

ОБЗОРЫ

УДК 621.391.266.037.372

© А. В. Меркушева

ВРЕМЯ-ЧАСТОТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ОБОБЩЕННЫМИ МАРГИНАЛАМИ ДЛЯ АНАЛИЗА НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИГНАЛОВ В ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Для анализа нестационарных сигналов в информационно-измерительных системах (ИИС) рассмотрено семейство время-частотных распределений (ВЧР) с обобщенными маргиналами (ОМ), т. е. маргиналами вне временной или частотной областей. За ОМ приняты проекции ВЧР в виде интегралов вдоль одного или нескольких направлений (под разными углами) время-частотной плоскости. Значения ОМ равны квадрату модуля вращаемого преобразования Фурье (ВПФ) сигнала. Дано условие, при выполнении которого ВЧР класса Коэна имеют обобщенные маргиналы. Известные ВЧР класса Коэна (ВЧР Чои—Вильямса, Пейджа) могут быть модифицированы так, чтобы они имели обобщенные маргиналы. При этом с точки зрения представления сигналов эти модификации имеют преимущества перед квадратичными ВЧР, имеющими только обычные маргиналы. ВЧР с ОМ являются более робастными в условиях, когда сигнал ИИС содержит аддитивный шум.

ВВЕДЕНИЕ

В информационно-измерительных и управляющих системах при обработке нестационарных сигналов (в частности, при обработке и анализе речевых сигналов) достаточно широко используются время-частотные преобразования (ВЧП). Существует несколько видов ВЧП. Среди них:

- линейные (кратковременное преобразование Фурье, преобразование Зака (Zak) [1, 2], время-масштабное (вейвлет-) преобразование [3, 4]);
- билинейные преобразования класса Коэна (L. Cohen) [5, 6] (ВЧП Вигнера—Вилле (Wigner, Ville), спектрограмма [7–10], ВЧП Чои—Вильямса (Choi, Williams) [11, 12], Цхао—Атласа—Макса (Zhao, Atlas, Maks) [13] и положительные ВЧП [14]);
- адаптивные ВЧП [15];
- ряды ВЧП [16], а также афинный, гиперболический и степенной классы ВЧП [17].

ВЧП с точки зрения процедур преобразования систематизированы в [10], но в проведенном ниже анализе ВЧП трактуются в значительной мере с точки зрения его результата — распределения интенсивности сигнала на время-частотной плоскости. В связи с этим вместо ВЧП будет использоваться понятие время-частотного распределения (ВЧР), хотя следует иметь в виду, что реализация ВЧР достигается выполнением соответствующего преобразования.

ВЧП класса Коэна различаются видом ядра и свойствами. Для ВЧП важны свойства маргиналов, которыми традиционно называют значения проинтегрированных ВЧП по одной из двух переменных. Интегралы по оси времени и по оси час-

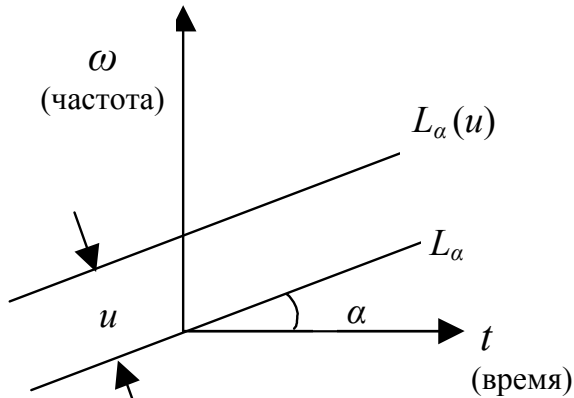
тот (т. е. временной и частотный маргиналы) являются соответственно мощностью сигнала в частотной области (квадратом модуля преобразования Фурье от сигнала) и мощностью сигнала во временной области (квадратом модуля текущего значения сигнала). Выполнение этого логического соответствия для ВЧП класса Коэна с ядром $\varphi(\theta, \tau)$ зависит от свойства этого ядра, которое определяется соотношением [18]

$$\varphi(0, \tau) = \varphi(\theta, 0) = 1$$

для всех вещественных θ и τ .

Известно, что когда имеется сигнал с (почти) линейным изменением частоты (СЛИЧ)¹⁾, ВЧР должно быть сконцентрировано на линиях в частотно-временной плоскости, где сосредоточена основная мощность анализируемого сигнала. К сожалению, это далеко не полный ответ на вопрос о том, можно ли, имея априори некоторую информацию относительно сигнала, использовать ее для рационального выбора ВЧР. Следует отметить лишь, что для СЛИЧ было предложено преобразование Радона—Вигнера [19, 20], в котором преобразование Радона используется в области ВЧР Вигнера—Вилле. В [21, 22] было получено совместное распределение произвольных переменных

¹⁾ СЛИЧ — сигнал с линейно изменяющейся частотой по американской терминологии (часто используемой в тематике по обработке сигналов) называют черп-сигналом (chirp signal) в связи с тем, что звук такого сигнала напоминает чириканье. В расширенном понимании черп-сигнал может иметь полиномиальную (как правило, не выше квадратичной) зависимость изменения мгновенной частоты от времени.



Разметка время-частотной плоскости при определении обобщенных маргиналов

и унитарные преобразования²⁾ времени и частоты.

ВЧР с обобщенными маргиналами упоминалось ранее [16], однако это делалось в совершенно другом контексте, т. е. термин использовался в смысле, отличающемся от анализируемой ниже трактовки время-частотных распределений.

Будем рассматривать ВЧР с обобщенными маргиналами (ВЧР_ОМ), у которых формирование маргиналов отличается от процедуры получения обычных временного и частотного маргиналов. Чтобы понять, что представляют такие обобщенные маргиналы, следует обратиться к вращаемому преобразованию Фурье F_α с углом α [23, 24], которое определяется поворотом время-частотной плоскости³⁾. Когда угол $\alpha = \pi/2$, F_α равно преобразованию Фурье (ПФ) F , т. е. вращаемое преобразование Фурье (ВПФ) с $\alpha = \pi/2$ сигнала являет-

²⁾ Унитарное преобразование является расширением (на случай комплекснозначных матриц) принятого понятия линейного ортогонального преобразования, у которого транспонированная матрица равна ее обратной матрице $A^T = A^{-1}$. Ортогональное преобразование сохраняет ортогональность в системе векторов преобразованного базиса. (В унитарном преобразовании выполняется соотношение $(A^*)^T = A^{-1}$, в котором осуществляется транспонирование комплексно-сопряженной матрицы A).

³⁾ Вращаемое преобразование Фурье (сравнительно новое обобщение традиционного преобразования Фурье с известным алгоритмом БПФ) в американской версии называют частичным преобразованием (Fractional Fourier Transformation). Для ВПФ далее будет использоваться обозначение типа $(F_\alpha s)(u)$, которое соответствует результату применения ВПФ с углом α к сигналу s (как функции времени), взятому при значении u (частотной переменной этого преобразования). Полный анализ ВПФ дан в статье [25].

ся его ПФ. Когда $\alpha = 0$, F_α — преобразование идентичности, т. е. ВПФ с $\alpha = 0$ равно самому сигналу. Теперь определяем следующее свойство обобщенного маргинала. Пусть $P(t, \omega)$ — это ПФ сигнала $s(t)$ и пусть L_α означает прямую линию на время-частотной плоскости, проходящую через начало с углом α (см. рисунок).

Пусть $L_\alpha(u)$ представляет член семейства всех линий параллельных к L_α (это семейство параметризовано величиной u — расстоянием $L_\alpha(u)$ от L_α).

$P(t, \omega)$ называют ВЧП с обобщенными маргиналами, если линейные интегралы от $P(t, \omega)$ вдоль линий $L_{\alpha_k}(u)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) являются квадратами модуля ВПФ с углами $\alpha_k + \pi/2$ ($k = 1, 2, \dots, N$) сигнала s соответственно. Это выражается соотношением

$$\int_{L_{\alpha_k}(u)} P(t, x) dx = \left| (F_{\alpha_k + \pi/2} s)(u) \right|^2, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

Соотношение (1), являющееся отражением свойства ВПР с ОМ, в более упрощенной форме может быть представлено в виде выражения

$$\int_{L_{\alpha_k}} P(t, x) dx = \left| (F_{\alpha_k + \pi/2} s) \right|^2, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Нетрудно проверить, что когда $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi/2$ и $N=2$, то обобщенные маргиналы являются обычными маргиналами. Можно отметить также, что углы α_k могут быть выбраны близкими к углу в представлении СЛИЧ на частотно-временной плоскости.

Рассмотрим ВЧР при ядре $\varphi(\theta, \tau)$ в таком преобразовании Коэна, которое является ВЧР_ОМ, т. е. имеет обобщенные маргиналы. Можно показать, что ВЧП с ядром $\varphi(\theta, \tau)$ в классе преобразований Коэна является ВЧП с обобщенными маргиналами по (1) тогда и только тогда, если ядро $\varphi(\theta, \tau)$ равно единице на линиях, которые перпендикулярны к L_{α_k} , $k = 1, 2, \dots, N$ и проходят через начало. Согласно сформулированному условию наличия у ВЧП обобщенных маргиналов таким свойством обладает преобразование Вигнера—Вилле. Однако это преобразование является единственным из класса Коэна, для которого выполняется условие, определяющее наличие ОМ.

Анализ показывает, что ВЧР_ОМ обладают хорошими свойствами как ВЧР Вигнера—Вилле, так и других билинейных преобразований. Кроме того, ВЧР_ОМ проявляют более высокую устойчивость (робастность) к искажениям сигнала, которые вносятся присутствием аддитивного шума.

БИЛИНЕЙНЫЕ ВРЕМЯ-ЧАСТОТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ОБОБЩЕННЫМИ МАРГИНАЛАМИ

Анализ билинейных ВЧР_ОМ существенно использует ВПФ, поэтому вначале целесообразно рассмотреть его метод и свойства.

■ ВПФ основано на использовании традиционного преобразования Фурье и применении вращения время-частотной плоскости. Для любого α результат применения вращаемого преобразования Фурье \mathbf{F}_α (с углом α) к сигналу s определяется выражением

$$(\mathbf{F}_\alpha s)(u) =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{1-j \operatorname{ctg} \alpha}{2\pi}} e^{j\left(\frac{u^2}{2}\right) \operatorname{ctg} \alpha} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j\frac{t^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha} e^{(-jut \operatorname{cosec} \alpha)} dt, & \text{если} \\ \alpha \text{ не является числом, кратным } \pi; & (2) \\ s(u), & \text{если} \\ \alpha \text{ является числом, кратным } 2\pi; \\ s(-u), & \text{если} \\ \alpha + \pi \text{ является числом, кратным } 2\pi, \end{cases}$$

где u — аргумент (частотный) ВПФ, примененного к сигналу s . Для ВПФ справедлив ряд простых соотношений, непосредственно вытекающих из (2). Так, $\mathbf{F}_{2n\pi}$ — это преобразование идентичности; $(\mathbf{F}_{(2n+1)\pi} s)(t) = s(-t)$; $\mathbf{F}_{\pi/2}$ — эквивалентно традиционному ПФ. Кроме того, ВПФ имеет свойство суммирования углов ("свойство вращения") [23]: $\mathbf{F}_{\alpha+\beta} = \mathbf{F}_\alpha \mathbf{F}_\beta$.

■ Показано, что вращение ВЧР Вигнера—Вилле дает этот же вид ВЧР [20, 23]. Так, вращение на угол α в частотной плоскости распределения (3) Вигнера—Вилле $P_W(t, \omega)$ сигнала $s(t)$ соответствует связи (4) новых координат $\tilde{t}, \tilde{\omega}$ с исходными t, ω :

$$P_W(t, \omega) = \int s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau; \quad (3)$$

$$\tilde{t} = t \cos \alpha + \omega \sin \alpha,$$

⁴⁾ В комплекснозначном выражении вращаемого преобразования Фурье $(\mathbf{F}_\alpha s)(u)$ значение квадратного корня берется с угловым аргументом из интервала $[-\pi/2, +\pi/2]$, т. е. в форме так называемого основного значения комплексной величины.

$$\tilde{\omega} = -t \sin \alpha + \omega \cos \alpha. \quad (4)$$

Рассмотрение (t, ω) в качестве новых координат соответствует их повороту на $-\alpha$ относительно $(\tilde{t}, \tilde{\omega})$:

$$t = \tilde{t} \cos \alpha - \tilde{\omega} \sin \alpha,$$

$$\omega = \tilde{t} \sin \alpha + \tilde{\omega} \cos \alpha.$$

Поэтому ВЧР $\tilde{P}_W(\tilde{t}, \tilde{\omega})$, являющееся следствием поворота время-частотной плоскости, в которой представлено $P_W(t, \omega)$, выражается соотношением

$$\tilde{P}_W(\tilde{t}, \tilde{\omega}) = P_W(\tilde{t} \cos \alpha - \tilde{\omega} \sin \alpha, \tilde{t} \sin \alpha + \tilde{\omega} \cos \alpha).$$

Преобразование правой части этого соотношения с использованием (3) позволяет получить выражение для ВЧР $\tilde{P}_W(\tilde{t}, \tilde{\omega})$

$$\tilde{P}_W(\tilde{t}, \tilde{\omega}) = \int (\mathbf{F}_\alpha s) \left(\tilde{t} + \frac{\tau}{2} \right) s \left(\tilde{t} - \frac{\tau}{2} \right) e^{-j\tilde{\omega}\tau} d\tau. \quad (5)$$

Полученное соотношение (5) показывает, что результатом вращения $(\tilde{P}_W(\tilde{t}, \tilde{\omega}))$ время-частотного распределения Вигнера—Вилле $P_W(t, \omega)$ сигнала (т. е. сигнала, который получается посредством выполнения вращаемого преобразования Фурье на исходном сигнале $s(t)$) является ВЧР Вигнера—Вилле сигнала $\mathbf{F}_\alpha(s)$. Заметим, что в форме, подобной соотношению (5) по структуре и логике, Лохманом и Софером (Lohmann, Soffer) [26] показано, что вращение ВЧР Радона—Вигнера является тоже распределением Радона—Вигнера.

■ Вращение ВЧР класса Коэна исследовалось Альмейдой (Almeida) [23]. Известно, что один из представителей этого класса — распределение Вигнера—Вилле обладает свойством согласованности обычных маргиналов для $\alpha = \pi/2$. Так что из (5) следует соотношение (6), выражающее равенство частотного маргинала у $\tilde{P}_W(\tilde{t}, \tilde{\omega})$ и мощности преобразуемого сигнала $(\mathbf{F}_\alpha s)(\tilde{t})$

$$\int \tilde{P}_W(\tilde{t}, \tilde{\omega}) d\tilde{\omega} = |(\mathbf{F}_\alpha s)(\tilde{t})|^2. \quad (6)$$

По той же логике справедливо и аналогичное соотношение, выражающее равенство временного маргинала у $\tilde{P}_W(\tilde{t}, \tilde{\omega})$ и квадрата спектральной плотности преобразуемого сигнала $\mathbf{F}_\alpha(s)$, т. е. преобразования Фурье этого сигнала $\mathbf{F}(\mathbf{F}_\alpha s)(\tilde{\omega})$

$$\int \tilde{P}_W(\tilde{t}, \tilde{\omega}) d\tilde{t} = |\mathbf{F}(\mathbf{F}_\alpha s)(\tilde{\omega})|^2 = |(\mathbf{F}_{\alpha+\pi/2} s)(\tilde{\omega})|^2. \quad (7)$$

Последнее равенство в (7) основано на упоминавшемся выше свойстве $\mathbf{F}_{\alpha+\pi/2} s = \mathbf{F}_{\pi/2} \mathbf{F}_\alpha s = \mathbf{F} \mathbf{F}_\alpha s$.

**УСЛОВИЯ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЕ СВОЙСТВО
ОБОБЩЕННЫХ МАРГИНАЛОВ**

Наиболее широкое разнообразие ВЧР порождается преобразованиями, принадлежащими классу Коэна. При определенных условиях эти ВЧР могут иметь обобщенные маргиналы и обладать свойством, характерным для ВЧР_ОМ, в частности свойством по соотношению (1). Поэтому полезно определить избыточные условия, обеспечивающие для ВЧР класса Коэна наличие свойства обобщенного маргинала⁵⁾.

Для преобразований класса Коэна время-частотные распределения определяются соотношением [5, 7]

$$P(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint A(\theta, \tau) e^{-j\theta t - j\tau \omega} d\theta d\tau,$$

где $A(\theta, \tau)$ — так называемая обобщенная функция двойственности сигнала $s(t)$ с ядром $\varphi(\theta, \tau)$:

$$A(\theta, \tau) = \varphi(\theta, \tau) \int s\left(u + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) e^{j\theta u} du.$$

ВЧР $P(t, \omega)$ может быть представлено и в несколько более часто встречающейся форме

$$P(t, \omega) = \iiint e^{-j\theta t - j\tau \omega + j\theta u} \varphi(\theta, \tau) s\left(u + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) d\theta d\tau du. \quad (8)$$

При этом $P(t, \omega)$ является ВЧР_ОМ тогда (и только тогда), если выполняются условия формулы (9), в которой использованы соотношения, связывающие новые координаты $(\tilde{t}, \tilde{\omega})$ при повороте время-частотной плоскости с исходными координатами (t, ω) . Эти соотношения приведены выше в виде выражений (4) и в следующих за ними двух формулах. Для удобства они повторены в сноске⁶⁾.

Таким образом, с учетом взаимосвязи (t, ω) и $(\tilde{t}, \tilde{\omega})$ свойство ВЧР_ОМ, представленное формулой (1), может быть преобразовано к виду (9):

$$\int P(\tilde{t} \cos \alpha_k - \tilde{\omega} \sin \alpha_k, \tilde{t} \sin \alpha_k + \tilde{\omega} \cos \alpha_k) d\tilde{t} = |(\mathbf{F}_{\alpha_k + \pi/2} s)(\tilde{\omega})|^2, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Другими словами, время-частотное распределение $P(t, \omega)$ является обобщенным маргиналом

⁵⁾ Понятие избыточных условий использовано здесь в смысле, эквивалентном более формальному, но и более строгому понятию необходимого и достаточного условия.
⁶⁾

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t \cos \alpha + \omega \sin \alpha, & t &= \tilde{t} \cos \alpha - \tilde{\omega} \sin \alpha, \\ \tilde{\omega} &= -t \sin \alpha + \omega \cos \alpha, & \omega &= \tilde{t} \sin \alpha + \tilde{\omega} \cos \alpha. \end{aligned} \Leftrightarrow$$

тогда (и только тогда), если оно удовлетворяет соотношению (9).

Если теперь взять один некоторый определенный угол α в (9) и использовать в левой части этого соотношения развернутое выражение ВЧР $P(t, \omega)$ из (8), то можно получить новую форму для левой части (9):

$$\begin{aligned} & \int P(\tilde{t} \cos \alpha - \tilde{\omega} \sin \alpha, \tilde{t} \sin \alpha + \tilde{\omega} \cos \alpha) d\tilde{t} = \\ & = \left(\frac{1}{\cos \alpha} \right) \iint e^{-j\tilde{\omega} \tau (\sin \alpha t \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha) - j\tau \operatorname{tg} \alpha} \times \\ & \times \varphi(-\tau \operatorname{tg} \alpha, \tau) s\left(u + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) d\tau du = \\ & = \int e^{-j\tilde{\omega} \tau} \varphi(-\tau \sin \alpha, \tau \cos \alpha) A_s(-\tau \sin \alpha, \tau \cos \alpha) d\tau, \end{aligned}$$

где A_s — функция двойственности сигнала s .

Функция A_s при вращении время-частотной плоскости имеет свойство преобразования, которое как по структуре, так и по способу получения аналогично преобразованию ВЧР и выражается соотношением⁷⁾

$$A_s(-\tau \sin \alpha, \tau \cos \alpha) = A_{\mathbf{F}_{\alpha + \pi/2} s}(\tau, 0).$$

С учетом этого свойства в качестве продолжения начатого преобразования левой части выражения (9) может быть получено соотношение (которое необходимо для определения условия наличия свойства ВЧР_ОМ)

$$\begin{aligned} & \int P(\tilde{t} \cos \alpha - \tilde{\omega} \sin \alpha, \tilde{t} \sin \alpha + \tilde{\omega} \cos \alpha) d\tilde{t} = \\ & = \iint e^{j(u - \tilde{\omega})\tau} \varphi(-\tau \sin \alpha, \tau \cos \alpha) \left| (\mathbf{F}_{\alpha + \pi/2} s)(u) \right|^2 dud\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, свойство (существования у ВЧР) обобщенного маргинала в форме выражения:

$$\int P(\tilde{t} \cos \alpha - \tilde{\omega} \sin \alpha, \tilde{t} \sin \alpha + \tilde{\omega} \cos \alpha) d\tilde{t} = \left| (\mathbf{F}_{\alpha + \pi/2} s)(\tilde{\omega}) \right|^2,$$

(т. е. (9) при определенном значении угла) выполняется тогда (и только тогда), если соблюдается следующее соотношение⁸⁾:

⁷⁾ Это свойство можно установить с помощью выражения для функции двойственности (оно приведено немного выше формулы (8)) или использовать работу Ван Триса (Van Trees) [27].

⁸⁾ Здесь $\delta(x)$ (называемая обычно функцией Дирака или просто δ -функцией) является аналогом своего дискретного варианта — символа Кронекера. Основное свойство δ -функции: $\delta(x) = 0$ при $x \neq 0$; $\delta(x) = \infty$ при $x = 0$; $\int \delta(x) dx = 1$; $\int \delta(x) f(x) dx = f(0)$. В нашем случае $\int \delta(u - \tilde{\omega}) \left| (\mathbf{F}_{\alpha + \pi/2} s)(u) \right|^2 du = \left| (\mathbf{F}_{\alpha + \pi/2} s)(\tilde{\omega}) \right|^2$, поскольку интегрируемой функцией является $\left| (\mathbf{F}_{\alpha + \pi/2} s)(u) \right|^2$.

$$\int e^{j(u-\tilde{\omega})\tau} \varphi(-\tau \sin \alpha, \tau \cos \alpha) d\tau = \delta(u - \tilde{\omega}) .$$

В свою очередь, это значит, что $\varphi(-\tau \sin \alpha, \tau \cos \alpha) = 1$.

Несмотря на то, что проведенные преобразования проведены для одного определенного угла ВПФ, оно по такой же логике непосредственно обобщается на несколько углов α_k для $k = 1, 2, \dots, N$. Поэтому полученный результат фактически устанавливает, что ВЧР $P(t, \omega)$ (8) класса Коэна с ядром $\varphi(\theta, \tau)$ является ВЧР_ОМ с углами $\{\alpha_k\}$, $k = 1, 2, \dots, N$ в соответствии с (9) только при условии

$$\varphi(-\tau \sin \alpha, \tau \cos \alpha) = 1, \quad \forall \tau \text{ и для } k = 1, 2, \dots, N.$$

Другими словами, $\varphi = 1$ на линиях, которые перпендикулярны линиям L_{α_k} , проходящим через начало (см. рисунок).

**ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА
ВРЕМЯ-ЧАСТОТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ
С ОБОБЩЕННЫМИ МАРГИНАЛАМИ**

Из найденного условия следует, что для любого набора углов к ВЧР_ОМ относится одно из основных — распределение Вигнера—Вилле, поскольку у него ядро $\varphi = 1$ для всех θ и τ . Кроме того, используя полученное условие для ВЧР_ОМ, можно видоизменить известные ядра (лежащие в основе ВЧР класса Коэна) таким образом, чтобы соответствующие им распределения стали время-частотными распределениями с обобщенными маргиналами. Примерами такого видоизменения служит соответствие ряда ядер (Рихачека (Rihaczek), Пейджа (Page), Чои—Вильямса, sinc-ядра) их модифицированным формам [5, 11, 28], приведенным в таблице. Эти формы ядер порождают ВЧР_ОМ, также относящиеся к классу Коэна.

Модификация формы ядер ($\varphi(\theta, \tau) \rightarrow \tilde{\varphi}(\theta, \tau)$), приводящая к ВЧР_ОМ класса Коэна

Название	Вид ядра $\varphi(\theta, \tau)$	Модифицированная форма ядра $\tilde{\varphi}(\theta, \tau)$ с углами α_k , $k = 1, 2, \dots, N$
Рихачека	$e^{0.5j\theta\tau}$	$e^{[0.5j \prod_{k=1}^N (\theta \cos \alpha_k + \tau \sin \alpha_k)]}$
Пейджа	$e^{0.5\theta \tau }$	$e^{0.5j[\prod_{k=1}^N \theta \cos \alpha_k + \tau \sin \alpha_k][\prod_{k=1}^N (\theta \cos \alpha_k + \tau \sin \alpha_k)]}$
Вильямса	$e^{-\theta^2\tau^2/\sigma}$	$e^{(-1/\sigma) \prod_{k=1}^N (\theta \cos \alpha_k + \tau \sin \alpha_k)^2}$
sinc	$\frac{\sin(a\theta\tau)}{a\theta\tau}$	$\frac{\sin[a \prod_{k=1}^N (\theta \cos \alpha_k + \tau \sin \alpha_k)]}{a \prod_{k=1}^N (\theta \cos \alpha_k + \tau \sin \alpha_k)}$

Проведившееся предварительное изучение время-частотных преобразований некоторых моделей сигналов (включая СЛИЧ, которые очень показательны с точки зрения оценки чистоты ВЧР и отсутствия элементов интерференции) показало, что ВЧР_ОМ имеют лучшие характеристики, чем соответствующие ВЧР класса Коэна с обычными маргиналами. Лучшей становится и защищенность ВЧР при анализе сигнала с сопутствующим шумом, т. е. повышается так называемая робастность ВЧР. Такое улучшение более выражено, когда берется не слишком мало углов, набор которых входит в условие формирования ВЧР_ОМ. Улучшение ВЧР получается при формировании модифицированного ядра с использованием 4–5 значений углов, равномерно распределенных в интервале $0, \pi/2$.

Увеличение набора углов, входящего в условие для ВЧР_ОМ, ведет к усложнению ядра и увеличивает вычислительную нагрузку при определении ВЧР, однако компьютерная реализация практически полностью снимает это незначительное затруднение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Время-частотные преобразования (ВЧП) используются при обработке нестационарных сигналов в прикладных исследованиях, связанных с информационно-измерительными и управляющими системами. Метод ВЧП продуктивен с точки зрения возможности получения динамического спектра измерительных сигналов, облегчающего анализ и интерпретацию изучаемых процессов или верификацию необходимой частотной структуры управляющих сигналов при их целевом моделировании.

К наиболее исследованным относится группа ВЧП класса Коэна с типовой структурой, основанной на интегральном преобразовании сигнала с ядром (функцией двух переменных). Ядро определяет свойства ВЧП, а наложение определенных условий на ядро позволяет получить полезные свойства ВЧП [18]. Среди них свойство согласованности маргиналов (величин ВЧП, проинтегрированных по одной из переменных — времени или частоте), которое дает возможность интерпретации результата преобразования сигнала как его (вероятностное) время-частотное распределение (ВЧР).

Нередко при использовании ВЧР для сигналов с быстро меняющимся спектральным составом возникают осложнения, обусловленные появлением в этих условиях так называемых элементов интерференции — вкраплений в картину ВЧР, затрудняющих интерпретацию динамического спектра. Используемый ранее способ преодоления этого недостатка был основан на простейших видах изменения формы ядра преобразования и не давал эффективных результатов.

Новым подходом, ведущим к улучшению качественных характеристик ВЧР, является использование концепции обобщенных маргиналов время-частотного преобразования. В отличие от традиционного понятия временного и частотного маргиналов ВЧР класса Коэна обобщенный маргинал (ОМ) формируется вне частотного или временного измерения, т.к. интегрирование, определяющее ОМ, осуществляется по одной из осей вращаемой время-частотной плоскости. Предложено условие, определяющее наличие обобщенных маргиналов; это условие выражается с помощью сравнительно новой концепции вращаемого преобразования Фурье (ВПФ). В связи с этим приведена характеристика ВПФ, его свойства и некоторые процедуры, необходимые при получении условий, которые определяют существование ОМ у ВЧР.

Для распределений класса Коэна показана форма модификации ядра, необходимая для обеспечения у него определенного числа обобщенных маргиналов. Использование время-частотных преобразований с таким модифицированным ядром существенно улучшает разрешающую способность при анализе динамического частотного спектра нестационарного сигнала в ИИС. Использование описанного метода при анализе сигналов с сопутствующим аддитивным шумом облегчает корректную интерпретацию результата анализа измерительных данных при обработке нестационарных сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Portnoff M.R.* Time-frequency representation of

- digital signal and systems based on short-time Fourier analysis // *IEEE Transaction on Signal Processing*. 1980. V. 28, N 2. P. 1055–1062.
2. *Auslander I., Gertner I.C., Tolimieri R.* The discrete Zak transform application to time-frequency analysis and synthesis of non-stationary signals // *IEEE Transactions on Signal Processing*. 1991. V. 39, N 4. P. 825–832.
3. *Heil G.E., Walnut D.F.* Continuous and discrete wavelet transforms // *Society of Industrial and Applied Mathematics Review*. 1989. V. 31, N 12. P. 628–637.
4. *Resent advanced wavelet analysis / Schumaker L.L. (Ed.)*. Boston: Academic Press, 1994. 254 p.
5. *Cohen L.* Time-frequency distribution // *Proceedings of IEEE*. 1989. V. 77, N 7. P. 941–961.
6. *Hlawatschv F., Boudeaux-Bartels G.F.* Linear and quadratic time-frequency signal representations // *IEEE Signal Processing Magazine*. 1992. V. 9, N 4. P. 21–67.
7. *Quian S., Chen D.* Signal representation using the gaussian functions // *Signal Processing*. 1994. V. 36. P. 1–11.
8. *Gaunaurd G.C., Strifors H.C.* Signal analysis by means of time-frequency transformation of Wigner type // *Proceedings of IEEE*. 1996. V. 84, N 9. P. 1237–1247.
9. *Ville J.* Theory et applications de la notion de signal analitique // *Cables et Transmission*. 1948. V. 24. P. 61–74.
10. *Меркушева А.В.* Классы преобразований нестационарного сигнала в информационно-измерительных системах. II. Время-частотные преобразования // *Научное приборостроение*. 2002. Т. 12, № 2. С. 59–70.
11. *Choi H., Williams W.J.* Improved time-frequency representation with exponential kernels // *IEEE Transactions on Signal Processing*. 1989. V. 37, N 6. P. 862–871.
12. *Choi H., Williams W.J.* Exponential kernel with reduced interference on the basis of exponential kernel // *Proceedings of IEEE*. 1996. V. 84, N 9. P. 1264–1271.
13. *Zhao Y., Atlas L.E., Marks R.J.* The use of cone-shaped kernels for generalized time-frequency representation of non-stationary signals // *IEEE Transaction on Signal Processing*. 1990. V. 38, N 7. P. 1084–1091.
14. *Loughlin P.J., Pitton J.W., Atlas L.E.* Bilinear time-frequency transformation. New insight and properties // *IEEE Transaction on Signal Processing*. 1993. V. 41, N 3. P. 751–758.
15. *Baraniuk R., Jones D.L.* Signal dependent time-frequency analysis using a radially gaussian kernel // *Signal Processing*. 1993. V. 32, N 2. P. 263–284.
16. *Quin S., Chen D.* Decomposition of the Wigner-

- Ville distribution and time-frequency distribution series // IEEE Transaction on Signal Processing. 1994. V. 42, N 10. P. 2836–2842.
17. Papandreou A., Hlawatsch F., Bodreaux-Bartlets G.F. A unified framework for the scale covariant affine, hyperbolic, and power class quadratic time-frequency representation using generalized time shift // Proceedings of IEEE International Congress on Acoustics, Speech and Signal Processing, Detroit, Michigan, May 1995. P. 1007–1020.
 18. Меркушева А.В. Классы преобразований нестационарного сигнала в информационно-измерительных системах. I. Элементы теории // Научное приборостроение. 2002. Т. 12, № 2. С. 50–58.
 19. Wood J.C., Barry D.T. Radon transformation of time-frequency distributions for analysis of multi-component signals // IEEE Transaction on Signal Processing. 1994. V. 42, N 11. P. 3166–3177.
 20. Wood J.C., Barry D.T. Tomographic time-frequency analysis and its application toward time-varying filtering and adaptive kernel design for multi-component linear-FM signals // IEEE Transaction on Signal Processing. 1994. V. 42, N 8. P. 2094–2104.
 21. Cohen L.A. General approach for obtaining joint representation in signal analysis and an application to scale // SPIE Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures Implement / Luk F.T. (Ed.). V. II. 1991. P. 109–133.
 22. Cohen L. Scale representation // IEEE Transaction on Signal Processing. 1993. V. 41, N 12. P. 3275–3292.
 23. Almeida L.B. The fractional Fourier transform and time-frequency representation // IMA Journal of Applied Mathematics. 1987. V. 42, N 11. P. 384–391.
 24. Janssen A.J.E.M. On the locus and spread of pseudo-density functions in the time-frequency plane // Philips Journal of Research. 1982. V. 37, N 1. P. 79–110.
 25. Меркушева А.В. Аналитические формы обработки сигналов в информационно-измерительных системах на основе обобщенной модификации преобразования Фурье // Научное приборостроение. 2005. Т. 15, № 4. С. 3–17.
 26. Lohmann A.W., Soffer B.H. Relationship between Radon-Wigner and fractional Fourier transforms // Journal of Optics Society of America A. 1994. V. 11, N 7. P. 1798–1801.
 27. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции / Пер. с англ. под ред. В.И. Тихонова. Т. 1. 1972. 744 с.
 28. Costa A.H., Bodreaux-Bartelelet G.F. Design of time-frequency representations using a multiform, titable exponential kernel // IEEE Transaction on Signal Processing. 1995. V. 43, N 10. P. 2283–2301.

Санкт-Петербург

Материал поступил в редакцию 10.06.2005.

TIME-FREQUENCY TRANSFORMATIONS WITH GENERALIZED MARGINALS FOR NON-STATIONARY SIGNAL ANALYSIS IN INFORMATION-MEASUREMENT SYSTEMS

A. V. Merkusheva

Saint-Petersburg

For non-stationary signal analysis in information-measurement systems (IMS), a set of time-frequency distributions (TFD) with generalized marginals (GM) is considered, i.e. marginals beyond the time or frequency domain. The TFD projections in the form of integrals along one or several directions (at several different angles) on the time-frequency plane are used as GMs. GM values are equal to the module square of the rotated Fourier transform. The condition is given, on realization of which the Cohen-class TFDs have GM. The well-known TFDs of Cohen-class (Choi-Williams, Page TFDs) may be modified so that to have GM. From the point of view of signal presentation, these modifications have the advantages over quadratic TFDs having only ordinary marginals. Moreover, the TFDs with GM are more robust in conditions when the IMS signal includes additive noise.