ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2004, том 14, № 3, с. 65–75

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК 534.23

© Б. П. Шарфарец

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МНОЖЕСТВЕННОГО РАССЕЯНИЯ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ КОЛИЧЕСТВЕ РАССЕИВАТЕЛЕЙ В ОДНОРОДНОМ ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В статье предлагается подход к решению задачи множественного рассеяния акустической волны на совокупности тел в однородном безграничном пространстве. Для этого рассматривается задача о множественном рассеянии двух тел, находящихся в первичном поле плоской волны. Предполагаются известными исходные невозмущенные амплитуды рассеяния каждого рассеивателя. Решение строится путем учета многократного перерассеяния плоских волн между рассеивателями. Получены интегральные уравнения, позволяющие рассчитать результирующие амплитуды рассеяния каждого из тел и совокупную амплитуду рассеяния системы, состоящей из двух рассеивателей. Показано, что решение этой задачи позволяет решить задачу о поле рассеяния произвольного числа рассеивателей. Приведены выражения для амплитуды рассеяния в случае произвольного первичного поля. Продемонстрирована связь интегральных уравнений для задач о множественном рассеянии в однородном пространстве и о множественном рассеянии одиночного тела вблизи границы раздела. Приведены приближенные выражения для расчета амплитуды рассеяния при множественном рассеянии.

ВВЕДЕНИЕ

Задаче множественного рассеяния, когда в некотором первичном поле находятся не менее двух рассеивателей, а их взаимным влиянием друг на друга (вторичным перерассеянием) пренебречь нельзя, посвящено большое число публикаций. Укажем лишь некоторые из них: [1–15]. Сюда же следует, очевидно, отнести и публикации, посвященные задачам рассеяния, вызванного наличием отражающих границ и неоднородностей среды. В этом случае для эффекта множественного рассеяния достаточно наличия одного рассеивателя и границы раздела или неоднородности среды. Здесь упомянем также лишь некоторые публикации: [16–24].

В работах [1–15] рассматривается однородное двух- или трехмерное пространство с помещенными в поле некоторой первичной волны двумя и более рассеивателями. Решение ищется в виде суммы первичной волны и результирующих полей всех рассеивателей. На границах рассеивателей накладываются краевые условия, а также условия излучения Зоммерфельда на бесконечности. Все поля раскладываются в ряды по сферическим или цилиндрическим функциям (в зависимости от размерности задачи) и с привлечением неких методов, например метода Т-матриц [2, 6, 7, 10, 11, 13], либо теорем сложения для сферических и цилиндрических функций [4, 5, 8, 9], находятся неопределенные коэффициенты в разложениях полей рассеяния. После чего могут быть определены амплитуды рассеяния каждого или совокупности рассеивателей в целом. При таком подходе автоматически учитывается эффект множественного рассеивания.

Эффект множественного рассеивания возникает и при наличии границ раздела. Так, в работе [20] рассматривается задача о поле рассеяния сферы, находящейся у акустически мягкой границы, которая сводится авторами к задаче о множественном рассеянии двух сфер в однородном пространстве [8].

В целом, несмотря на прозрачный формализм, описанный подход решения задачи множественного рассеяния на нескольких телах не лишен недостатков. Во-первых, необходимо рассчитывать в общем случае счетное множество искомых коэффициентов в разложениях полей. Во-вторых, эта процедура резко усложняется с ростом числа рассеивателей.

В настоящей работе для решения задачи множественного рассеяния акустической волны на нескольких телах предлагается альтернативный подход, заключающийся в учете многократно переотраженных (перерассеянных) между телами плоских волн. Учет перерассеянных плоских волн осуществляется с помощью использования невозмущенных амплитуд рассеяния каждого из тел, что приводит к интегральным уравнениям, позволяющим вычислять возмущенные амплитуды рассеяния через невозмущенные. Ранее сходная методика была применена автором при решении задач расчета результирующего рассеяния протяженных излучателей и рассеивателей в условиях влияния границ раздела и слоистой неоднородности среды [25–27]. Единственное ограничение подхода заключается в том, что должны быть известны невозмущенные амплитуды рассеяния тел, однако это требование не представляется чрезмерным, т. к. "паспортом" рассеивателя является именно его амплитуда рассеяния в условиях однородной безграничной среды при отсутствии посторонних тел.

1. ЕДИНИЧНЫЙ РАССЕИВАТЕЛЬ В ПОЛЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЕРВИЧНОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим задачу в однородной трехмерной безграничной среде. Рассмотрение начнем с простого частного случая, когда единственный рассеиватель с центром в точке (x_0, y_0, z_0) находится в первичном поле звукопрозрачного направленного источника, находящегося в начале координат. Поле излучателя вычисляется из выражения [25]

$$u(\mathbf{x}) = \frac{i}{2\pi}\int_{R^2}\frac{D(\mathbf{k}_m)}{\alpha}\exp(i\mathbf{k}_m\mathbf{x})\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y, \quad m = 1,2. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{k}_1 = (k_x, k_y, \alpha)$ и $\mathbf{k}_2 = (k_x, k_y, -\alpha)$ — сопряженные волновые векторы; $\alpha = (k^2 - k_x{}^2 - k_y{}^2)^{1/2}$; k — волновое число; $\mathbf{x} = (x, y, z)$; $m = 1$ соответствует полю в верхнем полупространстве $z \ge 0$; $m = 2$ — в нижнем полупространстве $z \le 0$; $D(\mathbf{k}_m)$ — диаграмма направленности (дн) источника, рассматриваемая на всей плоскости $k_x k_y$, связанная с общепринятой дн $\overline{D}(\theta,\varphi)$, рассматриваемой в круге $k_x{}^2 + k_y{}^2 \le k^2$ (области видимости), соотношениями (см., например, [25])

$$\left.\begin{aligned}&\overline{D}(\theta,\varphi) = D(\mathbf{k}_1)\\&\overline{D}(\pi-\theta,\varphi) = D(\mathbf{k}_2)\end{aligned}\right\}, \quad (2)$$
$$\theta\in[0,\pi/2], \varphi\in[0,2\pi], \alpha\in[k,0].$$

Здесь θ,φ — сферические углы; $\alpha = k\cos\theta$; $k_x = \xi\cos\varphi$; $k_y = \xi\sin\varphi$; $\xi = k\sin\theta$; $\boldsymbol{\xi} = (k_x, k_y) = (\xi,\varphi)$ — горизонтальная проекция волнового вектора.

Рассеиватель будем характеризовать по аналогии с излучателем функцией, описывающей его направленные свойства. Эту функцию двух векторных аргументов $T_m^n(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$, $n, m = 1,2$, где $\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s$ характеризуют волновой вектор соответственно падающей и рассеянной плоских волн, принято называть амплитудой рассеяния (ар). Физически эта функция описывает спектр плоских волн $T_m^n(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)\exp(i\mathbf{k}_s\mathbf{x})$ отклика рассеивателя с центром в начале координат на падение плоской волны $\exp(i\mathbf{k}_l\mathbf{x})$ единичной амплитуды и нулевой фазы в точке геометрического центра рассеивателя. Нижний индекс $m = 1,2$ характеризует направление движения падающей плоской волны: $m = 1$ — волна движется в сторону возрастания z, (т. е. снизу вверх), $m = 2$ — наоборот. Индекс n характеризует направление рассеяния: $n = 1$ — рассматривается рассеяние вверх (значение $+\alpha$), $n = 2$ — рассеяние вниз $(-\alpha)$. Рассматриваются области определения как внутри, так и вне области видимости.

Замечание. Отметим, что в случае, когда на рассеиватель с центром в точке $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ падает плоская волна $A\exp(i\mathbf{kx})$, где $A = \mathrm{const}$, то рассеиватель "генерирует" спектр плоских волн $A\exp(i\mathbf{k}_l\mathbf{x})T_m^n(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)\exp(i\mathbf{k}_s(\mathbf{x}\text{-}\mathbf{x}_0))$.

В случае, когда ар рассеивателя известно и его центр находится в точке $\mathbf{x}_0$, поле рассеяния u_s описывается выражением типа (1) [25]

$$u_s(\mathbf{x},\mathbf{k}_l) = \frac{i}{2\pi}\int_{R^2}\frac{T_m^n(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)}{\alpha_s}\exp(i\mathbf{k}_s(\mathbf{x}\text{-}\mathbf{x}_0))\mathrm{d}k_{sx}\mathrm{d}k_{sy}. \quad (3)$$

Последнее выражение можно использовать для математического определения ар, а именно ар рассеивателя с центром в точке $\mathbf{x}_0$ при падении на него плоской волны $\exp(i\mathbf{k}_l(\mathbf{x}\text{-}\mathbf{x}_0))$ единичной амплитуды и нулевой фазы в центре рассеивателя $\mathbf{x}_0$ есть соответствующий спектр рассеянных плоских волн нулевой фазы относительно центра в представлении поля рассеяния в виде (3). Как будет видно из выражений (5)–(7), ар в сферической системе координат представляет собой амплитуду переноса нулевого приближения в геометрооптическом представлении поля рассеяния (3).

В случае, когда первичное поле типа (1) создается направленным источником (т. е. представляет собой совокупность плоских волн) с центром в начале координат, а рассеиватель находится в точке (x_0, y_0, z_0), то результирующее ар $\overline{T}_n(\mathbf{k}_s, \mathbf{x}_0)$ может быть найдено с помощью техники, изложенной в [25], и имеет вид

$$\overline{T}_n(\mathbf{k}_s,\mathbf{x}_0)=$$
$$=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{R^2}\frac{D(\mathbf{k}_l)T_m^n(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)}{\alpha_l}\exp(i\mathbf{k}_l\mathbf{x}_0)\mathrm{d}k_{lx}\mathrm{d}k_{ly}, \quad (4)$$
$$n=1,2.$$

Асимптотическая оценка интеграла (4), аналогично тому как это делалось в [25], дает следующее представление:

$$\overline{T}'(R_0,\theta_0,\varphi_0,\theta_s,\varphi_s)=$$
$$=\frac{\exp(ikR_0)}{R_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A_l(\theta_0,\varphi_0,\theta_s,\varphi_s)}{(kR_0)^l}, \quad (5)$$

$$A_{l+1}(\theta_0,\varphi_0,\theta_s,\varphi_s)=$$
$$=L[A_l(\theta_0,\varphi_0,\theta_s,\varphi_s)](\theta_0,\varphi_0,l), \quad (6)$$

$$A_0(\theta_0,\varphi_0,\theta_s,\varphi_s)=$$
$$=\overline{D}(\theta_0,\varphi_0)T'(\theta_0,\varphi_0,\theta_s,\varphi_s). \quad (7)$$

Здесь

L — оператор, определяемый выражением

$$L[\Psi](\theta,\varphi,l)=\left(\frac{\Delta_{\theta,\varphi}+l(l+1)}{2i(l+1)}\right)\Psi(\theta,\varphi);$$

$\overline{T}'$ и T' — результирующее и обычное (невозмущенное) ар соответственно в сферической системе координат;

(R_0,θ_0,φ_0) — сферические координаты точки (x_0,y_0,z_0);

(R_s,θ_s,φ_s) — сферические координаты относительно точки (x_0,y_0,z_0) (центра рассеивателя);

$\Delta_{\theta,\varphi}$ — оператор Бельтрами на сфере (угловая часть лапласиана).

Представление (5)–(7) позволяет легко проанализировать ошибки при вычислениях реального ар в виде конечной суммы. Так, в зоне Фраунгофера можно ограничиться нулевым приближением

$$\overline{T}'(R_0,\theta_0,\varphi_0,\theta_s,\varphi_s)=$$
$$=\frac{\exp(ikR_0)}{R_0}\overline{D}(\theta_0,\varphi_0)T'(\theta_0,\varphi_0,\theta_s,\varphi_s)+$$
$$+O\left(\frac{1}{kR_0{}^2}\right), \quad (8)$$

что соответствует представлению о том, что поле источника в точке рассеивателя представляет собой плоскую волну с весом $\dfrac{\overline{D}(\theta_0,\varphi_0)}{R_0}\exp(ikR_0)$.

Суммарное поле рассеивателя с ар вида (4) необходимо рассчитывать с помощью выражения (3) после соответствующей замены ар $T_m^n(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$ на ар (4) с привязкой начала координат к центру рассеивателя, после чего может быть получено геометрооптическое представление вида (5)–(7). То же относится и к нулевому приближению (8), для которого поле рассеяния в виде (5)–(7) равно

$$u_s(R_s,\theta_s,\varphi_s)=$$
$$=\frac{\exp(ikR_0)}{R_0}\frac{\exp(ikR_s)}{R_s}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A_l(\theta_s,\varphi_s)}{(kR_s)^l}, \quad (9)$$

$$A_{l+1}(\theta_s,\varphi_s)=L[A_l(\theta_s,\varphi_s)](\theta_s,\varphi_s,l), \quad (10)$$

$$A_0(\theta_s,\varphi_s)=D(\theta_0,\varphi_0)T'(\theta_0,\varphi_0,\theta_s,\varphi_s). \quad (11)$$

Если теперь уже в (9)–(11) ограничиться нулевым приближением, то получим лучевую версию рассеяния

$$u_s(R_s,\theta_s,\varphi_s)\approx$$
$$\approx\frac{\exp(ikR_0)}{R_0}\frac{\exp(ikR_s)}{R_s}\times$$
$$\times\overline{D}(\theta_0,\varphi_0)T'(\theta_0,\varphi_0,\theta_s,\varphi_s), \quad (12)$$

а именно луч, вышедший из направленного источника в сторону рассеивателя под углами θ_0,φ_0 в системе координат источника (взвешивается его дн $\overline{D}(\theta_0,\varphi_0)$), достигает рассеивателя в точке (R_0,θ_0,φ_0), отражается под углами θ_s,φ_s относительно рассеивателя, одновременно взвешиваясь по ар и достигая точки (R_s,θ_s,φ_s) в системе координат рассеивателя, приобретает амплитуду (12).

2. ДВА РАССЕИВАТЕЛЯ В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим далее случай, когда в однородном пространстве расположено два рассеивателя S_1 и S_2 с соответствующими исходными (невозмущенными) ар (когда их влияние друг на друга исключено) ${}^1T_m^n(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$ и ${}^2T_m^n(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$. Пусть центр первого расположен в точке $(0,0,-\dfrac{z_0}{2})$, второго — в точке $(0,0,\dfrac{z_0}{2})$. Будем рассматривать суммарное поле рассеяния в случае падения на указанную пару рассеивателей плоской волны $\exp(i\mathbf{k}_l\mathbf{x})$, распространяющейся для определенности в сторону возрастания величины z, т. е. снизу вверх. Поле ищется суммированием многократно рассеянных плоских волн. Принцип суперпозиции здесь уместен, т. к. каждой падающей плоской волне соответствует своя совокупность рассеянных волн, которые вместе с падающей обеспечивают выполнение граничных условий на рассеивателе; и так для всех пар (падающих плоских волн — соответствующих им рассеянных волн). Отметим, кроме того, что построенное таким образом решение является единственным в силу единственности составляющих его слагаемых начиная с первичных полей рассеяния, что определяется выбором соответствующих условий излучения Зоммерфельда.

Обозначим результирующие ар (т. е. после всех переотражений) соответственно ${}^{1}\overline{T}_1{}^{n}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$ и ${}^{2}\overline{T}_1{}^{n}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$. Рассмотрим, например, процесс формирования результирующей ар S_1 в верхней полусфере, т. е. ${}^{1}\overline{T}_1{}^{1}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$. Происходит следующее. Плоская волна $\exp(i\mathbf{k}_l\mathbf{x})$, распространившись мимо рассеивателей S_1 и S_2, вызовет на них первичные поля рассеяния соответственно с ар ${}^{1}T_1{}^{n}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)\exp(-i\alpha_l \frac{z_0}{2})$ и ар ${}^{2}T_1{}^{n}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)\times$ $\times\exp(i\alpha_l \frac{z_0}{2})$, которые и окажут влияние на формирование интересующего нас результирующего ар ${}^{1}\overline{T}_1{}^{1}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$ (множители $\exp(i\pm\alpha_l \frac{z_0}{2})$ отвечают фазе падающей плоской волны соответственно на S_2 и S_1). Поясним это на примере первичного рассеянного поля с ар ${}^{1}T_1^{1}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)\exp(-i\alpha_l \frac{z_0}{2})$. Это поле, порожденное плоской волной на S_1, распространяется вверх, достигает S_2, переотражается от него, идет далее вниз, переотражается от S_1, порождая первую добавку к ар, снова идет вверх и т.д. до бесконечности. В итоге формируется составляющая ${}_{1}^{1}\overline{T}_1{}^{1}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$ результирующего ар ${}^{1}\overline{T}_1{}^{1}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$, обусловленная первичным рассеянным полем на S_1 с ар ${}^{1}T_1^{1}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)\exp(-i\alpha_l \frac{z_0}{2})$. Аналогично формируется составляющая ${}_{2}^{1}\overline{T}_1{}^{1}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$ результирующего ар ${}^{1}\overline{T}_1{}^{1}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$, вызванная первичным рассеянным на S_2 полем ${}^{2}T_1^{2}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)\exp(i\alpha_l \frac{z_0}{2})$: первичное поле ${}^{2}T_1^{2}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)\exp(i\alpha_l \frac{z_0}{2})$ на S_2 распространится вниз, переотразится от S_1, вызвав свою первую добавку к ${}_{2}^{1}\overline{T}_1{}^{1}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$, затем пойдет вверх, снова переотразится от S_2 и т. д. до бесконечности. Таким образом, необходимо вычислить сумму

$$ {}^{1}\overline{T}_1{}^{1}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s) = {}_{1}^{1}\overline{T}_1{}^{1}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s) + {}_{2}^{1}\overline{T}_1{}^{1}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s). \quad (13) $$

Используя выражение (4) для расчетов вторичных ар и действуя совершенно идентично тому, как это проделывалось в случае, когда роль второго рассеивателя играла граница раздела, ар которой служил коэффициент отражения [25], получим следующие представления:

$$ \begin{aligned} &\frac{{}_{1}^{1}\overline{T}_1{}^{1}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)}{\exp(-i\alpha_l z_0/2)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_1{}^{1}\right)^n \left[{}^{1}T_1{}^{1}\right](\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s) = \\ &= \left(I - A_1{}^{1}\right)^{-1} \left[{}^{1}T_1{}^{1}\right](\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s), \end{aligned} \quad (14) $$

$$ \begin{aligned} &{}_{2}^{1}\overline{T}_1{}^{1}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_1{}^{1}\right)^n \left[{}^{1}\hat{T}_1{}^{1}\right](\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s) = \\ &= \left(I - A_1{}^{1}\right)^{-1} \left[{}^{1}\hat{T}_1{}^{1}\right](\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s), \end{aligned} \quad (15) $$

где ${}^{1}\hat{T}_1{}^{1}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$ определяется выражением

$$ \begin{aligned} &{}^{1}\hat{T}_1{}^{1}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s) = \\ &= \exp(i\alpha_l \frac{z_0}{2}) \frac{i}{2\pi} \times \\ &\times \int_{R^2} \frac{[{}^{2}T_1{}^{2}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_n)][{}^{1}T_2{}^{1}(\mathbf{k}_n,\mathbf{k}_s)]}{\alpha_n} \times \\ &\times \exp(i\alpha_n z_0)\mathrm{d}k_{nx}\mathrm{d}k_{ny}. \end{aligned} \quad (16) $$

Оператор $A_1{}^{1}$ определяется следующим образом:

$$ A_1{}^{1}[T](\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \int_{R^2} \left(\int_{R^2} \frac{{}^{2}T_1{}^{2}(\mathbf{k}_n,\mathbf{k}_m) T(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_n)}{\alpha_n} \exp(i\alpha_n z_0)\mathrm{d}k_{nx}\mathrm{d}k_{ny} \right) \frac{{}^{1}T_2{}^{1}(\mathbf{k}_m,\mathbf{k}_s)}{\alpha_m} \exp(i\alpha_m z_0)\mathrm{d}k_{mx}\mathrm{d}k_{my}. \quad (17) $$

Как видно из (17), оператор A_1^1 вычисляет добавку к ар ${}^1\overline{T}_1{}^1(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$ за один цикл: рассеянная на S_1 волна достигает S_2, переотражается обратно, достигает S_1 и вызывает очередное приращение ар ${}^1\overline{T}_1{}^1(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$. Заметим, что учет конечного числа членов рядов (14), (15) может быть использовано для приближенного вычисления составляющих ар.

Формально ряды Неймана (14), (15) сходятся, когда норма оператора (17) меньше единицы. Однако из физических соображений ясно, что если соответствующие составляющие результирующей ар существуют, то по построению единственного решения представляют собой именно ряды типа (14), (15), т. к. эти ряды лишь отражают физику происходящих процессов и представляют собой решение, альтернативное описанному в работах [1–15]. Справедливым это должно остаться и в условиях наличия резонансных явлений при одиночном и множественном рассеянии [9, 13].

Для сходящихся рядов (14), (15) можно обратить оператор $\left(I-A_1^1\right)^{-1}$ стандартным образом, после чего получаем интегральные уравнения для определения составляющих результирующей ар ${}^1\overline{T}_1{}^1(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$:

$$\left(I-A_1^1\right)\left[{}_1^1\overline{T}_1{}^1\right](\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)= {}^1T_1^1(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)\exp\left(-i\alpha_l\frac{z_0}{2}\right), \tag{18}$$

$$\left(I-A_1^1\right)\left[{}_2^1\overline{T}_1{}^1\right](\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)= {}^1\hat{T}_1^1(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s), \tag{19}$$

где оператор A_1^1 определяется из (17).

Отметим, что после определения величины результирующего ар ${}^1\overline{T}_1{}^1(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$ рассеивателя S_1, легко получить результирующий ар ${}^2\overline{T}_1{}^1(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$ рассеивателя S_2. Для этого, как легко заметить, к первичной составляющей ${}^2T_1^1(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)\times\exp\left(i\alpha_l\frac{z_0}{2}\right)$, вызванной падением первичной плоской волны, необходимо добавить составляющую, вызванную рассеянием на S_2 суммарного поля рассеяния рассеивателя S_1 с результирующим ар ${}^1\overline{T}_1{}^1(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$. Или в окончательном виде

$$\begin{aligned}{}^2\overline{T}_1{}^1(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)&={}^2T_1^1(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)\exp\left(i\alpha_l\frac{z_0}{2}\right)+\\&+\frac{i}{2\pi}\int\limits_{R^2}\frac{{}^2T_1^1(\mathbf{k}_n,\mathbf{k}_s)\,{}^1\overline{T}_1{}^1(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_n)}{\alpha_n}\times\\&\times\exp(i\alpha_n z_0)\mathrm{d}k_{nx}\mathrm{d}k_{ny}.\end{aligned} \tag{20}$$

Поступая совершенно аналогично, найдем соответствующие интегральные уравнения для ${}_1^2\overline{T}_1{}^2(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$ и ${}_2^2\overline{T}_1{}^2(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$, являющихся составляющими результирующего ар

$${}^2\overline{T}_1{}^2(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)={}_1^2\overline{T}_1{}^2(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)+{}_2^2\overline{T}_1{}^2(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s) \tag{21}$$

рассеивателя S_2 в нижнем полупространстве:

$$\left(I-A_2^2\right)\left[{}_1^2\overline{T}_1{}^2\right](\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)= {}^2T_1^2(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)\exp\left(i\alpha_l\frac{z_0}{2}\right); \tag{22}$$

$$\left(I-A_2^2\right)\left[{}_2^2\overline{T}_1{}^2\right](\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)= {}^2\hat{T}_1^2(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s), \tag{23}$$

где ${}^2\hat{T}_1^2(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$ определяется выражением

$$\begin{aligned}{}^2\hat{T}_1^2(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)&=\\&=\exp\left(-i\alpha_l\frac{z_0}{2}\right)\frac{i}{2\pi}\times\\&\times\int\limits_{R^2}\frac{[{}^2T_1^2(\mathbf{k}_n,\mathbf{k}_s)][{}^1T_1^1(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_n)]}{\alpha_n}\times\\&\times\exp(i\alpha_n z_0)\mathrm{d}k_{nx}\mathrm{d}k_{ny},\end{aligned}$$

а оператор $A_2^2[T](\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$ равен

$$\begin{aligned}&A_2^2[T](\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)=\\&=\left(\frac{i}{2\pi}\right)^2\times\\&\times\int\limits_{R^2}\left(\int\limits_{R^2}\frac{{}^1T_2^1(\mathbf{k}_n,\mathbf{k}_m)T(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_n)}{\alpha_n}\exp(i\alpha_n z_0)\mathrm{d}k_{nx}\mathrm{d}k_{ny}\right)\times\\&\times\frac{{}^2T_1^2(\mathbf{k}_m,\mathbf{k}_s)}{\alpha_m}\exp(i\alpha_m z_0)\mathrm{d}k_{mx}\mathrm{d}k_{my}.\end{aligned} \tag{24}$$

Результирующий ар рассеивателя S_1 в нижнем полупространстве определяется из выражения

$$ {}^{1}\overline{T}_1{}^2(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)={}^{1}T_1{}^2(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)\exp(-i\alpha_l\frac{z_0}{2})+\frac{i}{2\pi}\int_{R^2}\frac{[{}^{1}T_2{}^2(\mathbf{k}_n,\mathbf{k}_s)][{}^{2}\overline{T}_1{}^2(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_n)]}{\alpha_n}\exp(i\alpha_n z_0)\mathrm{d}k_{nx}\mathrm{d}k_{ny}. \qquad (25) $$

Пусть теперь первичная волна распространяется сверху вниз. Тогда останутся верными все выражения (13)–(25), если в них произвести следующие изменения. Первичные поля будут соответственно ${}^{1}T_1^{\,n}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)\exp(i\alpha_l\frac{z_0}{2})$ и ${}^{2}T_1^{\,n}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)\exp(-i\alpha_l\frac{z_0}{2})$. Далее в выражениях (13)–(25) во всех функциях ар, содержащих аргумент $\mathbf{k}_l$, необходимо правый нижний индекс в обозначении функции поменять с 1 на 2, а во всех экспонентах, содержащих α_l, поменять знак на противоположный. Все остальные обозначения и выражения останутся без изменений. Например, выражения (22), (23) примут соответственно вид

$$ \left(I-A_2{}^2\right)\left[{}^2_1\overline{T}_2{}^2\right](\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)= $$
$$ ={}^{2}T_2{}^2(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)\exp(-i\alpha_l\frac{z_0}{2}), \qquad (22a) $$

$$ \left(I-A_2{}^2\right)\left[{}^2_2\overline{T}_2{}^2\right](\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)={}^{2}\hat{T}_2{}^2(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s). \qquad (23a) $$

Таким образом, получены все выражения для определения результирующих ар двух рассеивателей ${}^{1}\overline{T}_l{}^n(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$ и ${}^{2}\overline{T}_l{}^n(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$; $l,n=1,2$. Такая информация является, безусловно, полезной хотя бы для того, чтобы судить о степени возмущения исходных ар.

3. ОБОБЩЕНИЕ НА ЧИСЛО РАССЕИВАТЕЛЕЙ БОЛЬШЕ ДВУХ И ПРОИЗВОЛЬНОЕ ПЕРВИЧНОЕ ПОЛЕ

В тех случаях когда возмущением ар пренебречь нельзя, практически более значимой является, по-видимому, информация о совокупной ар системы, состоящей из рассматриваемых двух рассеивателей. Последнюю легко получить, пользуясь выражением (3), принципом суперпозиции и ***Замечанием*** в разделе 1. Окончательно имеем для совокупной ар $\overline{T}_l{}^n(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$ систему (26):

$$ \overline{T}_l{}^1(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)= $$
$$ ={}^{1}\overline{T}_l{}^1(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)\exp(i\alpha_s\frac{z_0}{2})+ $$
$$ +{}^{2}\overline{T}_l{}^1(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)\exp(-i\alpha_s\frac{z_0}{2}) $$

и

$$ \overline{T}_l{}^2(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)= $$
$$ ={}^{1}\overline{T}_l{}^2(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)\exp(-i\alpha_s\frac{z_0}{2})+ \qquad (26) $$
$$ +{}^{2}\overline{T}_l{}^2(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)\exp(i\alpha_s\frac{z_0}{2}), $$
$$ l=1,2. $$

После вычисления совокупного ар $\overline{T}_l{}^n(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$ уже просто проделать две важные вещи.

Во-первых, подставляя (26) в выражение (4) либо (5)–(7), можно вычислить совокупный ар при облучении системы рассеивателей направленным источником с полем (1). При этом очевидно, что центр системы рассеивателей находится посредине между центрами обоих рассеивателей.

Во-вторых, умение вычислять совокупный ар $\overline{T}_l{}^n(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$ системы, состоящей из двух рассеивателей, позволяет последовательно решить задачу о N рассеивателях. А именно: сначала рассматривается система из двух рассеивателей, находится их совокупное ар и оба рассеивателя заменяются одним, фиктивным, который обладает их совокупным ар с центром, лежащим посредине между центрами исходных рассеивателей. Затем рассматривается система рассеивателей, состоящая из третьего рассеивателя и описанного фиктивного, находится их совокупное ар и т.д., пока не будут исчерпаны все рассеиватели и не найдено единое совокупное ар всех N рассеивателей. Правомерность описанной итерационной процедуры следует из принципа суперпозиции.

Представляет интерес получить из вышеприведенных выражений полученные ранее в [25, 26] результаты для случая, когда одним из рассеивателей является отражающая плоскость (плоская граница раздела), для которой в Приложении 1 получено выражение ар. Подставляя выражение (П1) для ар $T_1^{\,2}(\mathbf{k}_l,\mathbf{k}_s)$ отражающей плоскости, например, в выражения (16)–(20), получим приведенные в [25, 26] интегральные уравнения для случая рассеивателя у плоской отражающей границы [1)]

[1)] К сожалению, из-за допущенной автором опечатки, в работах [25–27] в интегральных операторах типа (17), (20), (24), (25) отсутствует постоянный множитель $i/2\pi$.

4. ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МНОЖЕСТВЕННОГО РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим далее случай, когда в поле первичной плоской волны по-прежнему находятся два рассеивателя. При этом ограничимся ситуацией, когда можно принять допущение, что рассеиватели находятся друг по отношению к другу в зоне Фраунгофера. Тогда можно воспользоваться выражением (8) для расчета ар расеивателя, находящегося в первичном поле рассеяния другого рассеивателя и далее вычислить результирующие ар.

Первичная плоская волна $\exp(i\mathbf{k}_l\mathbf{x})$, идущая для определенности снизу вверх, вызовет на рассеивателях S_1 и S_2 два невозмущенных рассеянных поля с ар соответственно

$$^1T'(\theta_l,\varphi_l,\theta_{1s},\varphi_s)\exp(-i\alpha_l\frac{z_0}{2})$$

и

$$^2T'(\theta_l,\varphi_l,\theta_{2s},\varphi_s)\exp(i\alpha_l\frac{z_0}{2})$$

(ар представлены в сферических координатах, $\theta_{1s},\varphi_s,\theta_{2s},\varphi_s$ — сферические углы относительно центров). Как показано выше, каждое из этих первичных рассеянных полей будет принимать участие в формировании результирующих рассеянных полей обоих рассеивателей. Получим приближение, например, для $^1\overline{T}'(\theta_l,\varphi_l,\theta_{1s},\varphi_s)$, $\theta_{1s}\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Как нетрудно увидеть, вычисление последнего ар

$$^1\overline{T}'(\theta_l,\varphi_l,\theta_{1s},\varphi_s)= {}_1^1\overline{T}'(\theta_l,\varphi_l,\theta_{1s},\varphi_s)+{}_2^1\overline{T}'(\theta_l,\varphi_l,\theta_{1s},\varphi_s)$$

распадается в этом случае на вычисление двух геометрических прогрессий

$${}_m^1\overline{T}'(\theta_l,\varphi_l,\theta_s,\varphi_s)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{0m}q^m,\quad m=1,2\,.$$

Здесь

$$a_{01}={}^1T'(\theta_l,\varphi_l,\theta_{1s},\varphi_s)\exp(-i\alpha_l\frac{z_0}{2});\tag{27}$$

$$a_{02}=\exp(i\alpha_l\frac{z_0}{2})[{}^2T'(\theta_l,\varphi_l,\theta_{2s}=\pi)]\times \times[{}^1T'(\theta_{1l}=\pi,\theta_{1s},\varphi_s)]\frac{\exp(ikz_0)}{z_0};\tag{28}$$

$$q=\left(\frac{\exp(ikz_0)}{z_0}\right)^2[{}^2T'(\theta_{2l}=0,\theta_{2s}=\pi)]\times \times[{}^1T'(\theta_{1l}=\pi,\theta_{1s},\varphi_s)].\tag{29}$$

Учтено, что при $\theta=0$ или $\theta=\pi$ зависимость от φ пропадает. Полагая справедливым условие $|q|<1$, получим для результирующего ар

$$^1\overline{T}'(\theta_l,\varphi_l,\theta_{1s},\varphi_s)=\frac{a_{01}+a_{02}}{1-q},\quad \theta_{1s}\in[0,\frac{\pi}{2}].\tag{30}$$

Используя (20), получаем для $\theta_{2s}\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$$^2\overline{T}'(\theta_l,\varphi_l,\theta_{2s},\varphi_s)= ={}^2T(\theta_l,\varphi_l,\theta_{2s},\varphi_s)\exp(i\alpha_l\frac{z_0}{2})+ +\frac{\exp(ikz_0)}{z_0}[{}^2T'(\theta_l=0,\theta_{2s},\varphi_s)]\times \times[{}^1\overline{T}'(\theta_l,\varphi_l,\theta_{1s}=0)].\tag{31}$$

В выражениях (30), (31) $\varphi_s\in[0,2\pi]$. Аналогично находятся результирующие ар в оставшейся области определения $\theta_s\in[\frac{\pi}{2},\pi]$, $\varphi_s\in[0,2\pi]$. А именно:

$$^2\overline{T}'(\theta_l,\varphi_l,\theta_{2s},\varphi_s)=\frac{\tilde{a}_{01}+\tilde{a}_{02}}{1-\tilde{q}};\tag{32}$$

$$^1\overline{T}'(\theta_l,\varphi_l,\theta_{1s},\varphi_s)= ={}^1T'(\theta_l,\varphi_l,\theta_{1s},\varphi_s)\exp(-i\alpha_l\frac{z_0}{2})+ +\frac{\exp(ikz_0)}{z_0}[{}^1T'(\theta_{1l}=\pi,\theta_{1s},\varphi_s)]\times \times[{}^2\overline{T}'(\theta_l,\varphi_l,\theta_{2s}=\pi)],\tag{33}$$

где

$$\tilde{q}=\left(\frac{\exp(ikz_0)}{z_0}\right)^2[{}^1T'(\theta_{1l}=\pi,\theta_s=0)]\times \times[{}^2T'(\theta_{2l}=0,\theta_{2s},\varphi_s)];\tag{34}$$

$$\tilde{a}_{01}={}^2T'(\theta_l,\varphi_l,\theta_{2s},\varphi_s)\exp(i\alpha_l\frac{z_0}{2});\tag{35}$$

$$\widetilde{a}_{02} = \exp(-i\alpha_l \frac{z_0}{2})[{}^2T^{'}(\theta_{2l} = 0, \theta_{2s}, \varphi_s)] \times$$
$$\times [{}^1T^{'}(\theta_l, \varphi_l, \theta_{1s} = 0)] \frac{ex(ikz_0)}{z_0}. \qquad (36)$$

Выражения для случая, когда первичная плоская волна набегает на рассеиватели сверху вниз получаются из (27)–(36), если во всех экспонентах, содержащих α_l, поменять знак на противоположный. Отметим, что при условии $R_s >> z_0$, где R_s, θ_s, φ_s — сферические координаты точки наблюдения относительно центра системы рассеивателей, в выражениях (27–36), можно положить $\theta_{1s} \approx \theta_{2s} \approx \theta_s$.

ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе получены точные выражения (интегральные уравнения), позволяющие в общем виде рассчитывать результирующие ар двух рассеивателей в условиях, когда они находятся в поле первичной волны и в возмущающем поле друг друга, при условии, что известны невозмущенные ар рассеивателей. Это в свою очередь позволяет организовать процедуру учета множественного рассеяния на трех и более телах. Кроме того, получены нулевые геометрооптические приближения результирующих ар для случая, когда рассеиватели находятся в зоне Фраунгофера по отношению друг к другу. Приведенные выражения позволяют достаточно просто решать родственные рассмотренной задачи учета влияния границ раздела и неоднородностей на результирующие ар.

Изложенный метод, дающий те же, но лишь в других терминах решения задачи множественного рассеяния, что и метод, изложенный в [1–15], еще раз подчеркивает, что ар является отнюдь не только и не столько характеристикой дальнего поля, а заключает в себе исчерпывающую информацию о поле в любой точке вне рассеивателей. Кроме того, изложенный метод позволяет при наличии банка данных невозмущенных ар рассеивателей легко конструировать решение задач множественного рассеяния с произвольной конфигурацией в отличие от альтернативного подхода, где решение каждый раз нужно строить заново.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. *Амплитуда рассеяния плоской границы раздела*

Пусть в однородном пространстве плоскость $z = 0$ служит границей раздела однородного нижнего полупространства $z \le 0$ и верхнего слоисто-неоднородного полупространства $z \ge 0$. При падении плоской волны $\exp(i(k_{lx}x + k_{ly}y + \alpha_l z))$ из нижнего полупространства на границу раздела в нем образуется отраженная от этой границы плоская волна $V(\alpha_l)\exp(i(k_{lx}x + k_{ly}y - \alpha_l z))$, где $V(\alpha_l)$ — функция коэффициента отражения от границы. Для вычисления ар отражающей плоскости формально воспользуемся выражением (3). Учитывая, что рассеянное поле в этом случае равно

$$u_s(\mathbf{x}, \mathbf{k}_l) = V(\alpha_l)\exp(i(k_{lx}x + k_{ly}y - \alpha_l z)),$$

перепишем (3) в виде

$$V(\alpha_l)\exp(i(k_{lx}x + k_{ly}y - \alpha_l z)) =$$
$$= \frac{i}{2\pi}\int_{R^2} \frac{T_1^{\,2}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)}{\alpha_s} \exp(i(k_{sx}x + k_{sy}y - \alpha_s z)) \mathrm{d}k_{sx}\mathrm{d}k_{sy}.$$

Анализ последнего выражения показывает, что ар отражающей плоскости равен

$$T_1^{\,2}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) =$$
$$= \frac{2\pi}{i} V(\alpha_l)\alpha_l \delta(k_{lx} - k_{sx})\delta(k_{ly} - k_{sy}) =$$
$$= \frac{2\pi}{i} V(\alpha_s)\alpha_s \delta(k_{lx} - k_{sx})\delta(k_{ly} - k_{sy}). \qquad (\text{П}1)$$

Здесь использовано фильтрующее свойство δ-функций.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. *Амплитуды рассеяния двух близлежащих сфер с однородным условием Дирихле на границах*

Пусть задано два сферических рассеивателя с однородными условиями Дирихле на поверхности (абсолютно мягкие границы) соответственно с радиусами R_1 и R_2. Центры сфер находятся в точках $(0,0,-\frac{z_0}{2})$ и $(0,0,\frac{z_0}{2})$. Выражение для ар рассеяния подобной сферы в низкочастотном приближении с точностью до $O(k^3)$ приведено в работе [28, с. 86]:

$$T(\theta_l, \varphi_l, \theta_s, \varphi_s) =$$
$$= A +$$
$$+ B\left(\cos\theta_l \cos\theta_s + \sin\theta_l \sin\theta_s \cos(\varphi_l - \varphi_s)\right); \qquad (\text{П}2)$$

$$A = -R_o + \frac{2}{3}k^2 R_0^3 + ikR_0^2; \quad B = -k^2 R_0^3,$$

где R_0 — радиус сферы.

При переходе в интегралах типа (17) к сферической системе координат $\mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y = \xi \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\varphi = k^2 \sin\theta \cos\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi = k\alpha \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi$, а пределы интегрирования меняются следующим образом: $k_x, k_y \in R^2 \Rightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{2} - i\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Элементарные вычисления дают [25]:

$$\left.\begin{aligned} &T'^{\,2}_1(\theta_l,\varphi_l,\theta_s,\varphi_s) = T'^{\,1}_2(\theta_l,\varphi_l,\theta_s,\varphi_s) = \\ &= A + \\ &+ B\big(-\cos\theta_l\cos\theta_s + \sin\theta_l\sin\theta_s\cos(\varphi_l-\varphi_s)\big) \\ \\ &T'^{\,1}_1(\theta_l,\varphi_l,\theta_s,\varphi_s) = T'^{\,2}_2(\theta_l,\varphi_l,\theta_s,\varphi_s) = \\ &= A + \\ &+ B\big(\cos\theta_l\cos\theta_s + \sin\theta_l\sin\theta_s\cos(\varphi_l-\varphi_s)\big) \end{aligned}\right\}, \quad (\text{П3})$$

$$\varphi_l, \varphi_s \in [0, 2\pi]; \quad \theta_l, \theta_s \in [0, \frac{\pi}{2} - j\infty).$$

Здесь $\theta_l, \varphi_l, \theta_s, \varphi_s$ — сферические координаты векторов $\mathbf{k}_l$ и $\mathbf{k}_s$ соответственно на сфере радиусом k при изменении $\xi \in [0, \infty)$.

После подстановки (П3) в соответствующие интегралы могут быть точно вычислены результирующие ар обеих сфер.

При использовании приближенных выражений (27)–(36) при вычислении ар в них необходимо подставлять выражение невозмущенных выражений ар в виде (П2).

Проведем вычисления для случая двух сфер одинакового радиуса R_0 при падении плоской волны с соответствующими углами $\theta_l = \pi/2$, $\varphi_l = 0$. Оценим величину результирующего рассеяния $\overline{T}'$, например, в направлении $\theta_s = \pi/2$, $\varphi_s = 0$, совпадающем с направлением падения первичной волны. Это интересно еще и потому, что справедливо соотношение [28, с. 69]

$$Q = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} \overline{T}'(\theta_l, \varphi_l, \vartheta_l, \varphi_l),$$

где Q — полное поперечное сечение рассеяния. Вычисляя (30) с учетом (27)–(29) и (П2), имеем

$${}^{1}\overline{T}'(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0) = A + B + A^2 \frac{\exp(ikz_0)}{z_0}.$$

Учитывая, что $\theta_s = \frac{\pi}{2}$, величину ${}^{2}\overline{T}'$ можно рассчитать либо из (31), либо из (32) и (34)–(36). Окончательно имеем такое же значение, что подтверждает симметрию задачи

$${}^{2}\overline{T}'(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0) = A + B + A^2 \frac{\exp(ikz_0)}{z_0}.$$

Для результирующего ар из (26) получаем

$$\begin{aligned} &\overline{T}'(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0) = \\ &= {}^{1}\overline{T}'(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0) + {}^{2}\overline{T}'(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0) = \\ &= 2\left(A + B + A^2 \frac{\exp(ikz_0)}{z_0}\right). \end{aligned} \quad (\text{П4})$$

Пренебрегая множественным рассеянием, из (П2) получаем

$$\overline{T}'(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0) = 2T'(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0) = 2(A+B),$$

что формально соответствует $z_0 = \infty$ в (П4).

Рассмотрим далее случай, когда $\theta_l = 0$, $\theta_s = 0$. Действуя, как и в первом случае $(\alpha_l = k)$, имеем:

$$\begin{aligned} &{}^{1}\overline{T}'(0,0) = \\ &= \frac{(A+B)\exp(-ik\frac{z_0}{2}) + (A-B)^2 \dfrac{\exp(ik\frac{3z_0}{2})}{z_0}}{1 - \dfrac{(A-B)^2\exp(ik2z_0)}{z_0{}^2}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &{}^{2}\overline{T}'(0,0) = \\ &= (A+B)\exp(ik\frac{z_0}{2}) + (A+B)^2 \frac{\exp(ikz_0)}{z_0}. \end{aligned}$$

Для результирующего ар из (26) имеем

$$\begin{aligned} &\overline{T}'(0,0) = \\ &= {}^{1}\overline{T}'(0,0)\exp(ik\frac{z_0}{2}) + {}^{2}\overline{T}'(0,0)\exp(-ik\frac{z_0}{2}) = \\ &= \frac{(A+B) + (A-B)^2 \dfrac{\exp(ik2z_0)}{z_0}}{1 - \dfrac{(A-B)^2\exp(ik2z_0)}{z_0{}^2}} + \\ &+ (A+B) + (A+B)^2 \frac{\exp(ik\frac{z_0}{2})}{z_0}. \end{aligned}$$

Из последнего выражения видно, что характер результирующего ар стал сложнее, а при $z_0 = \infty$ ар снова равен удвоенному одиночному ар.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tversky V.* Multiple scattering of radiation by an arbitrary configuration of parallel cylinders // J. Acoust. Soc. Amer. 1952. V. 24, N 1. P. 42–46.
2. *Waterman P.C., Truell R.* Multiple scattering of waves // J. Math. Phys. 1961. N 2. P. 512–537.
3. *Иванов Е.А.* Дифракция на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968.
4. *Марневская Л.А.* Дифракция плоской скалярной волны на двух сферах // Акуст. журн. 1969. Т. 14, № 3. С. 356–360.
5. *Марневская Л.А.* Рассеяние плоской волны на двух акустически-жестких сферах // Акуст. журн. 1970. Т. 15, № 4. С. 499–502.
6. *Peterson B., Strom S.* Matrics formulation of acoustic scattering from an arbitrary number of scatterers // J. Acoust. Soc. Amer. 1974. V. 56, N 6. P. 771.
7. *Varadan V.K.* Multiple Scattering of Acoustic, Electromagnetic and Elastic Waves // Acoustic, Electromagnetic and Elastic Wave Scattering-Focus on the T-Matrics Approach. Pergamon Press, 1980. P. 103–134.
8. *Gaunaurd J.C., Huang H., Strifors H.* Acoustic scattering by a pair of spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1995. V. 98, N 1. P. 495–507.
9. *Huang H., Gaunaurd J.C.* Acoustic scattering of a plane wave by two spherical elastic shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1995. V. 98, N 4. P. 2149–2156.
10. *Koc S., Chew W.S.* Calculation of acoustical scattering from a cluster of scatterers // J. Acoust. Soc. Amer. 1998. V. 103, N 2. P. 721–734.
11. *Gumerov N.A., Duraiswami R.* Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Amer. 2002. V. 112, N 6. P. 2688–2701.
12. *Sherer S.* Scattering of sound from axisymetric sources by multiple circular cylinders // J. Acoust. Soc. Amer. 2004. V. 115, N 2. P. 488–496.
13. *Le Bas P.-Y., Luppe F., Conoir J.M., Franklin H.* N-shell cluster in water: Multiple scattering of resonances // J. Acoust. Soc. Amer. 2004. V. 115, N 4. P. 1460–1467.
14. *Буров В.А., Вечерин С.Н., Румянцева О.Д.* Статистическая оценка пространственного спектра вторичных источников // Акуст. журн. 2004. Т. 50, № 1. С. 9–19.
15. *Андреева И.Б., Тарасов Л.Л.* Рассеяние акустических волн на мелких ракообразных // Акуст. журн. 2003. Т. 49, № 2. С. 125–128.
16. *Клещев А.А.* Рассеяние звука сфероидальными телами, находящимися у границы раздела сред // Акуст. журн. 1977. Т. 23, № 3. С. 404–410.
17. *Кравцов Ю.А., Кузькин В.М., Петников В.Г.* Дифракция волн на регулярных рассеивателях в многомодовых волноводах // Акуст. журн. 1984. Т. 30, № 2. С. 339–343.
18. *Rao S.M., Sridhara B.S.* Acoustic scattering from arbitrary shaped multiple bodies in half-space: Method of moments solution // J. Acoust. Soc. Amer. 1992. V. 91, № 1. P. 652–657.
19. *Белов В.Е., Горский С.М., Зиновьев А.Ю., Хилько А.И.* Применение метода интегральных уравнений к задаче о дифракции акустических волн на упругих телах в слое жидкости //Акуст. журн. 1994. Т. 40, № 4. С. 548–560.
20. *Gaunaurd J.C., Huang H.* Acoustic scattering by a spherical body near a plane boundary // J. Acoust. Soc. Amer. 1994. V. 96, N 6. P. 2526–2536.
21. *Bishop G.C., Smith J.* Scattering from rigid and soft targets near a planar boundary: Numerical results // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. V. 105, N 1. P. 130–143.
22. *Кузькин В.М.* Рассеяние звука на теле в плоскослоистом волноводе // Акуст. журн. 2003. Т. 49, № 1. С. 68–74.
23. *Григорьев В.А., Кацнельсон Б.Г., Переселков С.А.., Петников В.Г.* Рассеяние звука пространственно локализованными неоднородностями в мелководных волноводах в присутствии внутренней волны // Акуст. журн. 2003. Т. 49, № 1. С. 36.
24. *Ghosh Roy D.N., Orris G.J.* Born scattering in a acoustical waveguide // J. Acoust. Soc. Amer. 2003. V. 114, N 2. P. 626–633.
25. *Зацерковный А.В., Сергеев В.С., Шарфарец Б.П.* Использование амплитуды рассеяния для решения задач дифракции волн в полупространстве // Акуст. журн. 2001. Т. 47, № 5. С.650–656.
26. *Шарфарец Б.П.* Поле сферического излучателя звука в идеальном волноводе // Акуст. журн. 2002. Т. 48, № 4. С. 547–551.
27. *Шарфарец Б.П.* Метод расчета поля непрозрачного источника и поля рассеяния неоднородного включения в плоскослоистой среде // Акуст. журн. 2004. Т. 50, № 1. С. 123–128.
28. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М., 1960. 896 с.

Санкт-Петербург

Материал поступил в редакцию 27.05.2004.

SOLVING THE PROBLEM OF MULTIPLE SCATTERING ON AN ARBITRARY NUMBER OF SCATTERERS IN THE HOMOGENEOUS THREE-DIMENSIONAL SPACE

B. P. Sharfarets

Saint-Petersburg

The article offers an approach to the solution of the problem of multiple scattering on a set of bodies in the homogeneous boundless space. For this purpose we consider the problem of multiple scattering of two bodies located in a primary field of a plane wave. The initial nonperturbed scattering amplitudes of each scatterer are assumed known. The solution is constructed by the calculation of repeated rescattering of plane waves between scatterers.

The integral equations permitting one to calculate resultant scattering amplitudes for each of them and a cumulative scattering amplitude of a system consisting of two scatterers are obtained.

It is shown that the solution of this problem allows one to solve the problem of the scattering field for an arbitrary number of scatterers. The expressions for the scattering amplitude in the case of an arbitrary primary field are given. The relation between integral equations for multiple scattering in the homogeneous space and those for multiple scattering of a single body near the plane boundary is demonstrated. The approximate expressions for calculation of the scattering amplitude in the case of multiple scattering are presented.