

УДК 621.57, 536.24, 615.478.5

© А. В. Чернышев, Д. А. Бакай

К ВОПРОСУ ИССЛЕДОВАНИЯ ОДНОРОДНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ ПЛАСТИНЫ-ДЕРЖАТЕЛЯ ТВЕРДОТЕЛЬНОГО АМПЛИФИКАТОРА ДНК

Статья посвящена обзору и анализу факторов, оказывающих влияние на однородность теплового поля пластины-держателя микропробирок в амплификаторе ДНК. Составлена математическая модель процесса и приведены результаты расчетов.

ВВЕДЕНИЕ

Разработчики оборудования для анализа ДНК методом полимеразной цепной реакции (ПЦР), получившего широкораспространенное название "амплификаторы ДНК", сталкиваются с достаточно серьезной проблемой, связанной с определением требуемых технических характеристик еще на стадии проектирования. Дело в том, что общая тенденция в разработке новых типов амплификаторов ДНК, связанная с повышением их производительности, заключается в увеличении вместимости теплового блока и повышении быстродействия. Увеличение вместимости теплового блока подразумевает возможность проведения ПЦР одновременно в максимальном количестве микропробирок или лунок микропланшетов. Сегодня производятся амплификаторы ДНК, рассчитанные на работу с 96-луночными микропланшетами, и известны устройства, рассчитанные на использование планшетов с двойной (192-луночные) и четырехкратной плотностью ячеек (384-луночные). Но увеличение количества проб, одновременно подвергаемых обработке, ставит перед разработчиками оборудования весьма сложную задачу: обеспечение идентичности условий протекания реакции во всех образцах реакционной смеси и достижение максимальной воспроизводимости результатов. Для этого необходимо, прежде всего, обеспечить максимально возможную равномерность распределения теплового поля по пластине-держателю, в которой размещаются микропробирки или микропланшеты.

Для определения направления совершенствования конструкции амплификатора ДНК необходимо, прежде всего, провести анализ причин возникновения неоднородности теплового поля пластины-держателя. Как известно, наиболее распространенной конструктивной схемой амплификатора ДНК является твердотельная, основанная на применении термоэлектрических элементов Пельтье.

Пластину-держатель (рис. 1) условно можно разделить на два элемента: подложку (2) и расположенную на ней пластину (1) с ячейками для размещения микропробирок. Как уже отмечалось, для обеспечения идентичности условий протекания реакции во всех образцах реакционной смеси и достижения максимальной воспроизводимости результатов необходимо, чтобы в каждой микропробирке была в каждый момент времени одна и та же температура. Соответственно каждая ячейка должна находиться в одинаковом температурном поле. Следовательно, сторона подложки, которая непосредственно граничит с ячейками, должна находиться в каждый момент времени в однородном температурном поле.

Рассмотрим причины возникновения неоднородности температурного поля пластины-держателя.

1. Условия взаимодействия с окружающей средой и элементами конструкции.

2. Неоднородность теплофизических свойств материала.

3. Источники (стоки) теплоты.

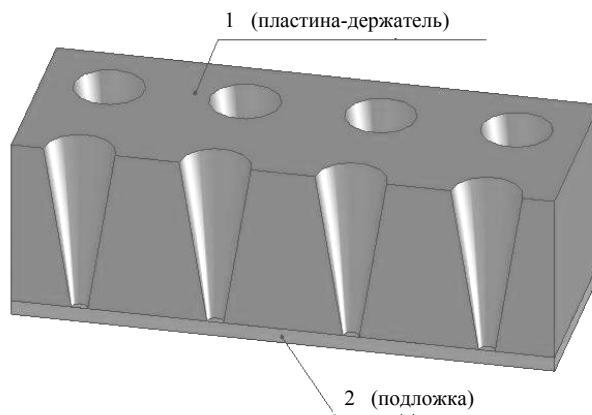


Рис. 1. Схема пластины-держателя

ОСНОВНЫЕ ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ОДНОРОДНОСТЬ ТЕПЛООВОГО ПОЛЯ

Условия взаимодействия с окружающей средой и элементами конструкции

В теплофизике условия взаимодействия с окружающей средой и элементами конструкции описываются граничными условиями, которые отображают тепловые взаимодействия между окружающей средой и поверхностью тела и определяются двумя основными обстоятельствами: наличием внешних (поверхностных) источников тепла и условиями теплообмена между источниками и самой поверхностью тела. Наиболее широко в математическом моделировании используются четыре рода граничных условий.

1. *Граничные условия I рода.* Задается распределение температуры на поверхности S тела как функция координат и времени

$$T_S = f(x, y, z, t), \quad x, y, z \in S. \quad (1)$$

В частном случае может оказаться, что температура на поверхности одинакова на протяжении всего процесса теплообмена и с течением времени не меняется. Это может быть осуществлено при искусственном поддержании постоянной температуры или при особых условиях теплообмена между поверхностью и окружающей средой.

2. *Граничные условия II рода.* Задается распределение плотности теплового потока на поверхности S тела как функция координат и времени

$$q_S = f(x, y, z, t), \quad x, y, z \in S \quad (2)$$

или, используя закон Фурье,

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_S = f(x, y, z, t), \quad x, y, z \in S. \quad (3)$$

При этом следует различать процессы нагрева и охлаждения. Выражение (3) записано для процесса охлаждения тела, т. к. тепловой поток положительный $\left(\frac{\partial T}{\partial n} < 0 \right)$ и направлен по нормали от поверхности тела S . Для процесса нагрева $\left(\frac{\partial T}{\partial n} > 0 \right)$ выражение (2), записанное через закон Фурье, будет выглядеть:

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_S = f(x, y, z, t), \quad x, y, z \in S. \quad (4)$$

В частном случае, когда плотность теплового потока на поверхности S тела является постоянной для любого момента времени t , выражение (2) примет вид

$$q_S = q_0 = \text{const}. \quad (5)$$

Такие условия теплообмена могут возникать при нагревании тел высокотемпературными источниками теплоты. Но более интересен случай тепловой изоляции

$$q_S = 0. \quad (6)$$

Эти условия возникают при условии теплоизоляции поверхности тела, например при теплоизоляционном покрытии.

3. *Граничные условия III рода.* На пространственных границах тела задается зависимость плотности теплового потока за счет теплопроводности со стороны тела от температур поверхности тела T_S и окружающей среды T_C .

В случае охлаждения тела ($T_S > T_C$) имеем

$$q_S = \alpha(T_S - T_C), \quad (7)$$

где α — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплообмена (теплоотдачи) и измеряемый в Вт/(м²·град). Он характеризует интенсивность теплового взаимодействия среды заданной температуры T_C с поверхностью тела.

Используем закон Фурье

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T_S - T_C). \quad (8)$$

В отличие от коэффициента теплопроводности λ коэффициент теплоотдачи α не является физической постоянной, характерной для того или иного вещества. В общем случае он отражает совместное действие конвекции, теплопроводности и зависит от многих факторов. Так например, только конвективная часть α_K определяется геометрической формой и размерами тела, физическими свойствами обтекающего его потока, направлением и скоростью потока, температурными условиями и другими факторами. Поэтому только в первом приближении можно считать коэффициент α постоянным. Таким образом, постановку граничных условий III рода не всегда просто выполнить, т. к. вся сложность вопроса о теплообмене между телом и окружающей средой сосредотачивается на методе определения коэффициента α при конкретных условиях задачи. Иногда физически более обоснованным является рассмотрение задач конвективного теплообмена как сопряженных, т. е. при совместном рассмотрении температурных полей тела и окружающей среды. Это приводит к формулировке граничных условий IV рода.

3. *Граничные условия IV рода.* Такие условия соответствуют теплообмену поверхности тела с окружающей средой (жидкой или газообразной)

или теплообмену соприкасающихся твердых тел, когда температура соприкасающихся поверхностей одинакова. Задаются они как условия равенства температуры и плотности теплового потока на поверхности соприкосновения двух сред (или тел):

$$T_{S1} = T_{S2}, \quad (9)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}. \quad (10)$$

Равенство (9) выражает условие непрерывности температурного поля, а равенство (10) — закон сохранения энергии на поверхности соприкосновения двух сред (или тел). Эти условия еще называют условиями идеального теплового контакта. Однако на практике идеальный тепловой контакт практически не встречается. С целью приближения математического описания процессов к реальным условиям вводят контактное сопротивление R или контактную проводимость $h = \frac{1}{R}$ [2]. С учетом этих уточнений

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \frac{1}{R} [T_2(x, y, z, t) - T_1(x, y, z, t)], \quad (11)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}. \quad (12)$$

Однако, наиболее общая постановка задачи о неидеальном контакте двух тел сделана Я.С. Подстригачем. В предложенной им модели считается, что тела разделяются не материальной поверхностью, а определенным промежуточным слоем, теплофизические характеристики которого отличны от теплофизических характеристик контактирующих тел. Принимая толщину слоя малой по сравнению с другими размерами, рассматриваем этот слой как тонкую оболочку с приведенными теплофизическими параметрами.

Следует также заметить, что в реальных условиях теплообмен осуществляется не только теплопроводностью, но и конвекцией и излучением.

4. Другие граничные условия. Кроме рассмотренных типов граничных условий, возможна постановка других граничных условий. Например, при наличии фазовых превращений (кристаллизация, плавление) на поверхности соприкосновения S условие (10) заменяется на

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} = Q_{\text{ФАЗ}} \frac{\partial S}{\partial n}, \quad (13)$$

где S — движущаяся граница раздела фаз, $Q_{\text{ФАЗ}}$ — теплота фазовых превращений. Или при высоких температурах плотность теплового пото-

ка определяется по закону Стефана—Больцмана. Но эти случаи являются частными и должны рассматриваться каждый раз при постановке условий задачи.

Следует отметить, что рассмотрение влияния условий взаимодействия с окружающей средой (ОС), как будет показано ниже, необходимо неразрывно связать с геометрией самого исследуемого объекта. Кроме этого, влияние граничных условий на тепловое поле исследуемого объекта можно описать аналитически только при достаточно простой геометрии рассматриваемой области. При усложнении геометрии приходится прибегать к численным методам расчета.

В нашем случае имеют место 3 вида взаимодействия с ОС, описываемые граничными условиями II, III и IV родов.

Неоднородность теплофизических свойств материала пластины-подложки

Неоднородность теплового поля пластины-подложки обусловлена как внешними факторами (взаимодействие с окружающей средой), так и внутренними. К последним относится неоднородность теплофизических свойств материала самой пластины-подложки. Такая неоднородность может возникнуть при:

- 1) механических включениях;
- 2) пустотах;
- 3) химической неоднородности материала;
- 4) трещинах и механических повреждениях.

Первые два фактора можно объединить в один — замкнутые области с отличными от основного материала теплофизическими свойствами. Это можно сделать, приняв допущение, что тепло в пустотах распространяется не конвекцией, а теплопроводностью. Разработки методов расчета тел с включениями ведутся давно, однако решения были получены только для частных случаев. Например, для включений кубической формы есть формула расчета коэффициента эффективной теплопроводности

$$\lambda_{\text{ЭФ}} = \frac{1 - \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{2}{3}}\right)}{1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)} \lambda_1, \quad (14)$$

где λ_1 — коэффициент теплопроводности основного тела; λ_2 — коэффициент теплопроводности включения; V_1 — объем основного тела; V_2 — объем включения.

Как доказывается в [3], форма невытянутых включений мало влияет на эффективную теплопроводность системы. Поэтому для инженерных расчетов целесообразно пользоваться формулой Одолевского

$$\lambda_{\text{эф}} = \left[1 - \frac{V_2/V_1}{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{1 - (V_2/V_1)}{3}} \right] \lambda_1. \quad (15)$$

Условия замкнутости включений:

куб — $0 \leq \frac{V_2}{V_1} \leq 1,$
 сфера — $0 \leq \frac{V_2}{V_1} < 0.525,$
 пирамида — $0 \leq \frac{V_2}{V_1} < 0.333.$

Для вытянутых включений можно воспользоваться формулой

$$\lambda_{\text{эф}} = \left[1 - \frac{V_2 L_X}{V_1 l_X} + \frac{\lambda_1 V_2 L_X}{\lambda_2 V_1 l_X \left(\frac{l_X}{L_X} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left(1 - \frac{l_X}{L_X} \right) \right)} \right] \lambda_1, \quad (16)$$

где l_X — характерная длина включения по оси "вытянутости"; L_X — характерная длина основного тела по оси "вытянутости".

Рассмотрим случай внешней микротрещины. Для этого воспользуемся выражениями граничных условий IV рода для неидеального контакта двух тел (11–12).

Действительно, случай микротрещины в теле можно считать случаем неидеального теплового контакта. После необходимых математических преобразований получим (17):

$$2\lambda_2 \delta \Delta(T_1^+ + T_2^-) + 2\lambda_1 \left[\left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^+ - \left(\frac{\partial T_2}{\partial n} \right)^- \right] = 2c\delta \frac{\partial(T_1^+ + T_2^-)}{\partial t};$$

$$2\lambda_2 \delta \Delta(T_1^+ - T_2^-) + 6\lambda_1 \left[\left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)^+ + \left(\frac{\partial T_2}{\partial n} \right)^- \right] - 6 \frac{\lambda_2}{\delta} (T_1^+ - T_2^-) = 2c\delta \frac{\partial(T_1^+ - T_2^-)}{\partial t}; \quad (17)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial(T_1^+ + T_2^-)}{\partial n} = 2\lambda_1 \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial n};$$

$$\lambda_2 \frac{\partial(T_1^+ - T_2^-)}{\partial n} = 2\lambda_1 \frac{\partial \bar{T}_1^*}{\partial n},$$

где λ_1 — коэффициент теплопроводности тела; λ_2 — коэффициент теплопроводности щели; T_1^+, T_2^- — температуры тела на противоположных концах щели; $\bar{T}_1 = \frac{1}{2}(T_1^+ + T_2^-)$; $\bar{T}_1^* = \frac{1}{2}(T_1^+ - T_2^-)$.

К сожалению, учет влияния неоднородности теплофизических свойств материала на тепловое поле объекта выразить аналитически не представляется возможным, поэтому либо прибегают к эмпирическим зависимостям, либо к численным методам. Эмпирические формулы показывают результаты, приемлемые для инженерных расчетов, только при достаточно простой геометрии исследуемого объекта. В нашем случае оценки такого влияния ввиду сложной геометрии объекта целесообразно проводить численными методами.

Источники (стоки) теплоты

Источники тепла весьма разнообразны, и этим в большой мере определяется многообразие тепловых задач. Проведем классификацию источников тепла [4]:

- 1) источники заданной температуры I_T и источники заданной интенсивности (мощности) или заданного количества тепла I_S ;
- 2) положительные (выделяющие тепло) и отрицательные (поглощающие тепло) источники, последние еще называют стоками;
- 3) точечные, линейные, плоские и объемные источники;
- 4) внутренние (внутри тела) и внешние (поверхностные, вне тела);
- 5) мгновенного и непрерывного действия;
- 6) постоянные и переменные во времени;
- 7) неподвижные и подвижные.

Каждый из вышеперечисленных признаков, характеризующих источник тепла, не зависит от теплового состояния тела. Исключение составляет только второй признак: знак температурного источника зависит не только от его температуры,

но и от температуры близлежащих точек тела. Источник I_T положителен, если его температура выше температуры близлежащих точек тела. Со временем источник I_T может стать отрицательным. Это может произойти в результате понижения температуры самого источника или повышения температуры тела под воздействием других источников. Заметим, что внутренние источники могут быть только заданной интенсивности, т. е. I_S , тогда как внешние могут быть как заданной интенсивности I_S , так и заданной температуры I_T .

Мощность источника в общем случае есть зависимость от пространственных координат и времени

$$q_V = f(x, y, z, t). \quad (18)$$

Вообще, функции, описывающие источник, могут быть весьма разнообразны. Например, теплота Джоуля, выделяемая при прохождении тока по электрическому проводнику, равна

$$q_V = \frac{I^2 R}{V}, \quad (19)$$

где I — ток, протекающий по проводнику, [А]; V — объем проводника, [м³]; R — электрическое сопротивление материала проводника, [Ом].

Ввиду многообразия форм источников и стоков тепла, механизмов воздействия и физических основ процессов, протекающих в них, необходимо рассматривать их воздействие на объект отдельно в каждом конкретном случае. Кроме того, как в случае с условиями взаимодействия объекта с ОС, существенной является и геометрия рассматриваемого объекта, как будет показано ниже на примере электрического нагревателя. В связи с этим нет общей аналитической модели, описывающей все многообразие геометрических форм объектов и источников. Наиболее целесообразным видится проведение численных экспериментов, учитывающих и геометрию исследуемого объекта, и вид, и формы источника или стока тепла согласно представленной выше классификации. Физические модели, соответствующие процессам, приводящим к выделению или поглощению тепла в некотором объеме, в большинстве случаев хорошо изучены и имеют аналитическое выражение. Поэтому их математическое моделирование в численном эксперименте не составляет особого труда.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для оценки влияния различных факторов на однородность теплового поля исследуемого объ-

екта разработана математическая модель, позволяющая моделировать происходящие процессы и анализировать результаты теоретического исследования. Математическая модель содержит исходные аналитические уравнения и ограничения, накладываемые на область применения этих уравнений. Перед составлением математической модели процессов, протекающих в исследуемом объекте, введем ряд допущений:

— все рассматриваемые материалы однородны по составу и изотропны по теплофизическим свойствам;

— контакты между отдельными элементами устройства принимаем идеальными;

— теплоемкость c , плотность ρ и коэффициент теплопроводности λ в твердом теле постоянны и не зависят от температуры;

Процесс переноса тепла в твердом теле описывается уравнением теплопроводности. Запишем его в дифференциальной форме:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \operatorname{div}(\operatorname{grad} T) + q_V, \quad (20)$$

где q_V — мощность внутренних источников (стоков) теплоты.

Начальные условия. Все материалы в начальный момент времени имеют одинаковую температуру

$$T_0^i = T_0. \quad (21)$$

Граничные условия для пластины-держателя. Боковые стенки (рис. 2) пластины-держателя (S1) теплоизолированы, т. е. все боковые поверхности определяют граничные условия II рода с нулевым тепловым потоком

$$q_{P1}^S = 0. \quad (22)$$

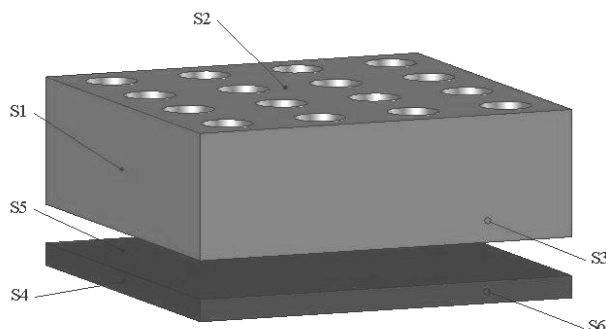


Рис. 2. Обозначение поверхностей для граничных условий

Сверху (S2) — естественная конвекция, граничные условия III рода:

$$q_{P1}^U = -q_{AV} = -\alpha(T_P^U - T_{AV}). \quad (23)$$

Снизу (S3) — контакт с пластиной-подложкой, т. е. условия сопряжения, граничные условия IV рода:

$$T_{P1}^D = T_{P2}^U, \quad \lambda_{P1} \frac{\partial T_{P1}^D}{\partial n} = \lambda_{P2} \frac{\partial T_{P2}^U}{\partial n}. \quad (24)$$

Граничные условия для пластины-подложки.

Боковые стенки пластины-подложки (S4) также теплоизолированы. Граничные условия II рода с нулевым тепловым потоком

$$q_P^{S2} = 0. \quad (25)$$

Сверху (S5) — контакт с пластиной-подложкой, т. е. условия сопряжения, граничные условия IV рода:

$$T_{P1}^D = T_{P2}^U, \quad \lambda_{P1} \frac{\partial T_{P1}^D}{\partial n} = \lambda_{P2} \frac{\partial T_{P2}^U}{\partial n}. \quad (26)$$

Снизу (S6) — подогрев с постоянным тепловым потоком, т. е. граничные условия II рода

$$q_{P2}^D = \text{const}. \quad (27)$$

Математическая модель, описывающая тепловое состояние пластины-держателя из двух элементов — подложки и пластины с ячейками, — представляет собой систему уравнений (20)–(27).

РЕШЕНИЕ

Решение задачи о теплопроводности в твердом теле такой сложной геометрии возможно только численными методами. Воспользуемся методом контрольного объема в конечно-разностной постановке. Для этого составим дискретный аналог уравнения теплопроводности.

Для корректной дискретизации дифференциального уравнения теплопроводности (20) введем необходимые допущения:

— узел, вокруг которого формируется контрольный объем, располагается в его центре так, что грань контрольного объема делит расстояние между соседними узлами в одном направлении пополам;

— границы раздела материалов и элементов конструкции совпадают с гранями соответствующих прилегающих контрольных объемов;

— значение зависимой переменной в узле превалирует в окружающем его контрольном объеме;

— значение теплофизических характеристик

потоков зависимых переменных через грани контрольного объема могут быть представлены через значения этих величин в центрах соответствующих граней.

Проинтегрируем уравнение теплопроводности по времени и по элементарному объему и используем конечно-разностную схему:

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \int_V c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV dt = \\ & = \int_t^{t+\Delta t} \int_V \text{div}(\lambda \text{grad} T) dV dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_V q_v dV dt. \end{aligned}$$

Примем допущение, что теплоемкость и плотность материала не являются функциями температуры. Рассмотрим каждое слагаемое отдельно:

$$\begin{aligned} \rho c \int_t^{t+\Delta t} \int_V \frac{\partial T}{\partial t} dV dt &= \rho c \Delta V \Delta T \Big|_{T^0}^{T^1} = \\ &= \rho c \Delta x \Delta y \Delta z \Delta T \Big|_{T^0}^{T^1} = +\rho c (T_C - T_C^*) \Delta x \Delta y \Delta z, \end{aligned}$$

$$\text{div}(\lambda \text{grad} T) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right).$$

Разобьем на три интеграла:

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \int_V \text{div}(\lambda \text{grad} T) dV dt = \\ & = \int_t^{t+\Delta t} \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_V \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) dV dt + \\ & \quad + \int_t^{t+\Delta t} \int_V \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) dV dt, \end{aligned}$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV dt = \left(\lambda_R \frac{T_R - T_C}{\delta x_R} - \lambda_L \frac{T_C - T_L}{\delta x_L} \right) \Delta t \Delta y \Delta z,$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_V \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) dV dt = \left(\lambda_T \frac{T_T - T_C}{\delta y_T} - \lambda_D \frac{T_C - T_D}{\delta y_D} \right) \Delta t \Delta x \Delta z,$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_V \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) dV dt = \left(\lambda_F \frac{T_F - T_C}{\delta z_F} - \lambda_B \frac{T_C - T_B}{\delta z_B} \right) \Delta t \Delta x \Delta y.$$

Для рассмотрения третьего слагаемого примем, что объемный источниковый член состоит из части

q_C , не зависящей от температуры, и части $q_T T$, зависящей от температуры. Тогда

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_V q_V dV dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_V (q_C + q_V T) dV dt = \\ = q_C \Delta t \Delta x \Delta y \Delta z + q_T (T_C - T_C^*) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Итак, уравнение теплопроводности в конечно-разностном виде запишется так:

$$c\rho (T_C - T_C^*) \Delta x \Delta y \Delta z = \left(\lambda_R \frac{T_R - T_C}{\delta x_R} - \lambda_L \frac{T_C - T_L}{\delta x_L} \right) \Delta t \Delta y \Delta z + \\ + \left(\lambda_T \frac{T_T - T_C}{\delta y_T} - \lambda_D \frac{T_C - T_D}{\delta y_D} \right) \Delta t \Delta x \Delta z + \\ + \left(\lambda_F \frac{T_F - T_C}{\delta z_F} - \lambda_B \frac{T_C - T_B}{\delta z_B} \right) \Delta t \Delta x \Delta y + \\ + q_C \Delta t \Delta x \Delta y \Delta z + q_T (T_C - T_C^*) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

После математических преобразований получим дискретный аналог для трехмерной области с объемными источниками (стоками) тепла

$$a_C T_C = a_R T_R + a_L T_L + a_T T_T + a_D T_D + a_F T_F + a_B T_B + C,$$

где:

$$a_R = \lambda_R \frac{\Delta y \Delta z}{\delta x_R} \Delta t, \quad a_L = \lambda_L \frac{\Delta y \Delta z}{\delta x_L} \Delta t,$$

$$a_T = \lambda_T \frac{\Delta x \Delta z}{\delta y_T} \Delta t, \quad a_D = \lambda_D \frac{\Delta x \Delta z}{\delta y_D} \Delta t,$$

$$a_F = \lambda_F \frac{\Delta x \Delta y}{\delta z_F} \Delta t, \quad a_B = \lambda_B \frac{\Delta x \Delta y}{\delta z_B} \Delta t,$$

$$a_C = a_R + a_L + a_T + a_D + a_F + a_B + a_C^* - q_T \Delta x \Delta y \Delta z,$$

$$a_C^* = c\rho \Delta x \Delta y \Delta z, \quad C = a_C^* T_C^* + q_C \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t.$$

РЕЗУЛЬТАТЫ

Для оценки влияния составляющих второго фактора (механических включений, пустот и химических неоднородностей) был проведен ряд численных экспериментов. Для уменьшения количества расчетов три указанных выше случая были заменены одним — наличием области с отличными от основного материала теплофизическими параметрами.

Расчет проводился для пластины-подложки из алюминия ($\rho = 2740 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 209 \text{ Вт/(м·К)}$, $c = 880 \text{ Дж/(кг·К)}$) толщиной 2 мм. Рассматривались три случая: 1) механическое включение из стали ($\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 43 \text{ Вт/(м·К)}$, $c = 473 \text{ Дж/(кг·К)}$);

2) механическое включение из меди ($\rho = 8900 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 360 \text{ Вт/(м·К)}$, $c = 410 \text{ Дж/(кг·К)}$); 3) воздушная пора ($\rho = 1.205 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 0.02637 \text{ Вт/(м·К)}$, $c = 1006 \text{ Дж/(кг·К)}$).

Необходимо заметить, что при расчете для области с воздухом предполагалось, что передача тепла через нее осуществляется не конвекцией, а теплопроводностью. Размер неоднородности — $0.4 \times 0.4 \times 0.3 \text{ мм}^3$. Расстояние от верхней грани пластины до верхней грани неоднородности — 0.4 мм. Расчет проводился при нагреве пластины до температуры $102 \text{ }^\circ\text{C}$. Тепловой поток, подводимый к нижней поверхности пластины, составлял 20000 Вт/м^2 . На рис. 3 приведены результаты расчета: разности температур поверхности материала без неоднородности и температур поверхностей над неоднородностями в материалах с включениями.

Проведены исследования разности температур поверхности материала без неоднородности и температур поверхностей над неоднородностями в материалах в зависимости от размеров включений. На рис. 4 приведены результаты расчетов со следующими размерами включений: 1 — $1 \times 1 \times 1 \text{ мм}^3$; 2 — $0.8 \times 0.8 \times 0.8$; 3 — $0.6 \times 0.6 \times 0.6 \text{ мм}^3$, и 4 — $0.4 \times 0.4 \times 0.4 \text{ мм}^3$.

Как и в предыдущем примере, расчет проводился для пластины-подложки из алюминия толщиной 2 мм. В качестве неоднородности рассматривались механические включения, обладающие теплофизическими характеристиками стали. Для наглядности был выбран наиболее неблагоприятный вариант расположения неоднородности, когда верхние грани включения и пластины совпадают.

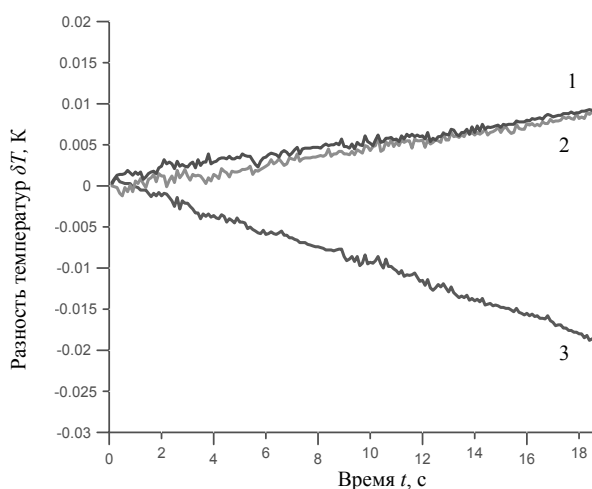


Рис. 3. Влияние материала неоднородности на разность температур. 1 — механическое включение из стали; 2 — механическое включение из меди; 3 — воздушная пора

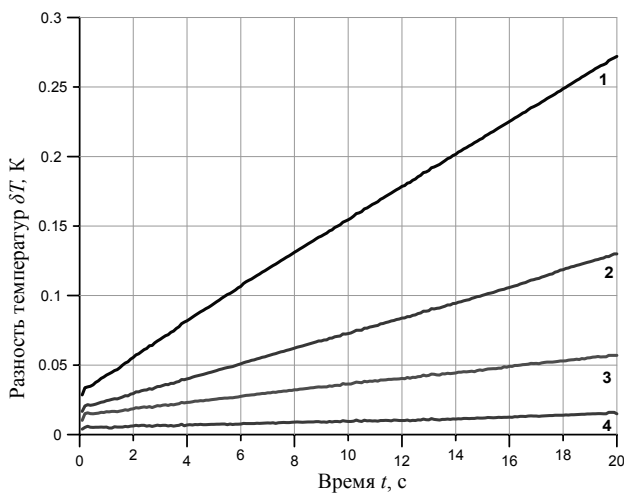


Рис. 4. Влияние размера неоднородности на разность температур. 1 — $1 \times 1 \times 1 \text{ мм}^3$, 2 — $0.8 \times 0.8 \times 0.8 \text{ мм}^3$, 3 — $0.6 \times 0.6 \times 0.6 \text{ мм}^3$ и 4 — $0.4 \times 0.4 \times 0.4 \text{ мм}^3$

Расчет проводился при нагреве пластины до температуры 102°C . Тепловой поток, подводимый к нижней поверхности пластины, составлял $20\,000 \text{ Вт/м}^2$. Как видно из приведенных результатов, максимальная разница между температурами на поверхности пластины при наличии неоднородности и при ее отсутствии вполне укладывается в допустимые значения отклонения температуры и не превышает 0.275 К .

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что неоднородности теплофизических свойств материала не приводят к существенному влиянию на общее тепловое поле пластины-подложки. При этом надо учитывать, что размеры реальных включений в действительности на порядок меньше.

На основе предложенной математической модели проведены исследования влияния источников тепла на равномерность теплового поля пластины-держателя (рис. 5–6). В качестве примера рассмотрен вариант, в котором пластина-держатель и подложка из алюминиевого сплава окружены воздухом и подогреваются снизу тонкопленочным электрическим нагревателем. Размеры пластины-держателя и подложки — $64 \times 64 \text{ мм}^2$, толщина пластины-держателя — 11 мм , толщина подложки — 2 мм . На пластине-держателе располагается 16 ячеек. Теплофизические свойства материала пластины-держателя и подложки: $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 209 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$, $c = 880 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$. Мощность электрического нагревателя — 60 Вт . Теплообмен — естественная конвекция.

Как видно из представленных рисунков, влияние источников и стоков тепла оказывают наибо-

лее существенное влияние на распределение температуры внутри исследуемого объекта. Распределение температуры в подложке неоднородно. Более темные пятна — это дно ячеек. Там прогрев подложки осуществляется более интенсивно (рис. 6), т. к. в других местах происходит рассеивание тепла за счет теплопроводности металла. Однако на температурном поле пластины с ячейками эта неоднородность практически не сказывается (рис. 5).

Предложенная математическая модель позволила провести исследование усовершенствованной формы пластины держателя, в которой с целью повышения скорости нагрева/охлаждения была значительно снижена масса. Снижение массы обеспечивалось выемкой материала пластины между ячейками для микропробирок. Расчет такой усовершенствованной пластины держателя наглядно демонстрирует, как однородность теплового поля зависит от геометрических параметров исследуемого объекта. Все теплофизические свойства материалов взяты неизменными из предыдущего расчета. В данном расчете исключено влияние геометрических характеристик источника тепла. Для этого подвод тепла осуществляется равномерно по нижней поверхности подложки. Тепловой поток, подводимый к нижней поверхности подложки, составлял $20\,000 \text{ Вт/м}^2$. Из представленного материала (рис. 7) видно, что тепло по пластине распределено неравномерно: отчетливо видно, что в центре пластины-держателя нагрев осуществляется наиболее интенсивно. Это результат не только проявления условий взаимодействия с ОС, но и самой геометрии пластины-держателя. Очевидно, что такой интенсивный нагрев центра обусловлен недостаточным по сравнению с базовой (рис. 5–6) геометрией пластины-держателя отводом тепла за счет теплопроводности самого материала. Однако и по краям мы наблюдаем некоторую неравномерность прогрева материала. Это результат взаимодействия с ОС.

Следует отметить, что все рассмотренные факторы, влияющие на однородность теплового поля пластины-держателя, наиболее сильно выражены в динамическом режиме нагрева/охлаждения. В стационарном режиме — режиме термостатирования — влияние этих факторов практически незаметно (рис. 8).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ факторов, влияющих на равномерность теплового поля пластины-держателя твердотельного амплификатора. Показаны результаты численного моделирования влияния различных факторов на тепловое поле, позволяющие

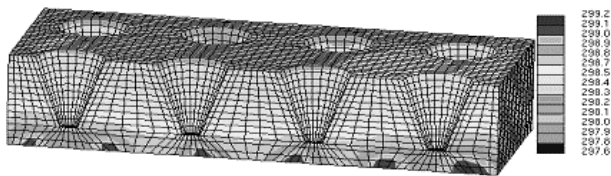


Рис. 5. Влияние источников тепла (разрез пластины с ячейками)

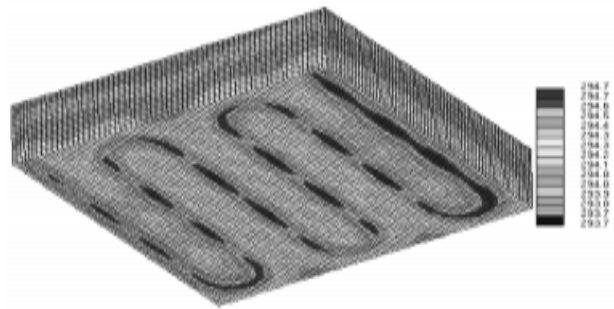


Рис. 6. Влияние источников тепла (вид снизу на подложку)

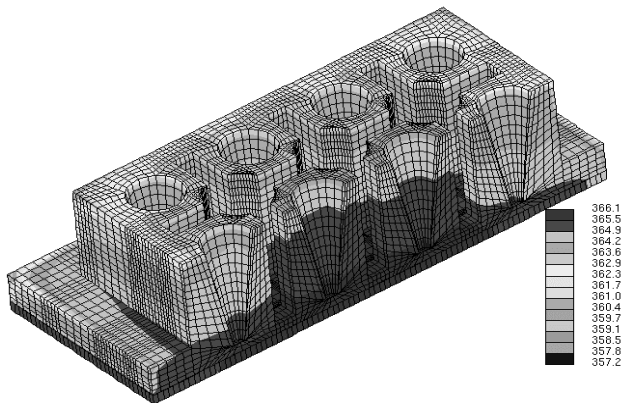


Рис. 7. Влияние условий взаимодействия с окружающей средой и геометрических характеристик пластины-держателя

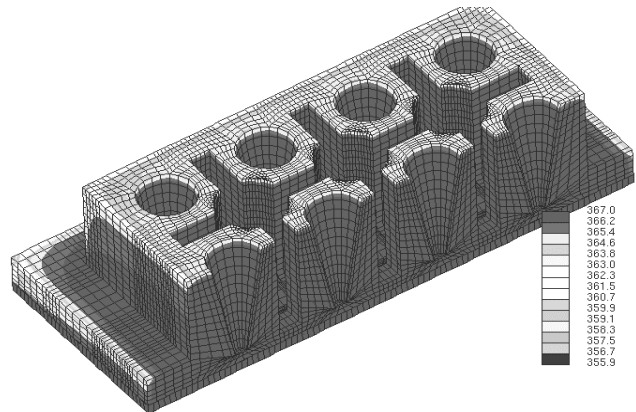


Рис. 8. Режим термостатирования

сделать несколько выводов и рекомендаций.

1. Необходимо различать два основных режима работы амплификатора — динамический и статический.

2. Допустимое пренебрежение некоторыми факторами, влияющими на однородность теплового поля пластины-держателя в статическом режиме, совершенно неприемлемо при исследовании динамического режима.

3. Большое значение имеет геометрическая форма исследуемого объекта. При расчетах неоднородности теплового поля исследуемого объекта необходимо учитывать это обстоятельство и рассматривать его в совокупности с остальными факторами, такими как взаимодействие с окружающей средой и др.

4. Для оценочных расчетов можно пренебречь влиянием некоторых факторов на общее тепловое поле исследуемого объекта. Например, неоднородностью теплофизических свойств материала объекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пехович А.И., Жидких В.М. Расчеты теплового режима твердых тел. Л.: Энергия, 1976. 352 с.
2. Кит Г.С., Побережный О.В. Нестационарные процессы в телах с дефектами типа трещин. Киев: Наукова думка, 1992. 216 с.
3. Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П., Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Справочная книга. Л.: Энергия, 1974. 264 с.
4. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высш. школа, 1978. 328 с.
5. Чернышев А.В., Белова О.В. Метод решения сопряженной задачи конвективного теплообмена на примере термостатирующего устройства // Вестник МГТУ. Сер. Машиностроение. 1998. № 4. С. 77–87.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Материал поступил в редакцию 1.11.2004.

**TO THE SUBJECT OF THERMAL FIELD UNIFORMITY
STUDIES OF THE SUPPORT PLATE
IN A SOLID-STATE DNA AMPLIFICATOR**

A. V. Chernyshev, D. A. Bakay

N.E. Bauman Moscow State Technical University

The paper gives an overview and analysis of factors affecting the thermal field uniformity of the micro vials support plate in a DNA amplificator. A mathematical model of the process and calculation results are presented.