ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК 531.001.362

© М. Я. Марусина, А. В. Флегонтов

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТЕЙ И ТЕОРИИ ГРУПП В МЕХАНИКЕ

Проведен анализ общей теории размерностей физических величин с позиций теоретико-групповых методов. Рассмотрена связь размерностей с группами растяжений. Приведены примеры использования результатов теории размерностей, например таких, как π-теорема, для установления фундаментальных механических закономерностей.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в научные исследования все шире внедряются методы, использующие свойства инвариантности математических и физических закономерностей относительно выбора единиц измерения [1–4]. Можно говорить о некоторой аналогии между теорией размерностей (подобия) и геометрической теорией инвариантов относительно преобразований координат — фундаментальной теории для современной математики и физики.

При изучении любых механических явлений, мы начинаем со схематизации, с выделения основных факторов, определяющих интересующие нас величины. Правильная схематизация очень часто представляет собой трудную задачу, требующую от исследователя большого опыта, интуиции и предварительного качественного выяснения механизма изучаемых процессов. Сущность некоторых задач заключается в проверке правильности гипотез, справедливость которых более или менее вероятна.

Рассматривая совокупность различных механических систем, совершающих некоторые движения, мы всегда можем ограничить класс допустимых систем и движений так, чтобы конкретная система и ее движение определялись конечным числом размерных и безразмерных параметров. Теория размерностей позволяет получить выводы, вытекающие из возможности применять для описания физических закономерностей произвольные или специальные системы единиц измерений. В ряде случаев для нахождения определяющих параметров можно просто установить те факторы, которые необходимы для полного определения искомой величины, числовые значения которой иногда возможно найти только экспериментально.

Для применения теории размерностей нужно знать меньше, чем для составления уравнений движения механической системы. Одной и той же системе определяющих параметров могут соответствовать различные уравнения движения. Уравнения движения не только показывают, от каких параметров зависят искомые величины, но содержат в себе потенциально также все функциональные связи, определение которых составляет математическую задачу. Из этих соображений очевидно, что теория размерностей по существу ограничена. С помощью одной только теории размерностей, например, мы не можем определить функциональные соотношения между безразмерными величинами.

Всякую систему уравнений, заключающую в себе математическую запись законов, управляющих явлением, можно сформулировать как соотношение между безразмерными величинами. Все выводы теории размерностей будут сохраняться при любом изменении физических законов, представленных в виде соотношений между одними и теми же безразмерными величинами. Система определяющих параметров должна обладать свойствами полноты. Среди определяющих параметров должны обязательно быть величины с размерностями, через которые могут быть выражены размерности всех зависимых параметров. Некоторые из определяющих параметров могут быть физическими размерными постоянными.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РАЗМЕРНОСТЕЙ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ВЕЛИЧИН

Основное уравнение измерения: $X = \langle X \rangle \dim X$ дает представление измеряемой физической величины X в виде произведения ее числового значения $\langle X \rangle$ на единицу физической величины $\dim X$. Если через E_α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ обозначить некоторые независимые единицы измерения и если существует выражение E через них, имеющее вид составного одночлена $E_1^{\lambda_1} \ldots E_r^{\lambda_r}$, то выражение $E = E_1^{\lambda_1} \ldots E_r^{\lambda_r} = \dim X$ называется *размерностью* физической величины X в единицах E_α. Следовательно, для физической величины X справедливо представление

$$X = \langle X \rangle \dim X = \langle X \rangle E_1^{\lambda_1} \dots E_r^{\lambda_r}. \qquad (1)$$

Величина X с нулевой размерностью $(\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0)$ называется *безразмерной*. Т.е. безразмерная величина — это такая физическая величина, в размерность которой основные физические величины входят в степени, равной нулю. Величина, безразмерная в одной системе, может быть размерной в другой системе единиц. Например, в Международной системе единиц СИ (LMTIΘNJ — эти символы обозначают символы основных величин: длины *L*, массы *M*, времени *T*, силы электрического тока *I*, термодинамической температуры Θ, количества вещества *N* и силы света *J*) диэлектрическая проницаемость (отношение плотности электрического потока к напряженности электрического поля) ε имеет следующую размерность: $\dim\varepsilon = L^{-3}M^{-1}T^4I^2$. А в электростатической системе СГСЭ (LMT) (основные единицы: сантиметр, грамм, секунда) диэлектрическая проницаемость ε является безразмерной величиной и для вакуума равна единице: $\varepsilon_0 = 1$ (ε_0 — электрическая постоянная).

Размерность не является некоторым неизменным свойством данной физической величины, а зависит от способа построения системы единиц измерения.

Следуя [5], величины $X_1, \dots, X_N$ будем называть *зависимыми* (с точки зрения их размерностей), если существуют такие числа $\chi_1, \dots, \chi_N$, не все одновременно равные нулю, с которыми "комбинация" этих величин $X_1^{\chi_1} \dots X_N^{\chi_N}$ является безразмерной. В противном случае величины $X_1, \dots, X_N$ будем называть *независимыми*.

Одна из основных задач теории размерностей состоит в том, чтобы выяснить, сколько среди физических величин из данного набора $X_1, \dots, X_N$ имеется независимых, отобрать их и выразить остальные величины через независимые.

Пример. В механических системах в качестве независимых единиц измерения принимаются следующие основные величины: $E_1 = L =$ м, $E_2 = M =$ кг, $E_3 = T =$ с. Следовательно, размерности скорости v, ускорения g, плотности вещества ρ, давления p можно записать:

$$\dim v = \text{м}\,\text{с}^{-1} = LT^{-1} = E_1E_3^{-1},$$

$$\dim g = \text{м}\,\text{с}^{-2} = LT^{-2} = E_1E_3^{-2},$$

$$\dim \rho = \text{кг}\,\text{м}^{-3} = ML^{-3} = E_1^{-3}E_2,$$

$$\dim p = \text{кг}\,\text{м}^{-1}\,c^{-2} = ML^{-1}T^{-2} = E_1^{-1}E_2E_3^{-2}.$$

Здесь v, g, ρ — независимые величины, т. к. не существует таких чисел $\chi_1, \dots, \chi_N$, одновременно не равных нулю, с которыми "комбинация" этих величин v, g, ρ была бы безразмерной. Покажем это, рассмотрев комбинацию $v^{\chi_1} g^{\chi_2} \rho^{\chi_3}$, или

$$\left(E_1E_3^{-1}\right)^{\chi_1}\left(E_1E_3^{-2}\right)^{\chi_2}\left(E_1^{-3}E_2\right)^{\chi_3} = \\ = E_1^{\chi_1+\chi_2-3\chi_3}E_2^{\chi_3}E_3^{-\chi_1-2\chi_2}.$$

Приравняв нулю показатели степеней E_1, E_2, E_3, получим систему уравнений, решив которую, найдем: $\chi_1 = 0, \quad \chi_2 = 0, \quad \chi_3 = 0$. Следовательно, все показатели одновременно равны нулю, тогда не существует безразмерной комбинации величин v, g, ρ, и эти величины, согласно приведенному выше определению, являются независимыми.

Рассмотрим комбинацию величин v, ρ, p: $v^{\chi_1} \rho^{\chi_2} p^{\chi_3}$, тогда

$$\left(E_1E_3^{-1}\right)^{\chi_1}\left(E_1^{-3}E_2\right)^{\chi_2}\left(E_1^{-1}E_2E_3^{-2}\right)^{\chi_3} = \\ = E_1^{\chi_1-3\chi_2-\chi_3}E_2^{\chi_2+\chi_3}E_3^{-\chi_1-2\chi_3};$$

решив систему, получим, что χ_1 — любое число, $\chi_2 = \frac{1}{2}\chi_1$, $\chi_3 = -\frac{1}{2}\chi_1$. Значит, существует такой набор показателей степеней χ_1, χ_2, χ_3, при котором не все они одновременно равны нулю, и с этим набором показателей комбинация величин v, ρ, p будет безразмерной. Например, если $\chi_1 = 1 \;\Rightarrow\; \chi_2 = \frac{1}{2}, \quad \chi_3 = -\frac{1}{2}$,

$\dim v\sqrt{\frac{\rho}{p}} = E_1E_3^{-1}\sqrt{\frac{E_1^{-3}E_2}{E_1^{-1}E_2E_3^{-2}}} = 1$. Следовательно, т. к. существуют безразмерные комбинации величин v, ρ, p, то скорость, плотность и давление являются зависимыми величинами.

ГРУППЫ РАСТЯЖЕНИЙ, РАЗМЕРНОСТЬ И ИНВАРИАНТНОСТЬ

Рассмотрим переход от одних независимых основных единиц измерения E_α $(\alpha = 1, \dots, r)$ к другим. Изменение масштабов измерения путем перехода от единиц E_α к новым единицам E'_α

$$E_\alpha = a^\alpha E'_\alpha \qquad (\alpha = 1, \dots, r) \qquad (2)$$

приведет к изменению числового значения величины X в соответствии с вытекающим из формулы (1) равенством

$$\langle X \rangle \dim X =$$
$$= \langle X \rangle (a^1)^{\lambda_1} \ldots (a^r)^{\lambda_r} \; E_1'^{\lambda_1} \ldots E_r'^{\lambda_r} = \langle X \rangle' \dim X',$$

где $\dim X' = E_1'^{\lambda_1} \ldots E_r'^{\lambda_r}$ есть размерность X в новых единицах, и

$$\langle X \rangle' = \langle X \rangle \prod_{\alpha=1}^{r} (a^\alpha)^{\lambda_\alpha}. \qquad (3)$$

Анализ равенства (3) показывает, что изменение числового значения величины X при переходе к новым единицам измерения есть групповое преобразование, принадлежащее группе растяжений H^r [5]. При этом и группа H^r, и размерность $\dim X$ однозначно определены одним и тем же набором чисел $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$. Если имеется некоторый конечный набор $\{X_\nu\}$ из N физических величин, то каждой из величин X_ν соответствует набор $\lambda_1^\nu, \ldots, \lambda_r^\nu$, определяющий ее размерность по формуле (1). В этом случае аналогично получается группа H^r растяжений N-мерного пространства $\mathbf{R}^N(\langle X_1 \rangle, \ldots, \langle X_N \rangle)$.

Итак, связь размерностей с группами растяжений дается, согласно [5], следующей формулировкой: каждому конечному набору $\{X_\nu\}$ из N физических величин, которые могут быть измерены в системе $\{E_\alpha\}$ из r независимых единиц измерения, взаимно однозначно соответствует группа H^r растяжений пространства $\mathbf{R}^N$, определяемая только размерностями величин X_ν в системе $\{E_\alpha\}$. Преобразования, принадлежащие группе H^r, задают закон изменения вида (3) числовых значений $\langle X_\nu \rangle$ при переходе от системы единиц $\{E_\alpha\}$ к системе $\{E'_\alpha\}$, согласно формуле (2).

Важным следствием этого вывода является то, что величина X является безразмерной, если, и только если, ее числовое значение $\langle X \rangle$ есть инвариант соответствующей группы растяжений H^r. Поэтому любой результат теории размерностей может быть получен как некоторый результат теории групп растяжений [5, 6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ ФИЗИЧЕСКИМИ ВЕЛИЧИНАМИ ПУТЕМ СРАВНЕНИЯ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Физические закономерности, устанавливаемые теоретически или непосредственно из опыта, представляют собой функциональные зависимости между величинами, характеризующими исследуемое явление. Численные значения этих размерных физических величин зависят от выбора системы единиц измерения, не связанной с существом явления. Поэтому функциональные зависимости, выражающие собой физические факты, которые не зависят от системы единиц измерения, должны обладать некоторой специальной структурой.

Связь между N размерными величинами $X_1, X_2, \ldots, X_N$, независимая от выбора системы единиц измерения, принимает вид соотношения между $N-K$ величинами $\pi_1, \ldots, \pi_{N-K}$, представляющими собой безразмерные комбинации из N размерных величин (K — число независимых величин). Этот общий вывод теории размерности известен под названием π-теоремы [1, 2, 3, 5, 6]. Чем меньше разность $N-K$, тем более определенным будет решение задачи. При $N-K=1$ задача становится наиболее определенной и, как правило, однозначной. Согласно формулировке π-теоремы, приведенной в [5], любая безразмерная функция физических величин является функцией от безразмерных "комбинаций" этих величин; любое соотношение между физическими величинами равносильно некоторому соотношению между их безразмерными "комбинациями".

Всякое физическое соотношение между размерными величинами можно сформулировать как соотношение между безразмерными величинами. В этом, собственно, и заключается источник полезных приложений метода теории размерностей к исследованию механических задач. Чем меньше число параметров, определяющих изучаемую величину, тем больше ограничена функциональная зависимость и тем проще исследование. В частности, если число основных единиц измерения равно числу определяющих параметров, которые имеют независимые размерности, то с помощью теории размерностей эта зависимость полностью определяется с точностью до постоянного множителя. Число основных единиц измерения можно выбирать произвольно, однако увеличение числа основных единиц связано с введением дополнительных физических постоянных, которые также должны присутствовать среди определяющих параметров.

ПРИЛОЖЕНИЕ АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрим классический пример о движении физического маятника. Это типичная задача, для которой применение анализа размерностей дает хорошие результаты. Из теории малых колебаний

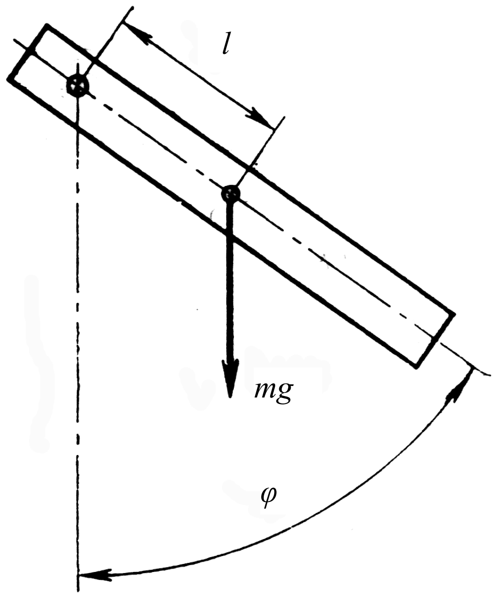

Рис. Физический маятник, центр тяжести которого расположен на расстоянии l от оси вращения

твердого тела вокруг неподвижной оси при отсутствии сил сопротивления известно, что в случае, когда тело массой m имеет устойчивое положение равновесия в гравитационном поле (рис.), его движение описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{m\,g\,l}{J}\varphi \tag{4}$$

с начальными условиями при $t = 0$: $\varphi = \varphi_0$ и $\frac{d\varphi}{dt} = 0$. Здесь φ — угол между осью симметрии тела и вертикалью; t — время; l — расстояние от центра тяжести до оси вращения тела; J — момент инерции тела относительно оси вращения, зависящий только от формы тела и расположения масс в нем, следовательно, $J = ml_c^2 + ml^2$, где l_c — радиус инерции тела относительно оси, проходящей через его центр тяжести и параллельной оси вращения.

Из уравнения (4) и начальных условий очевидно, что в качестве определяющих величин можно выбрать следующие: $m,\ l,\ t,\ g,\ \varphi_0,\ J$. Числовые значения всех остальных величин определяются полностью значениями этих параметров. Тогда существует безразмерная функция

$$\varphi = \varphi(m, l, t, g, \varphi_0, J)\,. \tag{5}$$

Числовые значения функции φ не должны зависеть от системы единиц измерения. Вид этой функции (5) можно определить либо решая уравнение (4), либо с помощью эксперимента.

Итак, мы имеем шесть аргументов функции φ, т. е. шесть определяющих величин $m,\ l,\ t,\ g,\ \varphi_0,\ J$. Соответствующая система независимых величин состоит из размерностей массы, длины и времени $m,\ l,\ t$ (основные механические единицы измерения). Согласно π-теореме, из шести определяющих величин можно составить три $(6-3=3)$ независимых безразмерных комплекса. В системе СИ определяющие величины имеют следующие размерности:

$$\dim m = M, \quad \dim l = L, \quad \dim t = T,$$
$$\dim g = LT^{-2}, \quad \dim J = ML^2, \quad \dim \varphi_0 = 1.$$

Величина φ_0 является безразмерной, следовательно, представляет собой безразмерный комплекс и является одним из аргументов функции φ. Второй безразмерный комплекс должен состоять из величин, в которые не входит масса, следовательно, это — $l,\ t,\ g$. Единственно возможным видом связи между $l,\ t,\ g$ является алгебраическая функция. Предположим, что существует такая зависимость: $t = f(m,l,g)$. Будем искать функцию f в следующем виде $t = C\,m^{\chi_1}\,l^{\chi_2}\,g^{\chi_3}$, где C — неизвестный безразмерный коэффициент пропорциональности, а χ_1, χ_2, χ_3 — неизвестные показатели степени. Приравняв размерности левой и правой частей уравнения $T = M^{\chi_1} L^{\chi_2} (LT^{-2})^{\chi_3} = M^{\chi_1} L^{\chi_2+\chi_3} T^{-2\chi_3}$, получим следующие показатели степени: $\chi_1 = 0$, $\chi_3 = -1/2, \chi_2 = 1/2$. Соответственно $t = C\sqrt{\frac{l}{g}}$, и тогда второй безразмерный комплекс имеет вид $t\sqrt{\frac{g}{l}}$. Третий безразмерный комплекс должен состоять из величин, в которые не входит время T, следовательно, это — $m,\ l,\ J$. Безразмерный комплекс из этих величин: $\frac{J}{ml^2}$. Следовательно, можно записать функцию φ:

$$\varphi = \varphi\left(\varphi_0,\ t\sqrt{\frac{g}{l}},\ \frac{J}{ml^2}\right). \tag{6}$$

Величину $t\sqrt{\frac{g}{l}}$ можно рассматривать как время, выраженное в специальной системе единиц измерения, в которой расстояние от центра тяжести тела до оси вращения и ускорение силы тяжести приняты равными единице.

Если через T обозначить какой-нибудь характерный промежуток времени, например время движения физического маятника между крайним и вертикальным положениями или между двумя одинаковыми фазами, т. е. период колебания, то тогда имеем $T = f_1(m, l, g, \varphi_0, J)$. Кроме того, период можно записать $T = \sqrt{\frac{l}{g}}\, f_2(m, l, g, \varphi_0, J)$. Из π-теоремы следует, что пять аргументов функции f_2 можно свести к двум аргументам, которые представляют собой безразмерные комбинации, тогда $T = \sqrt{\frac{l}{g}}\, f_2\left(\varphi_0, \frac{J}{ml^2}\right)$. Ясно, что T будет зависеть от безразмерных комбинаций $\sqrt{\frac{l}{g}}$ и $\frac{J}{ml^2}$. Разумно искать эту связь как алгебраическую функцию $T = C\left(\sqrt{\frac{l}{g}}\right)^{\chi_1}\left(\frac{J}{ml^2}\right)^{\chi_2}$, где C — безразмерный коэффициент пропорциональности, χ_1 и χ_2 — неизвестные показатели степени. Запишем $T = C\left(L^{\frac{1}{2}}\left(LT^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{\chi_1}\left(\left(ML^2\right)M^{-1}L^{-2}\right)^{\chi_2}$. Приравняв размерности левой и правой частей этого уравнения, найдем, что $\chi_1 = 1$, а χ_2 — любое число. Тогда

$$T = C\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{J}{ml^2}\right)^{\chi_2}. \qquad (7)$$

При $\chi_2 = 0$ $T = C\sqrt{\frac{l}{g}}$ — это выражение для периода совпадает с формулой для математического маятника. А при $\chi_2 = \frac{1}{2}$ $T = C\sqrt{\frac{J}{mgl}}$ — это формула для периода малых колебаний твердого тела вокруг неподвижной оси при отсутствии сил сопротивления.

Решение уравнения (4) показывает, что $C = 2\pi$. Таким образом, для малых колебаний физического маятника с помощью теории размерностей получена формула периода колебания маятника (7) с точностью до постоянного множителя.

Справедливость формул (6) и (7) вытекает из единственного условия, что состояние движения определяется параметрами $m,\ l,\ t,\ g,\ \varphi_0, J$. Для установления этой системы определяющих величин мы использовали уравнения движения, но эти величины можно указать и не прибегая к уравнениям движения. Для характеристики маятника нужно указать m, l, J, далее необходимо указать g, т. к. сущность явления определяется силой тяжести. Наконец, необходимо указать φ_0 и t, т. к. конкретное движение и состояние движения определяются углом крайнего отклонения φ_0 и рассматриваемым моментом времени t. Итак, теория размерностей позволяет получать физические соотношения между размерными величинами как соотношения между безразмерными величинами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Клайн С. Дж.* Подобие и приближенные методы. М.: Мир, 1968. 302 с.
2. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1987. 432 с.
3. *Сена Л.А.* Единицы физических величин и их размерности. М.: Наука, 1988. 432 с.
4. *Мироновский Л.А., Слаев В.А.* Инварианты в метрологии и технической диагностике // Измерительная техника. 1996. № 6. С. 3–14.
5. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
6. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.
7. РМГ 29–99. Рекомендации по межгосударственной стандартизации ГСИ. "ГСП. Метрология. Основные термины и определения (взамен ГОСТ 16263–70)". М.: Изд-во стандартов, 2000. 45 с.
8. МИ 2630-2000 ГСИ. "Метрология. Физические величины и их единицы".

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики (*Марусина М.Я.*)

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН (*Флегонтов А.В.*)

Материал поступил в редакцию 24.11.2004.

APPLICATIONS OF THE DIMENSIONALITY AND GROUP THEORIES TO MECHANICS

M. Ya. Marusina, A. V. Flegontov*

Saint-Petersburg State University of Information Technology, Mechanics and Optics
**Saint-Petersburg Institute of Informatics and Automation RAS*

Analysis of the general theory of physical quantity dimensions in terms of group theoretical methods is presented. The relation between dimensions and extension groups is considered. Examples are given illustrating the use of the dimension theory results, such as the π-theorem, to establish fundamental mechanical relationships.