

УДК 621.374.55

© С. В. Богословский

МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ ЗАРЯДОВ В ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕ НА ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ

Уточнены области определения функции Грина для потенциала поверхностной акустической волны. Решена задача о распределении зарядов с учетом изменения амплитуды волн под электродами встречно-штыревого преобразователя. Исходное интегральное уравнение с разностным ядром, моделирующее распределение зарядов под электродом бесконечной длины, с помощью интегрирования по частям сведено к дифференциально-разностному уравнению, решение которого получено в замкнутой форме.

ВВЕДЕНИЕ

Преобразователи на поверхностных акустических волнах (ПАВ) в последние годы находят все большее применение в качестве миниатюрных фильтров, линий задержки и измерительных преобразователей в системах радиолокации, радионавигации и в системах управления.

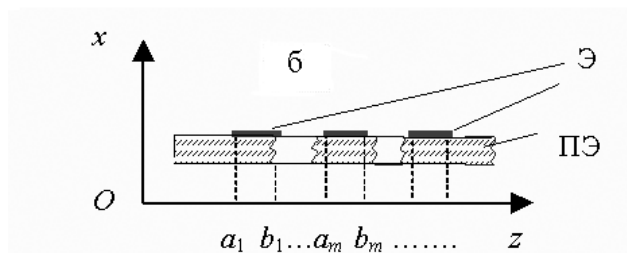
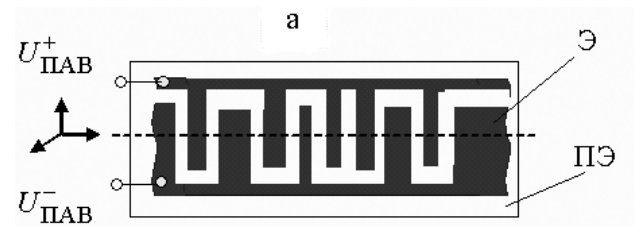
Основным элементом преобразователя на ПАВ является встречно-штыревой преобразователь (ВШП). Структура ВШП обычно представляется совокупностью идеально проводящих бесконечно тонких металлических электродов с произвольно чередующейся полярностью, произвольно меняющимся периодом и перекрытием соседних электродов на поверхности однородного упругого кристалла бесконечной длины, обладающего пьезоэлектрическими свойствами и граничащего с вакуумом (см. рисунок).

На рисунке слева подключен источник напряжения вида $U_{\text{ПАВ}}^{\pm} = U_0 \exp(-j\omega t)$, где U_0 — амплитуда, ω — круговая частота источника напряжения. Акустические волны, порождаемые приложенным к пьезоэлектрику напряжением, имеют эффективное волновое число k_z , пропорциональное круговой частоте $k_z = \omega/c_z$, где $c_z = \text{const}$. — эффективная скорость перемещения фазы (фазовая скорость) поверхностной волны вдоль оси Oz .

Если структура ВШП нанесена на деформируемый чувствительный элемент, то при деформации изменяются расстояние между электродами (период) ВШП, механические напряжения в кристалле и как следствие — эффективное волновое число. Этот эффект используется при создании различных измерительных преобразователей физических параметров.

При этом предполагается, что длина электродов (в направлении распространения поверхностной волны) в 40–100 раз больше длины поверхностной волны.

Динамичное развитие теории возбуждения ПАВ прошло ряд этапов. Физически и теоретически более обоснованным является решение задачи о возбуждении ПАВ на основе функции Грина,



Встречно-штыревой преобразователь поверхностных акустических волн в проекциях на горизонтальную (а) и вертикальную (б) плоскости:

ПЭ — пьезоэлектрик; Э — электроды ВШП; a_m , b_m — координаты начала и конца m -го электрода (по ширине)

наиболее корректное вычисление которой произведено в работе [2]. Там же содержится и подробный обзор публикаций, посвященных моделированию ПАВ:

- расчету распределения заряда под электродами ВШП в приближении слабой связи ПАВ с пьезоэлектриком;

- моделированию взаимодействия ПАВ с системой металлических электродов, когда исходная задача о распределении заряда под электродами сводится к неоднородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, учитывающего влияние генерации ПАВ и объемных волн;

- выводу интегрального уравнения для поверхностного распределения тангенциальной составляющей напряженности электрического поля, решение которого ищется в виде итерационного ряда;

- определению распределения заряда на основе решения системы алгебраических уравнений, связывающих поверхностный потенциал под каждым электродом с плотностью заряда в конечном числе точек данного электрода.

При решении задачи о распределении заряда на электродах ВШП ранее не учитывалось неразрывное изменение амплитуды волн, либо использовалась только часть функции Грина [2], либо некорректно определялась область существования полученных моделей. Поэтому модель функции Грина нуждается в уточнении области ее определения,

а однородное интегральное уравнение для плотности зарядов под ВШП — в получении решения в замкнутой форме.

Исходные уравнения и граничные условия, необходимые для построения моделей функции Грина и распределения поверхностных зарядов, аналогичны уравнениям, обычно используемым при решении задачи о возбуждении акустических волн [2].

Предположение о том, что длина электродов много больше длины поверхностной волны, позволяет решать задачу распределения зарядов под электродом так, как если бы электрод имел бесконечно большую длину.

В статье ставится задача уточнения области определения функции Грина для поверхностных акустических волн, а также получения решения интегрального уравнения для поверхностного распределения тангенциальной составляющей напряженности электрического поля под электродом бесконечно большой длины.

1. ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ГРИНА

Связь преобразований Фурье поверхностного потенциала $\varphi_T(k_z)$ и точечного заряда

$\sigma_T(z) = \sigma \delta(z - z_0)$ имеет вид [7]

$$\varphi_T(k_z) = \frac{\sigma}{|k_z| \varepsilon_S(k_z)}, \quad (1)$$

где $\varepsilon_S(k_z)$ — эффективная диэлектрическая проницаемость; k_z — эффективное волновое число; σ — поверхностный потенциал заряда в точке ($z = z_0$).

Выполняя обратное преобразование Фурье функции (1), получают

$$\varphi_T(z_0) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-j k_z z_0)}{|k_z| \varepsilon_S(k_z)} dk_z. \quad (2)$$

Соотношение (2) фактически определяет функцию Грина точечного источника $G(z_0) = \varphi(z_0)$. Поверхностный потенциал, создаваемый произвольным распределением поверхностных зарядов $\sigma(z)$, можно найти в соответствии с принципом суперпозиции:

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(z - z_0) \sigma(z_0) dz_0, \quad (3)$$

где $G(z - z_0)$ — функция Грина точечного источника в точке ($z = z_0$) с единичной плотностью поверхностного заряда ($\sigma = 1$):

$$G(z - z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[-j k_z(z - z_0)]}{|k_z| \varepsilon_S(k_z)} dk_z. \quad (4)$$

Для эффективной диэлектрической проницаемости пользуются аппроксимацией Ингебригстена [6]

$$\varepsilon_S(k_z) = \varepsilon_S(\infty) \frac{k_z^2 - k_{zS0}^2}{k_z^2 - k_{zS}^2}, \quad (5)$$

где $\varepsilon_S(\infty) = \varepsilon_S(k_z)|_{k_z \rightarrow \infty}$; k_{zS0}, k_{zS} — постоянные величины.

С учетом (5), разлагая дробь под знаком интеграла (4) на простые множители, можно представить функцию Грина потенциала ПАВ в виде суммы двух составляющих — неволновой и волновой:

$$G(k_{zS0}, z - z_0) = G_C(z - z_0) + G_K(k_{zS0}, z - z_0), \quad (6)$$

где $G_C(z - z_0)$, $G_K(k_{zS0}, z - z_0)$ — неволновая и волновая составляющие функции Грина соответственно.

$$G_C(z - z_0) = G_{C0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[-j k_z(z - z_0)] dk_z}{|k_z|}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
G_K(k_{zS0}, z - z_0) &= \\
&= G_{K0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|k_z|}{k_z^2 - k_{zS0}^2} \exp[-j k_z(z - z_0)] dk_z; \quad (8) \\
G_{C0} &= \frac{k_{zS}^2}{2\pi \varepsilon_S(\infty) k_{zS0}^2}; \quad G_{K0} = \frac{k_{zS0}^2 - k_{zS}^2}{2\pi \varepsilon_S(\infty) k_{zS}^2}.
\end{aligned}$$

Интегралы (7) и (8) являются несобственными интегралами, т. е. их значения существуют только как предельные (главные) значения при спрямлении контуров интегрирования.

Главное значение интеграла (7) можно найти с помощью таблиц [3, 5]

$$\begin{aligned}
G_C(z - z_0) &= G_{C0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[-j k_z(z - z_0)]}{|k_z|} dk_z = \\
&= G_{C0} \int_0^{+\infty} \frac{\exp[-j k_z(z - z_0)] + \exp[j k_z(z - z_0)]}{k_z} dk_z = \\
&= -2G_{C0} \ln |z - z_0|. \quad (9)
\end{aligned}$$

Вычислим составляющую (8) функции Грина, воспользовавшись таблицами интегралов [3, 4]. Для этого предварительно приведем интервал интегрирования $(-\infty, +\infty)$ к интервалу $[0, +\infty)$. В результате получим:

при $k_{zS0} > 0$ и $(z - z_0) \neq 0$ —

$$\begin{aligned}
G_K(k_{zS0}, z - z_0) &\equiv G_K^+(k_{zS0}, z - z_0) = \\
&= G_{K0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|k_z|}{k_z^2 - k_{zS0}^2} \exp[-j k_z(z - z_0)] dk_z = \\
&= G_{K0} \int_0^{+\infty} \frac{\exp[-j k_z(z - z_0)] + \exp[j k_z(z - z_0)]}{k_z^2 - k_{zS0}^2} k_z dk_z = \\
&= -G_{K0} e^{j k_{zS0}|z - z_0|} \text{Ei}(-j k_{zS0}|z - z_0|) - \\
&\quad - G_{K0} e^{-j k_{zS0}|z - z_0|} \text{Ei}(j k_{zS0}|z - z_0|) = \\
&= -2G_{K0} \cos(k_{zS0}|z - z_0|) \text{ci}(k_{zS0}|z - z_0|) - \\
&\quad - 2G_{K0} \sin(k_{zS0}|z - z_0|) \text{si}(k_{zS0}|z - z_0|); \quad (10)
\end{aligned}$$

при $k_{zS0} \rightarrow 0$ и $(z - z_0) \neq 0$ —

$$\begin{aligned}
G_K(k_{zS0}, z - z_0) &= \\
&= G_{K0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|k_z|}{k_z^2} \exp[-j k_z(z - z_0)] dk_z = \\
&= G_{K0} \int_0^{+\infty} \frac{|k_z|}{k_z^2} \exp[-j k_z(z - z_0)] dk_z + \\
&\quad + G_{K0} \int_{-\infty}^0 \frac{|k_z|}{k_z^2} \exp[-j k_z(z - z_0)] dk_z =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= G_{K0} \int_0^{+\infty} \frac{\exp[-j k_z(z - z_0)] - \exp[j k_z(z - z_0)]}{k_z} dk_z = \\
&= -j 2G_{K0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin[j k_z(z - z_0)]}{k_z} dk_z = \\
&= -j \pi G_{K0} \text{sgn}(z - z_0);
\end{aligned}$$

при $k_{zS0} \neq 0$ и $z \rightarrow z_0$ —

$$\begin{aligned}
G_K(k_{zS0}, z - z_0) &= G_{K0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|k_z|}{k_z^2 - k_{zS0}^2} dk_z = \\
&= G_{K0} \int_{-\infty}^0 \frac{|k_z|}{k_z^2 - k_{zS0}^2} dk_z + G_{K0} \int_0^{+\infty} \frac{k_z}{k_z^2 - k_{zS0}^2} dk_z = 0;
\end{aligned}$$

при $k_{zS0} < 0$ и $(z - z_0) \neq 0$ —

$$\begin{aligned}
G_K(k_{zS0}, z - z_0) &\equiv G_K^-(k_{zS0}, z - z_0) = \\
&= G_K^+(-|k_{zS0}|, z - z_0) = \\
&= -2G_{K0} \cos[|k_{zS0}(z - z_0)|] \cdot [\pi j + \text{ci}|k_{zS0}(z - z_0)|] - \\
&\quad - 2G_{K0} \sin[|k_{zS0}(z - z_0)|] \cdot [\pi + \text{si}|k_{zS0}(z - z_0)|] = \\
&= -2\pi j G_{K0} \exp[-j |k_{zS0}(z - z_0)|] + \\
&\quad + G_K^+(|k_{zS0}|, z - z_0), \quad (11)
\end{aligned}$$

где $\text{Ei}(z) = \int_{-\infty}^z \frac{e^p}{p} dp$ — интегральная показательная функция;

$\text{ci}(z) = -\int_z^{\infty} \frac{\cos p}{p} dp$ — интегральный косинус;

$\text{si}(z) = -\int_z^{\infty} \frac{\sin p}{p} dp$ — интегральный синус;

$$\text{sgn}(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z > 0; \\ 0 & \text{при } z = 0; \\ -1 & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

Заметим, что, как следует из (10), все составляющие (9)–(11) функции Грина при любом знаке k_{zS0} симметричны относительно оси ординат

$$G(k_{zS0}, z - z_0) = G(k_{zS0}, |z - z_0|). \quad (12)$$

Другими словами, функция Грина $G(k_{zS0}, z - z_0)$ зависит от модуля линейной координаты $(z - z_0)$ и значения параметра k_{zS0} . Полученные формы (10)–(11) представления функции Грина соответствуют [2], но отличаются областями значений аргумента $(z - z_0)$ и параметра k_{zS0} .

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ПОВЕРХНОСТНОГО ЗАРЯДА НА ЭЛЕКТРОДАХ ВСТРЕЧНО-ШТЫРЕВОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

Уравнение для плотности $J(z)$ получают на основе граничного значения тангенциальной компоненты напряженности электрического поля на поверхности ВПП

$$E_z^C(y=0, z) + E_z^K(y=0, z) = 0, \quad (13)$$

где $E_z^C(y=0, z)$ — составляющая тангенциальной компоненты напряженности электрического поля, соответствующая системе зарядовых полос на поверхности электродов в электростатическом приближении; $E_z^K(y=0, z)$ — составляющая результирующей тангенциальной компоненты напряженности электрического поля, соответствующая системе акустических волн на поверхности пьезоэлектрика.

При моделировании плотности распределения зарядов в первом приближении можно пренебречь отражением от электродов и обратным преобразованием ПАВ [2]. При этом величины $E_z^C(y=0, z)$ и $E_z^K(y=0, z)$ на поверхности электродов связаны с потенциалом поверхностного заряда соотношением

$$E_z^C(z) = \frac{\partial \varphi_C(\omega, z)}{\partial z}; \quad E_z^K(z) = \frac{\partial \varphi_K(\omega, z)}{\partial z}, \quad (14)$$

где

$$\varphi_C(\omega, z) = \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} G_C(z-z_0) J(z_0) dz_0;$$

$$\varphi_K(\omega, z) = \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} G_K(k_{zs0}, z-z_0) J(z_0) dz_0;$$

$\varphi_C(\omega, z)$, $\varphi_K(\omega, z)$ — неволновая и волновая составляющие потенциала поверхностного заряда соответственно; $G_C(z-z_0)$, $G_K(k_{zs0}, z-z_0)$ — неволновая и волновая составляющие функции Грина, соответствующие формулам (9)–(11).

Подставляя (9) в (14), получим:

$$E_z^C(z) = \frac{\partial \varphi_C(\omega, z)}{\partial z} = \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G_C(z-z_0)}{\partial z} J(z_0) dz_0 = \frac{-2G_{C0}}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|z-z_0|} J(z_0) dz_0, \quad (15)$$

$$E_z^K(z) = \frac{\partial \varphi_K(\omega, z)}{\partial z} =$$

$$= \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G_K(k_{zs0}, z-z_0)}{\partial z} J(z_0) dz_0. \quad (16)$$

С учетом (15)–(16) граничное условие (13) можно привести к интегральному уравнению с разностным ядром относительно искомой плотности распределения поверхностного заряда $J(z_0)$

$$\frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{-2G_{C0}}{|z-z_0|} + \frac{\partial G_K(k_{zs0}, z-z_0)}{\partial z} \right] J(z_0) dz_0 = 0. \quad (17)$$

Первый член в уравнении (17) учитывает напряженность электрического поля поверхностных зарядов в электростатическом приближении. Второе слагаемое в уравнении (17) учитывает напряженность электрического поля бегущих волн.

Уравнение (17) является однородным интегрально-разностным уравнением первого рода с разностным ядром, которое может быть представлено в виде суммы двух слагаемых, первое из которых симметрично относительно оси ординат и в каждой полуплоскости является нечетной функцией аргумента, а второе слагаемое имеет первообразную функцию, симметричную относительно оси ординат.

Уравнения типа (17) обычно решают методом последовательных приближений [2]. Даже с использованием компьютера с частотой 2.5 ГГц этот метод требует ощутимых затрат времени на получение достаточно точного решения.

Ускорить расчеты можно, получив выражение для $J(z)$ в замкнутом виде. Для этого преобразуем интеграл в уравнении (17) с помощью интегрирования по частям. Согласно (12), функция $G_K(k_{zs0}, z-z_0)$ симметрична относительно оси ординат на плоскости $\langle (z-z_0), G_K \rangle$ при любом знаке k_{zs0} . Как следует из дальнейшего, при условии (12) и распределение плотности заряда $J(z_0) = J(-z_0)$ также оказывается функцией, симметричной относительно оси ординат. Поэтому на обоих концах интервала интегрирования $(-\infty, +\infty)$ разность значений произведения $G_K(k_{zs0}, z-z_0)J(z_0)$ оказывается равной нулю.

Преобразуем интеграл (16) с учетом того, что

$$\frac{\partial G_K(k_{zs0}, z-z_0)}{\partial z} = - \frac{\partial G_K(k_{zs0}, z-z_0)}{\partial z_0}.$$

В результате интегрирования по частям получим

$$E_z^K(z) = \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} G_K^+(k_{zs0}, z-z_0) \frac{\partial J(z_0)}{\partial z_0} dz_0. \quad (18)$$

Чтобы не использовать нелинейную операцию вычисления модуля $(z-z_0)$, приведем интеграл (15)

к сумме интегралов по интервалу $[0, \infty)$:

$$E_z^C(z) = \frac{-2G_{C0}}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|z-z_0|} J(z_0) dz_0 =$$

$$= \frac{-2G_{C0}}{j\omega} \int_z^{\infty} \frac{J(z_0)}{|z-z_0|} dz_0 - \frac{2G_{C0}}{j\omega} \int_{-\infty}^z \frac{J(z_0)}{|z-z_0|} dz_0 =$$

$$= \frac{-2G_{C0}}{j\omega} \int_0^{\infty} \frac{J(z+u_1)}{u_1} du_1 - \frac{2G_{C0}}{j\omega} \int_0^{\infty} \frac{J(z-u_2)}{u_2} du_2, \quad (19)$$

где в соответствии с порядком следования интегралов выполнены замены переменных интегрирования $z_0 = z - u_1$ и $z_0 = z - u_2$.

Поскольку $G_K(k_{zs0}, -z_0)$ также зависит от модуля $(z - z_0)$, интеграл (18) также приведем к сумме интегралов по интервалу $[0, \infty)$:

$$E_z^K(z) = \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} G_K(k_{zs0}, z-z_0) \frac{\partial J(z)}{\partial z_0} dz_0 =$$

$$= \frac{1}{j\omega} \int_z^{\infty} G_K(k_{zs0}, z-z_0) \frac{\partial J(z_0)}{\partial z_0} dz_0 +$$

$$+ \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^z G_K(k_{zs0}, z-z_0) \frac{\partial J(z_0)}{\partial z_0} dz_0 =$$

$$= \frac{1}{j\omega} \int_0^{\infty} G_K(k_{zs0}, -u_1) \frac{\partial J(z+u_1)}{\partial z_0} dz_0 -$$

$$- \frac{1}{j\omega} \int_0^{\infty} G_K(k_{zs0}, u_2) \frac{\partial J(z-u_2)}{\partial z_0} du_2 = 0, \quad (20)$$

где в соответствии с порядком следования интегралов выполнена замена переменных интегрирования $z_0 = z + u_1$, $z_0 = z - u_2$. Кроме того, использована замена переменных дифференцирования $\frac{\partial}{\partial z_0} = -\frac{\partial}{\partial u_2}$.

Подставляя (19) и (20) в (13), получим интегрально-разностное уравнение относительно плотности заряда:

$$-2G_{C0} \int_0^{\infty} \frac{J(z-u)}{u} du - 2G_{C0} \int_0^{\infty} \frac{J(z+u)}{u} du -$$

$$- \int_0^{\infty} G_K(k_{zs0}, u) \frac{\partial J(z-u)}{\partial u} du +$$

$$+ \int_0^{\infty} G_K(k_{zs0}, u) \frac{\partial J(z+u)}{\partial u} du = 0. \quad (21)$$

Если выполнены условия

$$\frac{\partial J(z-u)}{\partial u} = -\frac{\partial J(u-z)}{\partial u}; \quad J(z-u) = J(u-z), \quad (22)$$

то уравнение (21) можно представить:

$$\int_0^{\infty} \left\langle \begin{aligned} & \frac{-2G_{C0}}{u} [J(u-z) + J(z+u)] + \\ & + G_K(k_{zs0}, u) \frac{\partial [J(u-z) + J(z+u)]}{\partial u} \end{aligned} \right\rangle du = 0. \quad (23)$$

При получении решения уравнения (23) необходимо также учесть ограничение на выбор пути интегрирования, включающего заранее не обусловленные границы электродов. Следовательно, значение верхнего предела интегрирования в (23) должно быть не только достаточно большим, но и произвольным числом. Поэтому интегрально-разностное уравнение (23) можно заменить дифференциально-разностным уравнением для подынтегральной функции

$$\frac{-2G_{C0}}{u} [J(u-z) + J(z+u)] +$$

$$+ G_K(k_{zs0}, u) \frac{\partial [J(u-z) + J(z+u)]}{\partial u} = 0. \quad (24)$$

Решение дифференциально-разностного уравнения (24) при $z \neq 0$ будем искать в виде суммы экспоненциальных функций:

при $k_{zs0} > 0$ —

$$[J(u-z) + J(z+u)]^+ =$$

$$= C(z) \left\{ \exp \left[\int_{-z}^{u-z} \frac{2G_{C0} dt}{t G_K^+(k_{zs0}, t)} \right] + \right.$$

$$\left. + \exp \left[\int_z^{u+z} \frac{2G_{C0} dt}{t G_K^+(k_{zs0}, t)} \right] \right\}; \quad (25)$$

при $k_{zs0} < 0$ —

$$[J(u-z) + J(z+u)]^- =$$

$$= C(z) \left\{ \exp \left[\int_{-z}^{u-z} \frac{2G_{C0} dt}{t G_K^-(k_{zs0}, t)} \right] + \right.$$

$$\left. + \exp \left[\int_z^{u+z} \frac{2G_{C0} dt}{t G_K^-(k_{zs0}, t)} \right] \right\}, \quad (26)$$

где $[J(u-z) + J(z+u)]^+$, $G_K^+(k_{zs0}, t)$ и $[J(u-z) + J(z+u)]^-$, $G_K^-(k_{zs0}, t)$ — распределения плотностей зарядов и функции Грина при $k_{zs0} > 0$ и при $k_{zs0} < 0$ соответственно; $C(z)$ — постоянная интегрирования.

Определим $C(z)$, исходя из начальных условий: при $u = 0$ — $C(z) = J(-z) + J(z)$;

при $z = 0$ — $C(0) = 2J(0)$.

Следовательно, плотность распределения зарядов может быть определена по формулам:

при $k_{zs0} > 0$ —

$$J^+(u \pm z) = J(\pm z) \exp \left[\int_{\pm z}^{u \pm z} \frac{2G_{C0} dt}{t G_K^+(k_{zs0}, t)} \right]; \quad (27)$$

при $k_{zs0} < 0$ —

$$J^-(u \pm z) = J(z) \exp \left[\int_{\pm z}^{u \pm z} \frac{2G_{C0} dt}{t G_K^-(k_{zs0}, t)} \right]. \quad (28)$$

Поскольку $J^\pm(u) = J^\pm(-u)$, т. е. изменение знака верхнего предела интегрирования в (27)–(28) не приводит к изменению знака интеграла, то условия (22) выполняются, обеспечивая корректность перехода от интегрального уравнения (17) с разностным ядром к интегрально-разностному уравнению (21).

Функции (27)–(28) могут быть использованы в качестве первого приближения при расчете параметров структуры ВШП. Располагая функцией Грина и выражением для плотности распределения поверхностного заряда, можно получить все остальные характеристики поверхностной акустической структуры, например, выражение для проводимости $Y_{вх}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega, z) J^*(z) dz$, где $Y_{вх}(\omega)$ — входная проводимость ВШП для частоты входного сигнала ω ; $\varphi(\omega, z) = \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} G(z - z_0) J(z_0) dz_0$ — поверхностный потенциал; $J^*(z)$ — сопряженная величина плотности заряда.

Вычисления сингулярных интегралов (27)–(28) можно еще более упростить, если интегралы представить в виде суммы интегралов по конечным интервалам $\left[\frac{v\pi}{2}, \frac{(v+1)\pi}{2} \right]$ и подынтегральную функцию на каждом интервале ($v = 2, 3, \dots$) аппроксимировать дробно-рациональным выражением

$$\frac{1}{t G_K^\pm(k_{zs0}, t)} = \frac{b_v}{\prod_{m=1}^n (t - t_{v,m}^\pm)} = \sum_{m=1}^n \frac{\alpha_{v,m}^\pm}{(t - t_{v,m}^\pm)}, \quad (29)$$

где b_v — постоянный коэффициент; n , $t_{v,m}^\pm$ — соответственно степень и корни полинома, аппроксимирующего функцию $t G_K^\pm(k_{zs0}, t)$ на интервале

$\left[\frac{v\pi}{2}, \frac{(v+1)\pi}{2} \right]$; t — аргумент полинома; $\alpha_{v,m}^\pm$ — коэффициенты разложения левой части выражения (29) на простейшие дроби.

Например, на интервалах $\left[\frac{v\pi}{2}, \frac{(v+1)\pi}{2} \right]$ при ($v \gg 1$) функция Грина $G_K^\pm(1, |t|)$ является почти периодической и хорошо аппроксимируется полиномом не выше четвертой степени, который с точностью до постоянного множителя нетрудно представить в виде произведения $\prod_{m=1}^4 \left[\left\{ \frac{2u}{v\pi} \right\} - t_{v,m} \right]$, где $\left\{ \frac{2u}{v\pi} \right\}$ — дробная часть от числа $\frac{2u}{v\pi}$.

Тогда распределение плотности заряда на интервалах $\left[\frac{v\pi}{2}, \frac{(v+1)\pi}{2} \right]$ будет иметь вид степенной функции

$$J(u) = J \left(\frac{v\pi}{2} \right) \frac{u^{\alpha_{v,1}} \prod_{m=1}^4 \left[\left\{ \frac{2u}{v\pi} \right\} - t_{v,m} \right]^{\alpha_{v,m}}}{\left(\frac{v\pi}{2} \right)^{\alpha_{v,1}} \prod_{m=1}^4 \left[-t_{v,m} \right]^{\alpha_{v,m}}}. \quad (30)$$

При использовании аппроксимации (29) задача вычисления плотности распределения зарядов под электродами встречно-штыревого преобразователя сводится к вычислению значений произведения (30).

Методы разложения в асимптотические ряды интегралов со степенным ядром типа (30) рассмотрены в [1].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе уточнены области определения функции Грина, используемой при анализе и синтезе преобразователей на поверхностных акустических волнах.

Предложен метод решения интегрального уравнения с разностным ядром для плотности распределения зарядов под электродом бесконечной длины.

Интегральное уравнение с разностным ядром с помощью интегрирования по частям сведено к дифференциально-разностному уравнению, решение которого получено в замкнутой форме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богословский С.В., Богословский В.С. Теория нестационарного управления. Учеб. пособие. СПб.: ГУАП, 2005. 381 с.
2. Дмитриев В.Ф. Функция Грина потенциала поверхностной акустической волны // Радиотехника и электроника. 1992. Т. 37, № 4. С. 730–735.
3. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 387 с.
4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 724 с.
5. Уиттекер Е.Т., Ватсон Г.Н. Курс современного анализа / Пер. с англ. под ред. Г.М. Голузина. Ч.1. Основные операции анализа. Л.—М.: ГТТИ, 1933. С. 166, п. 14.
6. Ingebrigsten K.A. Surface waves in piezoelectrics // Applied physics. 1969. V. 40, N 7. P. 2681–2686.
7. Milsom R.F., Reilly N.H., Redwod M. Analysis of generation and detection of surface and bulk acoustic waves by inter digital transducers // IEEE Trans. on SU. 1977. V. 24, N 5. P. 147–166.

ОАО "Авангард", Санкт-Петербург

Материал поступил в редакцию 1.06.2005.

SOLUTION OF A HOMOGENEOUS INTEGRAL DIFFERENCE-KERNEL EQUATION FOR CHARGE DENSITY IN A SURFACE-ACOUSTIC-WAVE TRANSDUCER

S. V. Bogoslovsky

The range of definition of the Green function for the surface acoustic wave potential is accurately specified. The problem of charge distribution is solved, taking into account wave amplitude variations under the electrodes of an inter digital transducer. The initial integral difference-kernel equation which models the charge distribution under the infinite-length electrode is reduced, by partial integration, to a difference-difference equation whose solution is obtained in closed form.