

УДК 681.5.01: 658.5; 681.5.01: 658.512

© В. Н. Шамберов

ВЛИЯНИЕ СУХОГО ТРЕНИЯ В ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ МЕХАНИЗМАХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПРИВОДНЫМ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЕМ НА ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

Рассматривается задача учета сухого трения в исполнительных механизмах приборных следящих систем с приводным электродвигателем и исследуется влияние сухого трения в исполнительном механизме на возникновение автоколебательных режимов.

ВВЕДЕНИЕ

Впервые электрическая машина для автоматического регулирования была применена в 1871 г. русским ученым-инженером В.Н. Чеколаевым. Новшество быстро нашло распространение в военной технике благодаря стараниям выдающегося русского артиллериста В.Ф. Петрушевского и талантливому изобретателю в области минного дела и артиллерии А.П. Давыдова. В настоящее время электрические машины широко используются в современных системах автоматического управления, автоматических устройствах и приборах.

В автоматических системах электрические машины часто используются в качестве исполнительных электродвигателей, преобразующих подводимый к ним электрический сигнал в угловую скорость вращения вала. С валом связан управляющий рабочий механизм, образующий с электродвигателем исполнительный механизм автоматической системы.

Присутствие сухого трения в исполнительном механизме может вызвать автоколебательный режим и привести к аварийной ситуации. Исследование явления требует создать в рамках сформулированной задачи идеализацию этого явления в виде определенной математической модели, допускающей возможность применения известных методов исследования.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО МЕХАНИЗМА ПРИ УЧЕТЕ СУХОГО ТРЕНИЯ

Уравнение динамики исполнительного механизма с приводным электродвигателем получим из уравнения равновесия моментов (1) и уравнения электрического равновесия (2):

$$c_m i = \left(J_{\text{дв}} + \frac{J_M}{j_p^2} \right) \frac{d\Omega}{dt} + M_{\text{вн.тр.}}(\Omega), \quad (1)$$

где приведенный к валу двигателя динамический момент обусловлен инерционностью ротора ($J_{\text{дв}}$) и инерционностью связанного через редуктор (j_p — передаточное число редуктора) с валом двигателя рабочего механизма (J_M); $c_m i = M$ — вращающий момент двигателя; c_m — коэффициент пропорциональности; $M_{\text{вн.тр.}}(\Omega)$ — приведенный к валу двигателя момент от сил внешнего трения; Ω — угловая скорость вращения вала;

$$L \frac{di}{dt} + Ri + c_e \Omega = U, \quad (2)$$

где i — ток якоря; L — суммарная индуктивность; R — суммарное активное сопротивление; $c_e \Omega$ — противо-ЭДС двигателя; c_e — скоростной коэффициент двигателя.

Момент от сил внешнего трения $M_{\text{вн.тр.}}(\Omega)$ представляет собой сумму двух моментов: от сил вязкого трения $M_{\text{в.тр.}}(\Omega) = k_T \Omega$ (k_T — положительный коэффициент, характеризующий вязкое трение) и от сил сухого трения $M_{\text{с.тр.}}(\Omega)$

$$M_{\text{вн.тр.}} = M_{\text{в.тр.}}(\Omega) + M_{\text{с.тр.}}(\Omega).$$

Для $M_{\text{с.тр.}}(\Omega)$ выполняется:

$$\begin{cases} |M_{\text{с.тр.}}| < M_{\text{тр.0}}, & \text{если } \Omega = 0; \\ M_{\text{с.тр.}} = M(\Omega)_{\text{с.тр.дв.}} \text{Sign}(\Omega), & \text{если } \Omega \neq 0, \end{cases}$$

где $M_{тр.0}$ — момент сил трения покоя, а $M(\Omega)_{с.тр.дв.}$ — момент сил сухого трения движения.

Так что для момента сил внешнего трения справедливо

$$\begin{aligned} |M_{вн.тр.}| < M_{тр.0}, \quad \text{если } \Omega = 0; \\ M_{вн.тр.} = k_T \Omega + M(\Omega)_{с.тр.дв.} \text{Sign}(\Omega), \quad (3) \\ \text{если } \Omega \neq 0. \end{aligned}$$

Момент сил сухого трения движения — монотонно убывающая положительная функция, характеризуемая:

своим максимальным значением

$$M(\Omega)_{с.тр.дв.} \rightarrow M_{тр.ост.} \text{ при } |\Omega| \rightarrow 0,$$

минимальным значением

$$M(\Omega)_{с.тр.дв.} \rightarrow M_{тр.мин} \text{ при } |\Omega| \rightarrow \infty,$$

максимально отрицательным наклоном

$$k'_T = -\left(\frac{d(M(\Omega)_{с.тр.дв.})}{d\Omega} \right)_{|\Omega| \rightarrow 0}.$$

При этом $M_{тр.0} \geq M_{тр.ост.} \geq M_{тр.мин} \geq 0$ [1, 2].

Долгое время практика моделирования сухого трения в исполнительных механизмах ориентировалась на его простейшую идеализацию $M_{тр.0} = M_{тр.ост.} = M_{тр.мин} > 0$, получившую название кулоновской. Качественной особенностью некулоновских идеализаций является учет превышения сил трения покоя над силами трения движения: $M_{тр.0} > M_{тр.ост.} = M_{тр.мин} \geq 0$ — учет сухого трения по Булгакову; $M_{тр.0} = M_{тр.ост.} > M_{тр.мин} \geq 0$ — учет сухого трения по Хайкину; $M_{тр.0} \geq M_{тр.ост.} \geq M_{тр.мин} \geq 0$ — уточненный учет сухого трения.

По уравнениям (1–3) получим следующую модель исполнительного механизма:

$$\left. \begin{aligned} L \frac{di}{dt} &= -Ri - c_e \Omega + U; \\ J \frac{d\Omega}{dt} &= 0, \text{ если } \Omega = 0 \text{ и } |c_M i| < M_{тр.0}; \\ J \frac{d\Omega}{dt} &= -k_T \Omega - M(\Omega)_{с.тр.дв.} \text{Sign}(\Omega) + c_M i, \\ &\text{если } \Omega \neq 0; \\ J \frac{d\Omega}{dt} &= -k_T \Omega - M(\Omega)_{с.тр.дв.} \text{Sign}(c_M i) + c_M i, \\ &\text{если } \Omega = 0 \text{ и } |c_M i| \geq M_{тр.0}, \end{aligned} \right\} (4)$$

Здесь J — приведенный к валу двигателя момент всех вращающихся масс. Коэффициенты c_M, c_e могут быть определены по механическим характеристикам двигателя. При $M_{тр.0} > M_{тр.ост.}$ модель (4) относится к моделям логико-динамического класса. Переменными состояниями являются угловая скорость вращения вала $\Omega = d\theta / dt$, угол поворота θ и ток в обмотке якоря i , внешним воздействием — подводимое к якору двигателя напряжение U .

Использование модели (4) сопряжено с существенными трудностями при аналитическом исследовании. Однако практика моделирования динамики автоматических систем с исполнительными двигателями малой мощности часто допускает пренебрежение моментом инерции ($J = 0$), что позволяет применить вырожденную модель [3] исполнительного механизма в классе кусочно-линейных моделей (представлена на рис. 1 в операторном виде: $p = d/dt$ — символ дифференцирования по времени). Коэффициент k в модели характеризует трение движения. Сухое трение учтено с помощью существенной нелинейности $N(M)$. Нелинейность соответствует учету сухого трения при $M_{тр.0} \geq M_{тр.ост.} \geq M_{тр.мин} \geq 0$ и $k'_T > k_T$.

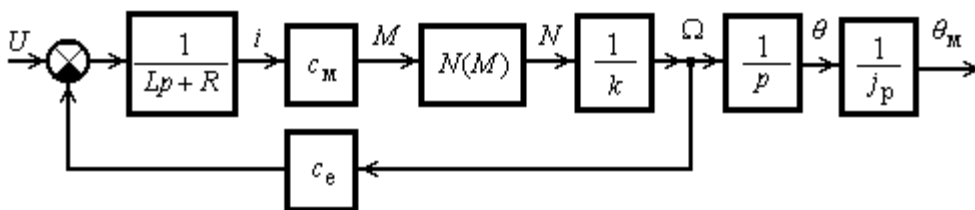


Рис. 1. Математическая модель исполнительного механизма с электроприводом

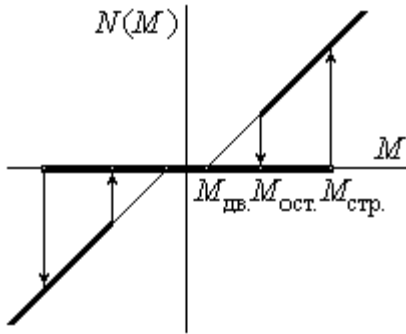


Рис. 2. Существенная нелинейность, определяющая учет сухого трения в исполнительном механизме при $J = 0$ и $k'_T > k_T$

Здесь обозначены: $M_{стр.}$ — страгивающий момент двигателя; $M_{ост.}$ — остановочный момент; $M_{дв.}$ — момент сил сухого трения при движении; N_0 — предыстория состояния нелинейности $N(M)$.

Геометрическая интерпретация нелинейности представлена на рис. 2.

Значения $M_{стр.} = c_M i_{стр.}$, $M_{ост.} = c_M i_{ост.}$ могут определяться экспериментально путем замера токов якоря, при одном из которых подвижная часть механизма приходит в движение ($i_{стр.}$) и при другом — останавливается ($i_{ост.}$) соответственно. Фрикционные колебания в модели (представлены на рис. 3) будут наблюдаться при выполнении условия

$$\frac{c_e c_M}{kR} + 1 > \frac{M_{стр.}}{M_{ост.}} \tag{5}$$

Аналитическое описание нелинейности:

если $|M| \leq M_{ост.}$, то $N = 0$;

если $|M| < M_{стр.}$ и $|M| > M_{ост.}$ и $N_0 = 0$, то $N = 0$;

если $M > M_{ост.}$ и $N_0 \neq 0$ или
если $M \geq M_{стр.}$ и $N_0 = 0$, то $N = M - M_{дв.}$;

если $M < -M_{ост.}$ и $N_0 \neq 0$ или
если $M \leq -M_{стр.}$ и $N_0 = 0$, то $N = M + M_{дв.}$.

для внешнего воздействия U из диапазона

$$\frac{RM_{стр.}}{c_M} < U < \frac{M_{ост.}R}{c_M} \left(\frac{c_e c_M}{Rk} + 1 \right).$$

Фрикционные колебания — быстрые скачкообразные перемещения, чередующиеся с остановками подвижной части исполнительного механизма, наблюдаются в модели механизма только при $k'_T > k_T$.

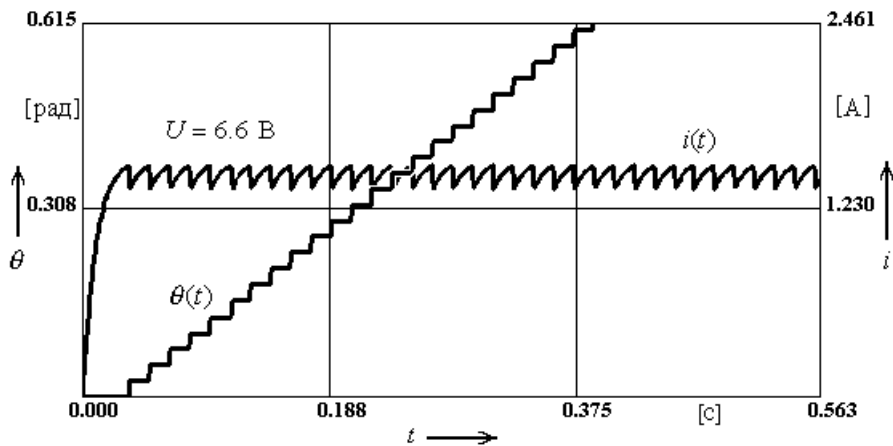


Рис. 3. Фрикционные колебания исполнительного механизма. Параметры системы: $c_e = 0.2 \text{ В}\cdot\text{с}/\text{рад}$, $c_M = 1.0 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{А}$, $k = 0.1 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}/\text{рад}$, $R = 3.0 \text{ Ом}$, $L = 0.032 \text{ Гн}$, $M_{стр.} = 4.00 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $M_{ост.} = 3.65 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $M_{дв.} = 0.00 \text{ Н}\cdot\text{м}$

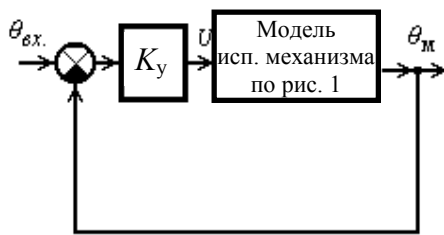


Рис. 4. Математическая модель следящей системы с электроприводом

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СУХИМ ТРЕНИЕМ В ИСПОЛНИТЕЛЬНОМ МЕХАНИЗМЕ

Рассмотрим некоторые примеры влияния сухого трения в исполнительных механизмах электрических следящих автоматических систем на возникновение в них автоколебаний. Простейшая следящая система с приводным электродвигателем и безынерционным усилителем с коэффициентом передачи K_y [4] представлена на рис. 4.

Аналитическое описание нелинейности, учитывающей сухое трение:

Если $|M| \leq M_{\text{дв.}}$, то $N = 0$;
если $|M| < M_{\text{стр.}}$ и $|M| > M_{\text{дв.}}$ и $N_0 = 0$,
то $N = 0$;

если $M > M_{\text{дв.}}$ и $N_0 \neq 0$ или
если $M \geq M_{\text{стр.}}$ и $N_0 = 0$,

то $N = M - M_{\text{дв.}}$;

если $M < -M_{\text{дв.}}$ и $N_0 \neq 0$ или

если $M \leq -M_{\text{стр.}}$ и $N_0 = 0$,

то $N = M + M_{\text{дв.}}$.

Геометрическая интерпретация нелинейности представлена на рис. 5.

Нелинейность учитывает сухое трение при $M_{\text{тр.0}} > M_{\text{тр.ост.}} \geq M_{\text{тр.мин}} \geq 0$, $k'_T < k_T$ и имеет качественные отличия от нелинейности (см. рис. 3), учитывающей сухое трение при $k'_T > k_T$. При такой нелинейности (см. рис. 5) исполнительный механизм не генерирует фрикционные колебания, однако в самой автоматической системе сухое трение может вызвать автоколебания.

В режиме свободных движений динамика автоматической системы будет соответствовать модели

$$\ddot{U} + g_1 \dot{U} = -d_1 \dot{N}(U) - d_2 N(U). \quad (6)$$

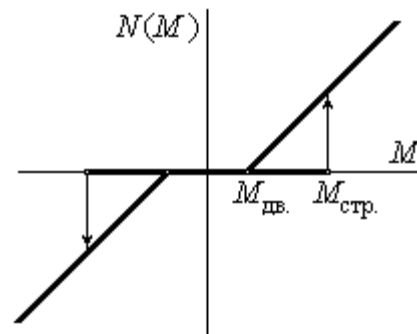


Рис. 5. Существенная нелинейность, определяющая учет сухого трения в исполнительном механизме при $J = 0$ и $k'_T < k_T$

Динамическая модель (6) была исследована методом точечных отображений [5, 6]. Результаты исследования: модель устойчива "в целом", если выполняются условия:

а) при $(g_1 + d_1)^2 > 4d_2$

$$(A + 1 - D)Q > (D - 1) \exp\left(-\frac{A}{A-1} \ln \frac{D-1}{D-A}\right); \quad (7)$$

б) при $(g_1 + d_1)^2 < 4d_2$

$$(2 - D)Q > \sqrt{(1 - D)^2 + A_1^2} \exp\left[-\frac{1}{A_1} \left(\arctg \frac{1 - D}{A_1} + \frac{\pi}{2}\right)\right]; \quad (8)$$

в) при $(g_1 + d_1)^2 = 4d_2$

$$(2 - D)Q > (D - 1) \exp\left(-\frac{1}{D - 1}\right). \quad (9)$$

В выражениях (7–9) обобщенные параметры $A \geq 1$; $A_1 \geq 0$; $D, Q \geq 1$ определяются как $A_1 = -\beta/\alpha$, $A = \alpha_1/\alpha$, $D = -d_1/\alpha$. При этом β и α (при определении параметра A_1) — соответственно мнимая и вещественная части комплексно-сопряженных корней $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ уравнения $\lambda^2 + (g_1 + d_1)\lambda + d_2 = 0$, а $\alpha = \lambda_1$ и $\alpha_1 = \lambda_2$ (при определении A) — вещественные корни (причем $\alpha > \alpha_1$) этого же уравнения. Качественный учет сухого трения характеризует обобщенный параметр $Q = (M_{\text{стр.}} + M_{\text{дв.}})/(M_{\text{стр.}} - M_{\text{дв.}})$: с увеличением Q область устойчивости расширяется. Структура разбиения пространства в соответствии с условиями (7–9) на области устойчивости и области автоколебаний представлена на рис. 6 (значение параметра Q зафиксировано).

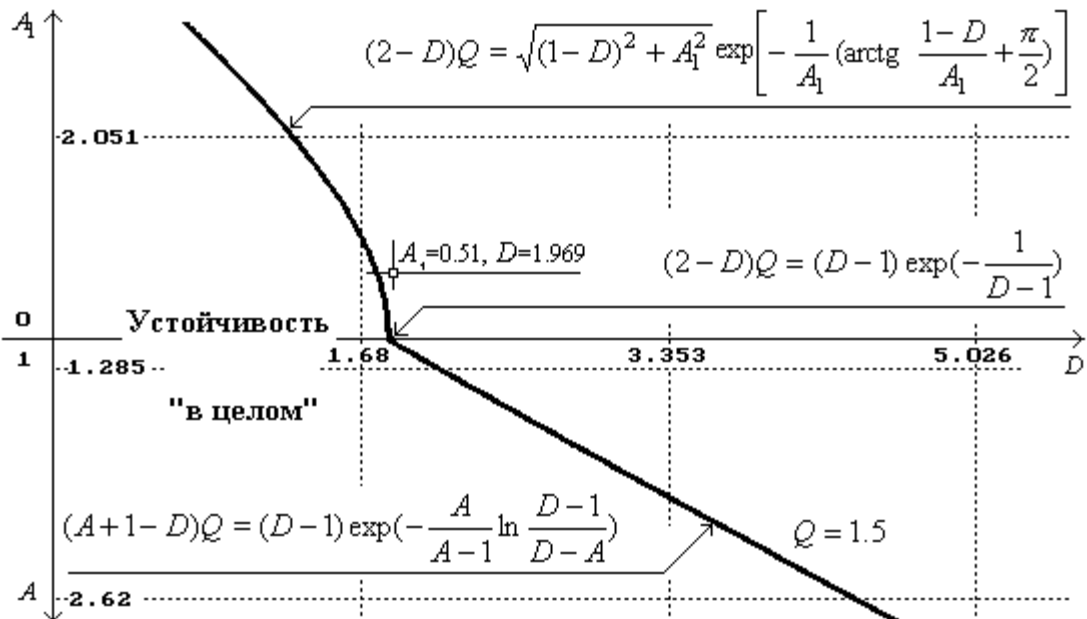


Рис. 6. Структура разбиения пространства обобщенных параметров A, A_1, D, Q на области устойчивости и автоколебаний

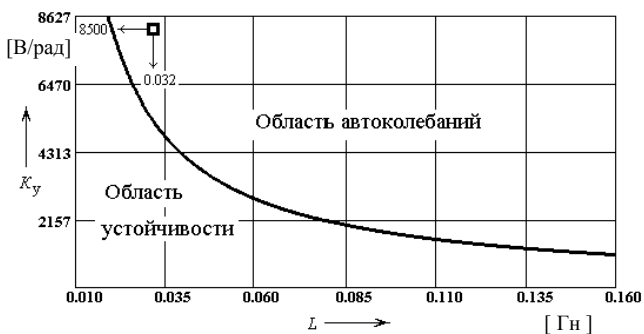


Рис. 7. Структура разбиения пространства исходных параметров (коэффициентов) на области устойчивости и автоколебаний при константных значениях: $R = 3.0 \text{ Ом}, k = 0.01 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}/\text{рад}, c_e = 0.2 \text{ В}\cdot\text{с}/\text{рад}, c_m = 1.0 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{А}, M_{стр.} = 1.00 \text{ Н}\cdot\text{м}, M_{ост.} = 0.25 \text{ Н}\cdot\text{м}$

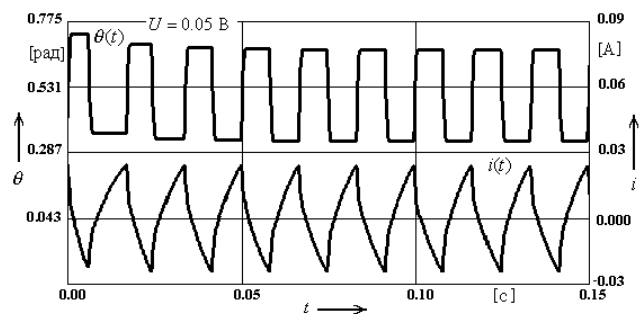


Рис. 8. Автоколебания в следящей автоматической системе с параметрами: $c_e = 0.2 \text{ В}\cdot\text{с}/\text{рад}, c_m = 1.0 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{А}, k = 0.01 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}/\text{рад}, R = 3.2 \text{ Ом}, L = 0.032 \text{ Гн}, M_{стр.} = 1.00 \text{ Н}\cdot\text{м}, M_{ост.} = 0.25 \text{ Н}\cdot\text{м}, K_y = 8500 \text{ В}/\text{рад}$

Невыполнение любого из условий (7–9) вызовет в модели автоколебания. Параметры обобщенной модели (6) определяются через исходные коэффициенты системы согласно выражениям: $d_1 = c_e c_m / Lk$; $d_2 = K_y c_m / Lk j_p$; $g_1 = R / L$. Структуру разбиения можно представить и в исходных параметрах (коэффициентах), например на плоскости K_y и L при фиксированных остальных параметрах (представлено на рис. 7).

Зададим параметрам K_y, L значения из обла-

сти существования автоколебаний $K_y = 8500, L = 0.032$ (см. рис. 7), или $A_1 = 0.51, D = 1.969$ (см. рис. 6). При начальных условиях, соответствующих области притяжения предельного цикла, в системе возникают автоколебания (представлены на рис. 8).

Рассмотрим пример [4] следящей системы, в которой используется пассивное дифференцирующее звено (рис. 9) с параметрами T_1 и T_2 при $T_1 > T_2$.

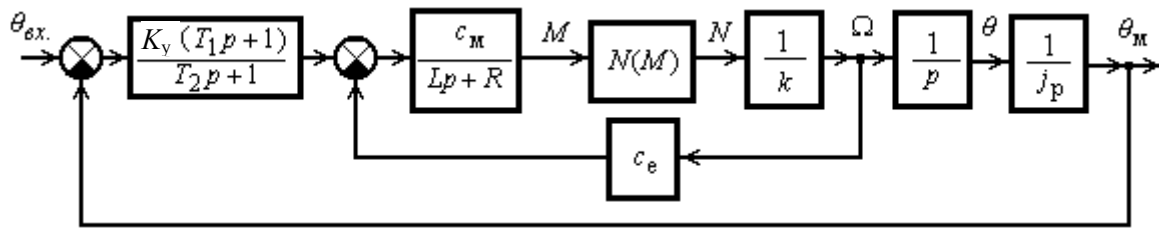


Рис. 9. Математическая модель следящей системы с пассивным дифференцирующим звеном

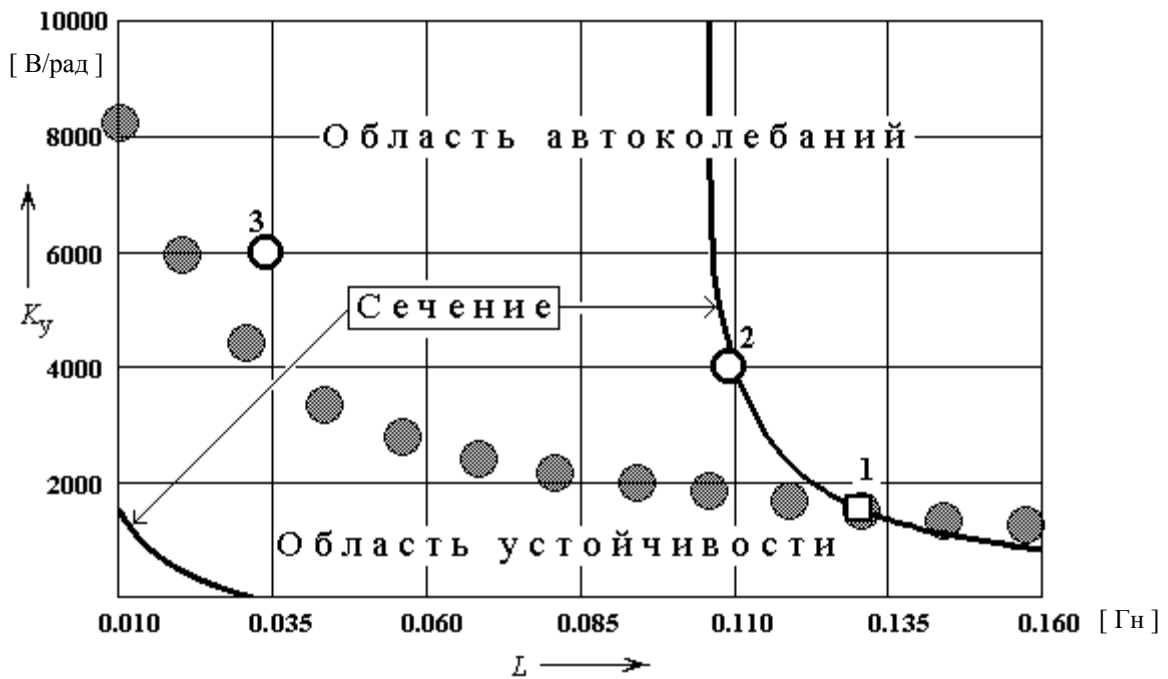


Рис. 10. Структура разбиения пространства исходных параметров следящей системы с дифференцирующим звеном на области устойчивости и автоколебаний

Следящая система с дифференцирующим звеном в отличие от системы рис. 4 является моделью 3-го порядка, однако и к ней (при $L \neq RT_2$) можно применить условия (7–9), определяющие ее устойчивость для определенного соотношения (сечения) ее параметров.

В соответствии с методом сечений пространства параметров [7, 8], для системы рис. 9 можно получить одно сечение, которое определяется уравнением

$$K_y = \frac{R c_e i_p (L - RT_2)}{L(L - RT_1)}. \quad (10)$$

На плоскости параметров K_y, L сечение вы-

глядит в виде двух линий (рис. 10). При выполнении равенства (10) условия устойчивости автоматической следящей системы 3-го порядка совпадают с условиями устойчивости системы 2-го порядка, для которой $g_1 = 1/T_2, d_1 = c_e c_m / Lk, d_2 = K_y c_m / Rk j_p T_2$. Применение метода показало, что для точек сечения при $L < RT_2$ система (6) всегда устойчива, для точек сечения при $L > RT_1$ условия устойчивости (отсутствия автоколебаний) — $L > 0.1267.., K_y < 1552$ (квадратная точка 1, см. рис. 10).

Остальные точки граничной линии (овальные заштрихованные на рис. 10) получены методом машинного моделирования. Граничная линия раз-

деляет плоскость параметров K_y, L на область устойчивости и область автоколебаний (графики автоколебаний для точек 2 и 3 сходны с графиком рис. 8).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование влияния сухого трения в исполнительном механизме приборной следящей системы осуществлено в результате сочетания методов: теории релаксационных (разрывных) колебаний, сечений пространства параметров, точечных отображений и численного интегрирования уравнений динамической модели, что вполне соответствует новой технологии научного познания — совместному использованию строгого анализа и численной машинной математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шамберов В.Н. Моделирование динамики элемента с трением // *Фундаментальные и прикладные проблемы теории точности процессов, машин, приборов и систем: Труды 6-й сессии Международной научной школы (Фридендеровские чтения)*. СПб.: Институт проблем машиноведения РАН, 2003. С. 98–105.
2. Шамберов В.Н. Метод аналитического исследования влияния сухого трения на поведение авторегулируемых динамических систем // *Научное приборостроение*. 2003. Т. 13, № 3. С. 77–83.
3. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975. 248 с.
4. Васильев Д.В., Чуич В.Г. Системы автоматического управления (примеры расчета). М.: Высшая школа, 1967. 419 с.
5. Шамберов В.Н. Исследование типовой промышленной системы автоматического регулирования с некулоновой моделью сухого трения. Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Л.: ЛГУ, 1988. 16 с.
6. Камачкин А.М., Шамберов В.Н. Существенно нелинейные автоматические системы. СПб.: Изд. центр СПбГМТУ, 1995. 74 с.
7. Нелепин Р.А. Об исследовании методом сечений пространства параметров одного класса систем управления // *Изв. АН СССР, Техническая кибернетика*. 1965. № 4. С. 126–133.
8. Нелепин Р.А., Камачкин А.М., Туркин И.И., Шамберов В.Н. Алгоритмический синтез нелинейных систем управления / Под ред. Р.А. Нелепина. Л.: ЛГУ, 1990. 240 с.

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет

Материал поступил в редакцию 28.04.2004.

EXECUTIVE MECHANISMS' DRY FRICTION IMPACT ON THE STABILITY OF AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS WITH ELECTRIC ACTUATING MOTORS

V. N. Shamberov

Saint-Petersburg State Marine Technical University

The problem of dry friction causing self-oscillation in automatic control systems with electric actuating motors is considered.