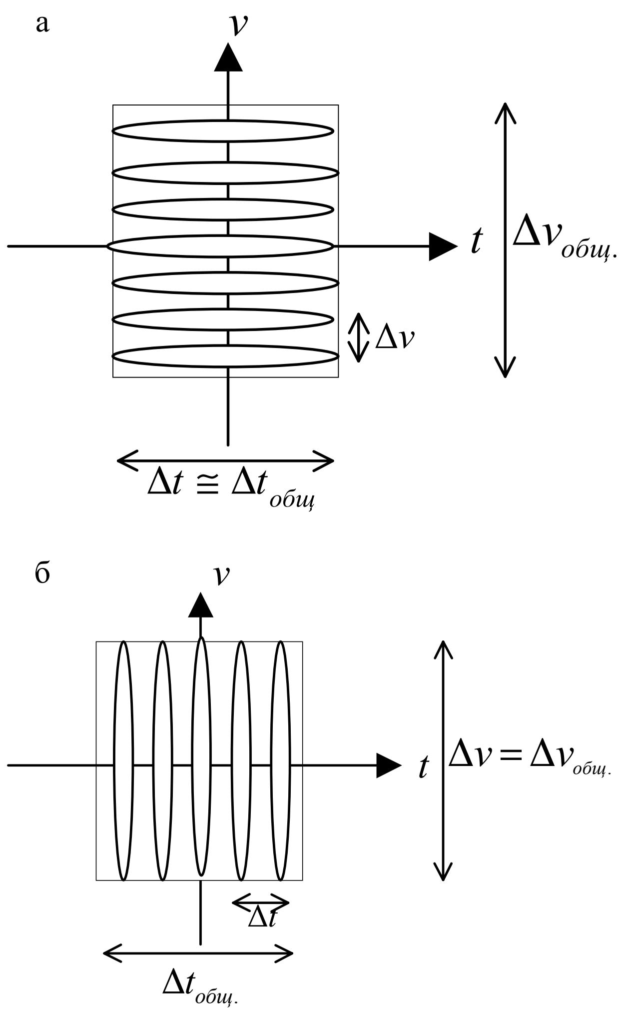

Рис. 4. Мультиплексирование в частотной (а) и временнóй (б) областях. Сигналы показаны своими время-частотными распределениями

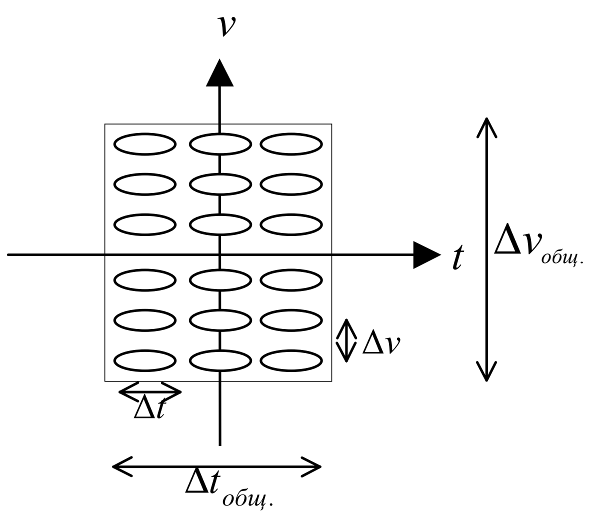

Рис. 5. Совместное мультиплексирование во временнóй и частотной областях. Сигналы показаны своими время-частотными распределениями (ВЧР условно представлены овалами)

МУЛЬТИПЛЕКСИРОВАНИЕ В ОБЛАСТИ ВПФ

Процедура мультиплексирования в частотной или временнóй области (при передаче в канал) состоит в объединении в пакет группы сигналов, которая компактна в этой области. Пакеты сдвигаются друг относительно друга так, чтобы они не накладывались и легко восстанавливались после приема; передача пакета может сопровождаться модуляцией содержащихся в нем сигналов. Отражение процедуры мультиплексирования в частотной и временнóй областях показано на рис. 4 для двух видов конфигурации группы сигналов, представленных своими ВЧР_ВВ.

В первом случае предполагается, что сигналы имеют общую длительность $\Delta t_{общ.}$, а их частотный диапазон $\Delta\nu$ значительно меньше, чем общий диапазон $\Delta\nu_{общ.}$ Во втором случае — частотная полоса сигналов равна $\Delta\nu_{общ.}$, а их длительность Δt значительно меньше времени $\Delta t_{общ.}$ формируемого пакета, который передается в канал.

В самом благоприятном случае у набора сигналов, подлежащих передаче, ВЧР могут быть таковы, что удовлетворяются оба описанные условия, т. е. $\Delta t << \Delta t_{общ.}$ и $\Delta\nu << \Delta\nu_{общ.}$. Такой вариант схематично показан на рис. 5. Тогда возможно совместное временнóе и частотное мультиплексирование: производится временной сдвиг ВЧР сигналов (путем свертки с δ-функцией) и частотный сдвиг ВЧР сигналов (умножением их на гармонический множитель $e^{j2\pi\nu t}$).

Практически в более часто реализуемых ситуациях ВЧР имеют промежуточную конфигурацию с частичным наложением сигналов и по времени, и по частоте (рис. 6, а). В этом случае более эффективным является мультиплексирование в области ВПФ (рис. 6, б). Угловой параметр α-ВПФ выбирается из соображений симметричного расположения осей $0t_\alpha$ и $0\nu_\alpha$ относительно ориентации ВЧР набора сигналов, подлежащих мультиплексированию и передаче в канал. В процессе мультиплексирования по этой схеме для упаковки сигналов следует выполнить для них переход в область α-ВПФ с подходящим значением углового параметра. В этой области мультиплексирование осуществляется способом, описанном в пояснении к рис. 5.

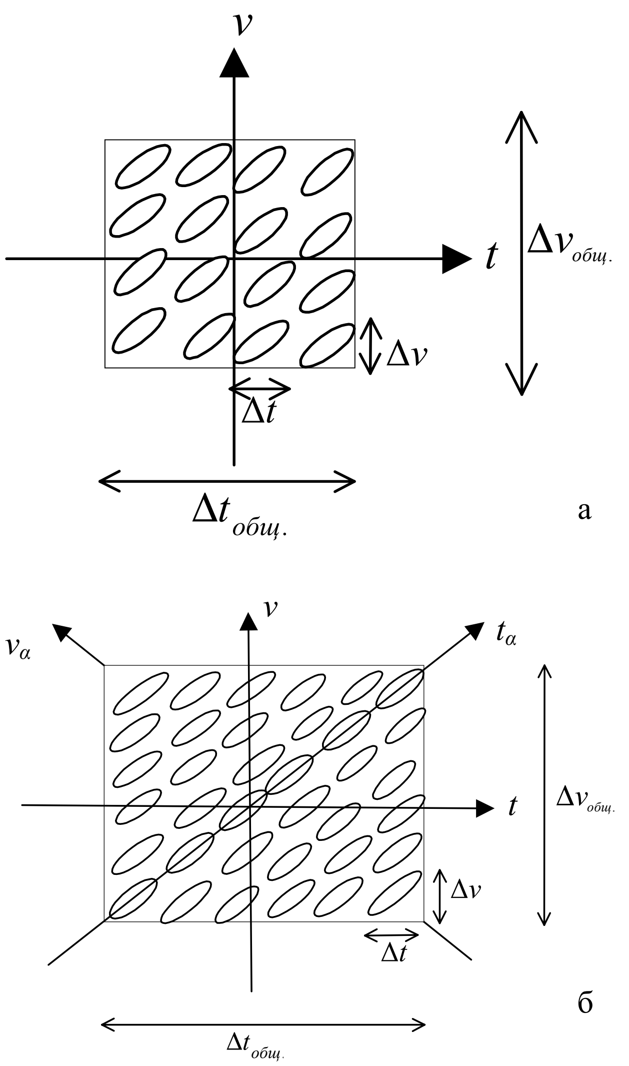

Рис. 6. Неэффективность мультиплексирования сигналов с наложением их ВЧР_ВВ (а) и более эффективное мультиплексирование в области ВПФ (б)

Процедура мультиплексирования с использованием поворота время-частотной плоскости может быть обобщена [20] на сигналы, у которых ВЧР не указано. При этом достаточно выполнить сдвиг ВЧР сигналов в подходящем направлении (в области преобразования Вигнера) и сделать это так, чтобы достичь наиболее эффективной упаковки. Как отмечено выше, сдвиг в направлении t включат умножение на δ-функцию; сдвиг по v включает умножение на гармонический множитель. Сдвиг области ВПФ включает те же операции, но выполнение их теперь определяется правилами метода ВПФ[15)].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проанализирована трактовка обобщенной модификации преобразования Фурье (ПФ) с использованием операторной формы и концепции собственных функций. Обобщенная модификация ПФ процедурно связана с вращением время-частотной плоскости, называется вращаемым ПФ (ВПФ) и реализуется в новых разновидностях рядов Фурье и ПФ дискретного времени. Рассмотрены соотношения ВПФ с время-частотными преобразованиями, с сигналами с быстро изменяющейся частотой (СБИЧ), возможности ВПФ при мультиплексировании и фильтрации нестационарных сигналов в ИИС.

- Показана взаимосвязь ВПФ с время-частотными преобразованиями общего вида, с преобразованием Радона и с сигналами типа СБИЧ. Проанализирована специфика сигналов (в области их частотно-временно́й структуры), при которой методы ВПФ могут оказаться более эффективными сравнительно с традиционными способами мультиплексирования и частотной фильтрации.
- Собственными функциями оператора ВПФ с угловым параметром α (оператора α-ВПФ) является ортонормированный набор $\{\tilde{\Psi}_n(t)\}_{n=1,2,3,...}$ функций Эрмита-Гаусса

$$\tilde{\Psi}_n(t) = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{2\pi}\, t\right) \exp\left(-\pi t^2\right),$$

а соответствующий набор собственных значений — $\{\lambda_n = (j)^{-\alpha n}\}_{n=1,2,3,...}$.

- ВПФ имеет два вида интегрального представления с ядром: одно представление использует фактическое значение угла α вращения время-частотной плоскости, второе использует приведенное значение углового параметра $\varphi = \alpha/(\pi/2)$.

---

15) Сдвиг ВЧР_ВВ сигнала в направлении t_α может быть реализован также без перехода в область α-ВПФ с помощью двух этапов. Сначала делается сдвиг по времени (т.е. по t_0) путем свертки с δ-функцией и затем сдвиг по частоте (т.е. по $v = t_{\pi/2}$) путем умножения на гармонический множитель:

$$[s_0(t_0) * \delta(t_0 - t_{0(сдвига)})] \times \exp(j2\pi\, v_{0(сдвига)} t_0) =$$
$$= s[t_0 - t_{0(сдвига)}]\, \exp(j2\pi\, v_{0(сдвига)} t_0)\,.$$

Преобразование в этой форме эквивалентно сдвигу сигнала в области α-ВПФ: $s_\alpha(t_\alpha) * \delta(t_\alpha - t_{0(сдвига)}) = s_\alpha(t_\alpha - t_{0(сдвига)})$, и фазовый множитель не появится в распределениях ВЧП_ВВ.

▪ Результат время-частотного преобразования Вигнера—Вилле (ВЧП_ВВ) трактуется как распределение энергии в координатах "время и частота". Применение ВЧП_ВВ к α-ВПФ сигнала эквивалентно вращению ВЧП самого сигнала на угол α (аналогичным свойством обладают и другие ВЧП класса Коэна при условии инвариантности к повороту формирующего ядра преобразования). Дополнительные свойства ВПФ отражены в следующих двух пунктах:

свертка двух сигналов в области ВПФ соответствует свертке (по временнóй переменной) двух ВЧР_ВВ самих сигналов;

умножение двух сигналов (или свертка их ПФ) соответствует свертке (по частотной переменной) двух ВЧР_ВВ самих сигналов.

▪ Еще одно свойство ВПФ связывает его одновременно с ВЧП_ВВ и с преобразованием Радона ($\mathbf{RAD}_\psi$). Результат применения оператора Радона к ВЧП_ВВ сигнала эквивалентен квадрату модуля ВПФ этого сигнала для приведенного значения углового параметра.

▪ Показана схема введения ограничения области определения ВПФ и области ВЧР_ВВ с поворотом время-частотной плоскости. Простейшая форма ограничения — это использование прямоугольного окна. Сокращение области определения по одной оси ведет к ее уширению по другой оси.

▪ Для ряда ситуаций мультиплексирование и фильтрация осуществляются более эффективно в области ВПФ, чем позволяет выполнение этих процедур традиционными методами — временным или частотным. Это показано путем представления динамики частотной структуры сигнала и шума в области ВЧП_ВВ и вращения время-частотной плоскости.

▪ Отмечена возможность применения ВПФ к двумерным сигналам (типа изображения) и реализации такого ВПФ оптическими методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Namias V.* The fractional Fourier transform and its application to quantum mechanics // Journal of Institute of Mathematical Applications. 1980. V. 25. P. 241–265.
2. *McBride A.C., Kerr F.H.* On Namias' fractional Fourier transforms // IMA Journal of Applied Mathematics. 1987. V. 39. P. 159–175.
3. *Mendlovic D., Ozactas H.M.* Fractional Fourier transformations and their optical applications // Journal of Optical Society of America A. 1993. V. 10. P. 1875–1881
4. *Ozactas H.M., Aytur O.* Fractional Fourier domain // Signal Processing. 1995. V. 46. P. 119–124.
5. *Lohmann A.W.* Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform // Journal of Optic Society of America. 1993. V. 10. P. 2181–2186.
6. *Меркушева А.В., Малыхина Г.Ф.* Методы и схемы анализа спектра сигналов на основе обобщенной модификации преобразования Фурье // Научное приборостроение. 2006. Т. 16, № 4. С. 97–105.
7. *Меркушева А.В.* Аналитические формы обработки сигналов в информационно-измерительных системах на основе обобщенной модификации преобразования Фурье // Научное приборостроение. 2005. Т. 15, № 4. С. 3–17.
8. *Lohman A.W., Mendlovic D.* Self-Fourier objects and other self-transform objects // Journal of Optic Society of America. 1992. V. 9. P. 2009–2012.
9. *Cincott G., Gori F., Santarsiero M.* Generalized self-Fourier functions // Journal of Physics A. 1992. V. 25. P. 1191–1194.
10. *Wiener N.* Hermit polynomials and Fourier analysis // Journal of Mathematical Physics MIT. 1929. V. 8. P. 70–73.
11. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 384 с.
12. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 724 с.
13. *Dickinson B.W., Steiglitz K.* Eigenvectors and functions of the discrete Fourier transform // IEEE Transactions on Acoustic, Speech and Signal Processing. 1982. ASSP-30. P. 25–31.
14. *Hlawatsch F., Boudreaux-Bartels G.F.* Linear and quadratic time-frequency signal representation // IEEE Signal Processing Magazine. 1992. V. 9, N 4. P. 21–67.
15. *Loughlin P.* Non negative time-frequency representation // IEEE Transactions on Signal Processing. 1994. V. 42, N 10. P. 2697–2701.
16. *Guanaurd G.C., Strifors H.C.* Signal analysis by means of time-frequency transformation of Wigner type // Proceedings of IEEE. 1996. V. 84, N 9. P. 1231–1247.
17. *Меркушева А.В.* Классы преобразований нестационарного сигнала в информационно-измерительных системах. II. Время-частотные преобразования // Научное приборостроение. 2002. Т. 12, № 2. С. 59–70.
18. *Федоров Г.А., Терещенко С.А.* Вычислительная эмиссионная томография. М.: Энергоатомиздат, 1990. 184 с.
19. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 848 с.
20. *Ozaktas H.M., Barshan B., Mendlovic D., Onural L.* Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to

chirp and wavelet transforms // Journal of Optic Society of America A. 1994. V. 11, N 2. P. 547–557.
21. *Almeida L.B.* The fractional Fourier transform and time-frequency representations // IEEE Transactions on Signal Processing. 1994. V. 42. P. 3084–3091.
22. *Malychina G.F., Mercusheva A.V.* Metrological aspects of non-stationary signal transformation for dynamic spectrum analysis // 10th IMEKO TC7 International Symposium on Advances of Measurement Science, June 30 – July 2, 2004, Saint-Petersburg, Russia. V. 1. P. 212–216.

Санкт-Петербург

Материал поступил в редакцию3.05.2006.

GENERALIZED FOURIER TRANSFORM METHOD FOR TIME-FREQUENCY DISTRIBUTIONS, MULTIPLEXING AND FILTERING OF NON-STATIONARY SIGNALS IN INFORMATION-MEASUREMENT SYSTEMS (IMS)

A. V. Merkusheva, G. F. Malychina

Saint-Petersburg

An extended form of interpretation for Fourier transform (FT) generalized modification in terms of operator form and eigen-functions conception is presented. Generalization types designed for FT are associated with rotation of the time-frequency plane (hence the term "rotated FT" — RFT) and realized in new varieties of Fourier series and discrete time FT. The relations of RFT with time-frequency transforms, with chirp-signals and the possibility of RFT application to multiplexing and filtering non-stationary signals in IMS are considered.