

УДК 550.83

© И. Н. Голов, В. А. Иванов, В. С. Сизиков

## ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ КАК ЗАДАЧИ ГРАВИТАЦИОННОЙ ТОМОГРАФИИ И ВНУТРИВИДЕНИЯ ЗЕМЛИ

Обратная задача гравиметрии трактуется как задача гравитационной томографии и внутривидения Земли. Геологические месторождения моделируются однородными сфероидами. Используются формулы для гравитационного потенциала и компонент напряженности сфероидов. Сформулирована задача определения параметров сфероидов в виде задачи минимизации функционала с регуляризацией и ограничениями на решение. Приведены результаты численных экспериментов.

### ВВЕДЕНИЕ

На стыке геологии и математики получила большое развитие *обратная задача гравиметрии* [1, 2]. Ее суть заключается в следующем: используя измеренные на поверхности Земли аномалии потенциала или напряженности гравитационного поля (т. е. их отклонения от средних значений), нужно определить математическим путем аномалии плотности вещества под поверхностью Земли (в ее коре, мантии и т. д.) в некоторой пространственной области  $D$ .

Один из вариантов обратной задачи гравиметрии — *задача интерпретации гравитационных данных* [1–6]. Данная задача математически сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма I-го рода или к минимизации функционала, равного сумме квадратов невязок между измеренными и вычисленными значениями потенциала (или напряженности) в ряде точек поверхности Земли. Это позволяет определить параметры месторождения (плотность, форму, размеры, массу, глубину залегания и т. д.) и по этим параметрам сделать его классификацию (нефть, руда и т. д.).

Обычно задача интерпретации гравитационных данных решается как набор двухмерных задач, а именно: в ряде вертикальных сечений определяются аномалии плотности, а затем составляется трехмерная (объемная) картина. Эта процедура весьма напоминает приемы, характерные для различных видов компьютерной томографии (КТ) [7–9], в первую очередь для рентгеновской томографии (РТ) [7], [8, т. 1], [9, с. 17–33], [10] и МР-томографии [8, т. 2], [9, с. 33–62], [11–13]. Поэтому целесообразно относить обратную задачу гравиметрии и ее важный вариант — задачу интерпретации гравитационных данных к задачам томографии, как это уже сделано в работах [14, 15].

Более того, предлагается называть обратную задачу гравиметрии также *задачей гравитационной томографии*. Кроме того, особенностью данной задачи является то, что она позволяет без бурения скважин путем математической обработки поверхностных результатов "заглянуть" в глубь Земли, а это напоминает операцию внутривидения, характерную для МР-томографии [11, 12]. Поэтому предлагается называть обратную задачу гравиметрии также *задачей внутривидения Земли* [14, 15].

Предлагаемые толкования обратной задачи гравиметрии позволяют воспользоваться обширными наработками в области компьютерной томографии, в особенности в РТ и МР-томографии.

### МОДЕЛИ МЕСТОРОЖДЕНИЙ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ

Различные авторы вводят следующие *модели месторождений* [1, 4, 6, 16]: в виде четырехугольных усеченных пирамид, призм, цилиндров, брусьев, многогранников, параллелепипедов, пересекающихся стержней и т. д. Однако такие фигуры обладают негладкими поверхностями и порождают громоздкие (хотя и несложные) формулы (см., например, [1, с. 90–105]). В работах [14, 15] предложено для моделирования месторождений использовать однородные (а также неоднородные) *сфероиды*. Данная работа продолжает эту тематику.

Решение обратной задачи гравиметрии, вообще говоря, не единственно [17]. В двухмерном (плоском) случае, согласно [5], решение задачи единственно (плотность  $\rho$  и область  $D$  тела однозначно восстанавливаются по внешнему полю), если кривая, ограничивающая  $D$ , есть лемниската, точнее

овал Кассини [18, с. 125] — множество точек, для которых произведение расстояний до двух фокусов постоянно и равно некоторой величине  $d^2$ . А собственно лемниската — это овал Кассини при  $d = \Delta$ , где  $2\Delta$  — расстояние между фокусами. Уравнение овала Кассини в декартовых координатах имеет вид [18, с. 125]:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2\Delta^2(x^2 - y^2) = d^4 - \Delta^4, \\ d > 0, \Delta > 0.$$

При  $d > \Delta\sqrt{2}$  овал является всюду выпуклым. Этому соответствует значение сферичности (отношение  $y$ -полуоси к  $x$ -полуоси)  $\varepsilon \in (1/\sqrt{3}, 1]$ , или  $\varepsilon \in (0.577, 1]$ . На рис. 1 приведены: овал Кассини (непрерывная кривая) и эллипс (пунктир) с одинаковым значением сферичности  $\varepsilon = 0.7$ . Видим, что кривые весьма близки друг другу.

Однако овал Кассини обладает следующими недостатками: 1) он является выпуклым и поэтому удобным для моделирования лишь при  $\varepsilon \in (0.577, 1]$ ; 2) нет теории гравитации овала, тем более его обобщения на трехмерный случай. Поэтому более целесообразно использовать для моделирования эллипс (и эллипсоид — его распространение на трехмерный случай), тем более что это удобная выпуклая фигура при  $\varepsilon \in [0, \infty)$  и имеются подробные разработки теории его гравитации ([19, 20] и др.). Что же касается неоднозначности решения при использовании эллипса (или эллипсоида), то для ее устранения нужно использовать ограничения на решение и метод регуляри-

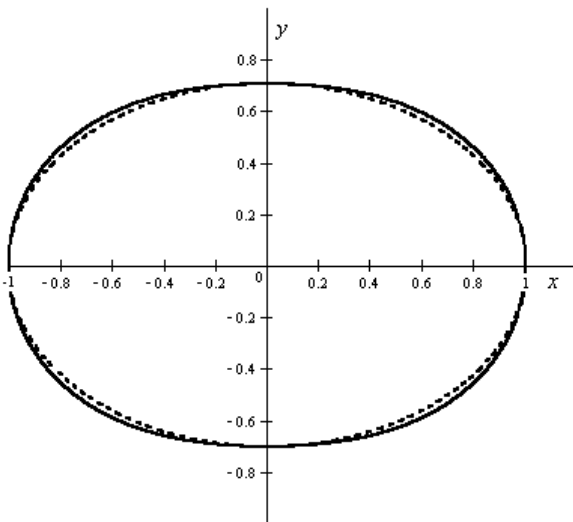


Рис. 1. Овал Кассини (сплошная линия) и эллипс (пунктир) с одинаковыми значениями сферичности  $\varepsilon = 0.7$

зации Тихонова [14, 15]. Кроме того, для снижения многозначности гравитационных моделей целесообразно использовать дополнительно сейсмические данные [3, с. 22–28], [6, с. 31–34].

### МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕСТОРОЖДЕНИЯ СФЕРОИДОМ

Пусть некоторая область  $D$  под поверхностью Земли есть однородная среда с плотностью  $\rho_0 = \text{const}$ , а месторождение (руда, нефть, интрузия, фундамент и т. д.) моделируется однородным сфероидом или несколькими сфероидами.

Напомним, *эллипсоидом* называется тело, ограниченное поверхностью, уравнение которой  $\xi^2/a^2 + \eta^2/b^2 + \zeta^2/c^2 = 1$ , где  $a, b, c$  — полуоси эллипсоида, а начало системы координат  $\xi, \eta, \zeta$  расположено в центре тела. Если две из трех полуосей равны, то эллипсоид называется *сфероидом* (двухосным эллипсоидом, эллипсоидом вращения). Ниже приводятся практически удобные формулы для потенциала и компонент напряженности гравитационного поля сфероида на поверхности Земли.

### ПОТЕНЦИАЛ И НАПРЯЖЕННОСТЬ СФЕРОИДА

#### Потенциал и напряженность сжатого сфероида

Рассмотрим *сжатый сфероид*, для которого  $a = b \geq c$ . Поместим начало системы координат  $x, y, z$  в некоторую точку на поверхности Земли, причем ось  $z$  направим вниз. Пусть  $x, y, 0$  — координаты гравиметра, а  $x_0, y_0, z_0$  — координаты центра сфероида (см. рис. 2). Исходя из работ [19, 20] в [14, 15] получены следующие формулы

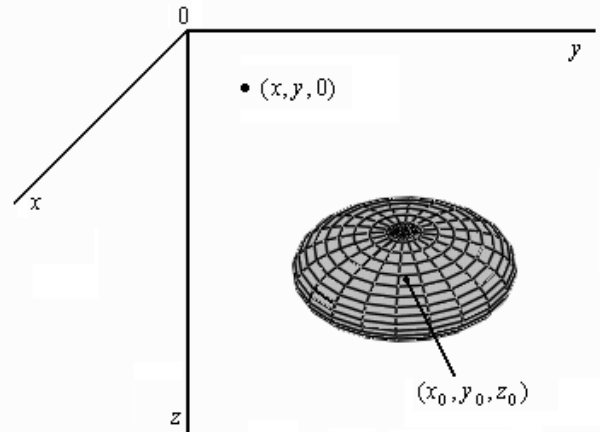


Рис. 2. Сжатый сфероид

для потенциала  $V$  и компонент напряженности  $V_z$ ,  $V_x$  и  $V_y$  в точке  $(x, y, 0)$ :

$$\left. \begin{aligned} V(x, y, 0) &= \\ &= 2\pi\gamma\rho a^2 \frac{\varepsilon}{e} \left[ \operatorname{arctg} p - \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{e^2 a^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \operatorname{arctg} p - \frac{p}{1+p^2} \right) - \frac{z_0^2}{e^2 a^2} (p - \operatorname{arctg} p) \right], \\ V_z(x, y, 0) &= 4\pi\gamma\rho \frac{\varepsilon}{e^3} (p - \operatorname{arctg} p) \cdot z_0, \\ V_x(x, y, 0) &= \\ &= -2\pi\gamma\rho \frac{\varepsilon}{e^3} \left( \operatorname{arctg} p - \frac{p}{1+p^2} \right) \cdot (x-x_0), \\ V_y(x, y, 0) &= \\ &= -2\pi\gamma\rho \frac{\varepsilon}{e^3} \left( \operatorname{arctg} p - \frac{p}{1+p^2} \right) \cdot (y-y_0), \end{aligned} \right\} (1)$$

где  $\gamma$  — гравитационная постоянная,  $\rho = \text{const}$  — плотность сфероида,  $\varepsilon = \frac{c}{a} \leq 1$  — сферичность

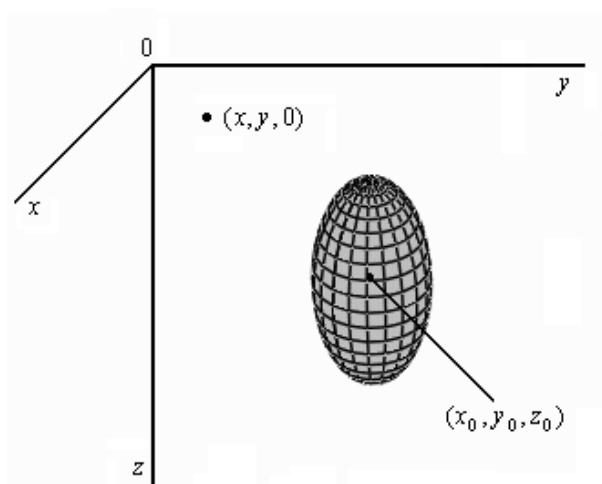


Рис. 3. Вытянутый сфероид

сфероида,  $e = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$  — его эксцентриситет,  
 $p = q/\sqrt{v}$ ,  $q = ea/r$ ,  
 $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}$ ,  
 $v = \frac{(1-q^2) + \sqrt{(1-q^2)^2 + (2qz_0/r)^2}}{2}$ .

**Потенциал и напряженность вытянутого сфероида**

В случае *вытянутого* вдоль  $z$  сфероида, когда  $a = b \leq c$  (см. рис. 3), получены следующие аналогичные формулы (также вне сфероида) [14, 15]:

$$\left. \begin{aligned} V(x, y, 0) &= \\ &= 2\pi\gamma\rho a^2 \frac{\varepsilon}{e} \left\{ \ln \left( p + \sqrt{1+p^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{z_0^2}{e^2 a^2} \left[ \ln \left( p + \sqrt{1+p^2} \right) - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{e^2 a^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ p\sqrt{1+p^2} - \ln \left( p + \sqrt{1+p^2} \right) \right] \right\}, \\ V_z(x, y, 0) &= \\ &= 4\pi\gamma\rho \frac{\varepsilon}{e^3} \left[ \ln \left( p + \sqrt{1+p^2} \right) - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right] \cdot z_0, \\ V_x(x, y, 0) &= -2\pi\gamma\rho \frac{\varepsilon}{e^3} \times \\ &\quad \times \left[ p\sqrt{1+p^2} - \ln \left( p + \sqrt{1+p^2} \right) \right] \cdot (x-x_0), \\ V_y(x, y, 0) &= -2\pi\gamma\rho \frac{\varepsilon}{e^3} \times \\ &\quad \times \left[ p\sqrt{1+p^2} - \ln \left( p + \sqrt{1+p^2} \right) \right] \cdot (y-y_0), \end{aligned} \right\} (2)$$

где

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \geq 1, \quad e = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}, \quad p = q/\sqrt{t}, \quad q = ea/r, \\ r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2},$$

$$t = \frac{(1-q^2)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(1-q^2)^2 + 4q^2 [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2] / r^2}.$$

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СФЕРОИДА-МЕСТОРОЖДЕНИЯ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотрим данную задачу на примере измерения потенциала  $V(x, y, 0)$ . Пусть в ряде точек  $(x_i, y_i, 0)$ ,  $i=1, \dots, n$  на поверхности Земли (в частности, на судне) измерены с помощью гравиметров значения потенциала  $\tilde{V}_i \equiv \tilde{V}(x_i, y_i, 0)$ ,  $i=1, \dots, n$ , где  $n$  — число точек измерения. Обозначим через  $V_i \equiv V(x_i, y_i, 0)$ ,  $i=1, \dots, n$  вычисленные согласно (1) или (2) значения  $V$ . Искомыми величинами являются следующие параметры сфероиды (имитирующего месторождение): полуось в горизонтальной плоскости  $a=b$ , сферичность  $\varepsilon$ , плотность  $\rho$  и координаты центра  $x_0, y_0, z_0$  — всего 6 искомых параметров.

Данная задача является некорректной и решается путем минимизации сглаживающего функционала Тихонова [21, с. 253]

$$\sum_{i=1}^n (\tilde{V}_i - V_i)^2 + \alpha \sum_{j=1}^6 q_j p_j^2 = \min_{a, \varepsilon, \rho, x_0, y_0, z_0}$$

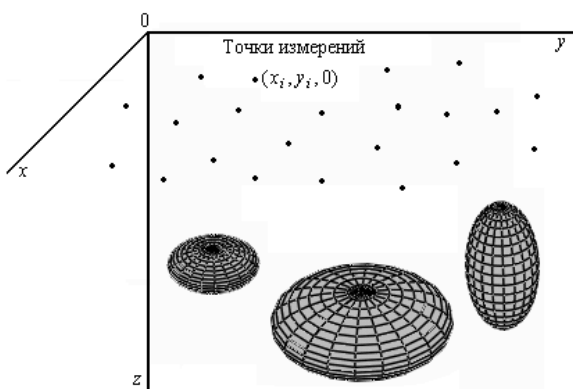


Рис. 4. Моделирование области месторождения несколькими сфероидами

где  $p_1 = a$ ,  $p_2 = \varepsilon$ ,  $p_3 = \rho$ ,  $p_4 = x_0$ ,  $p_5 = y_0$ ,  $p_6 = z_0$ ,  $q_j$  — веса,  $\alpha > 0$  — параметр регуляризации (обеспечивающий устойчивость решения). Для дополнительного повышения устойчивости и устранения неоднозначности решения следует использовать ограничения на решение:  $p_{j \min} \leq p_j \leq p_{j \max}$ , где  $p_{j \min}$ ,  $p_{j \max}$  должны быть оценены заранее. В этом случае, например,  $q_j = 1/p_{j \max}^2$ . Такая задача есть задача нелинейного программирования с регуляризацией [21, с. 253–255].

После отыскания  $a, \varepsilon, \rho, x_0, y_0, z_0$  можно найти вертикальную полуось  $c = \varepsilon a$  сфероиды-месторождения, его объем  $v = (4/3)\pi a^2 c$ , массу  $m = v\rho$ , глубину залегания  $h = z_0$  и т. д. Для более точного моделирования можно использовать несколько сфероидов (см. рис. 4).

### ТИПИЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗЕМНОЙ КОРЫ

Отметим некоторые типичные данные земной коры (подробнее см. в [1, 4, 6, 16] и др.).

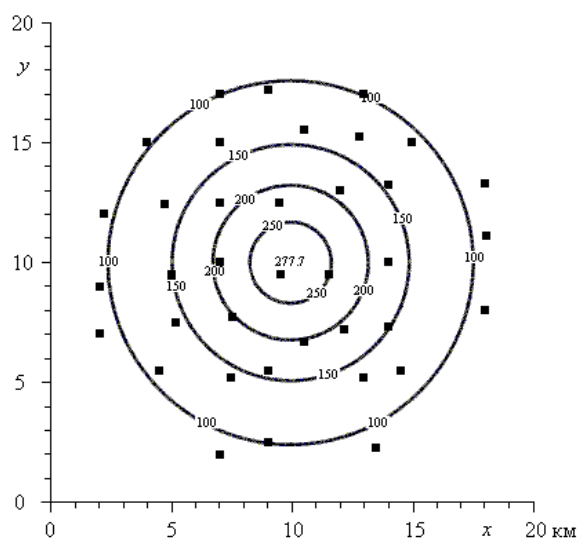
Фоновая составляющая (гравитационный эффект от земной коры) [4, с. 335–340]: средняя плотность коры  $\rho_0 = 2.67 \text{ г/см}^3$ , ее толщина  $d \approx 30 \text{ км}$ , средняя сила тяжести  $g \equiv V_z = 980 \text{ гал} = 980 \text{ см/сек}^2$ , а аномалии силы тяжести  $\Delta g \sim 0.01 - 0.1 \text{ гал}$ , т. е. на 4–5 порядков меньше  $g$  (и тем не менее такие аномалии надежно фиксируются гравиметрами).

Аномалии плотностей месторождений [4, с. 58–70]: верхнее рудное тело имеет аномалию плотности (отличие плотности от  $\rho_0$ )  $\Delta \rho = 1.6 \text{ г/см}^3$ , нижнее рудное тело имеет  $\Delta \rho = 0.8 \text{ г/см}^3$ , рыхлые отложения  $\Delta \rho = 0.7 \text{ г/см}^3$ , вторичные кварциты  $\Delta \rho = 0.05 \text{ г/см}^3$ , руда маритовая  $\Delta \rho = 3.88 \text{ г/см}^3$ , сланцы  $\Delta \rho = 2.87 \text{ г/см}^3$  и т. д. Видим, что аномалии плотностей  $\Delta \rho$  могут быть сопоставимы со средней плотностью коры  $\rho_0$ .

Типичная модель [16]:  $\Delta \rho = 0.2 \text{ г/см}^3$ , глубина залегания 5 км, размер  $2 \times 2 \text{ км}$ .

### РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Разработан пакет программ IGP1 (Inverse Gravimetry Problem, ver. 1) на Fortran'e и MathCAD'e для моделирования прямых и обратных



**Рис. 5.** Изолинии потенциала  $V(x, y, 0)$  в  $\text{см}^2/\text{с}^2$  и точки его измерений на поверхности Земли

задач гравиметрии. Приведем результаты решения прямой задачи (расчет потенциала и напряженности по заданным параметрам месторождения) для следующего *модельного примера*, в котором месторождение моделируется одним сфероидом со следующими параметрами:

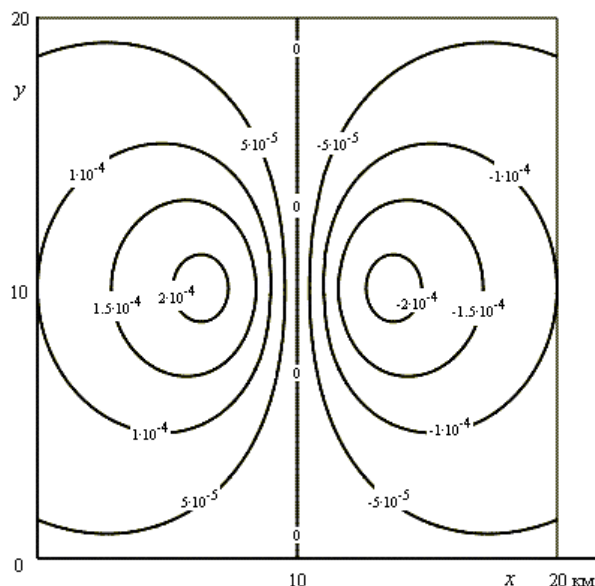
- $a = b = 1 \text{ км}$  — большие полуоси сфероида в горизонтальной плоскости,
- $\varepsilon = c/a = 0.5$  — его сферичность,
- $\rho = 1 \text{ г/см}^3$  — его плотность,
- $x_0 = y_0 = 10 \text{ км}, z_0 = 5 \text{ км}$  — глубина его залегания.

На рис. 5–10 приведены результаты расчетов по формулам (1). На рис. 5 представлены изолинии гравитационного потенциала  $V(x, y, 0)$  в  $\text{см}^2/\text{сек}^2$  и точки измерений потенциала на поверхности Земли. На рис. 6 — изолинии, а на рис. 7 — поверхность напряженности  $V_x(x, y, 0)$  в  $\text{см}/\text{сек}^2$ . На рис. 8 — изолинии напряженности  $V_y(x, y, 0)$  в  $\text{см}/\text{сек}^2$ .

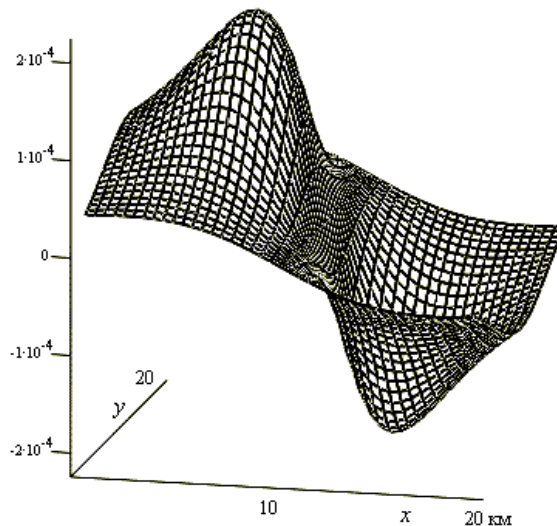
На рис. 9 — поверхность  $\sqrt{V_x^2 + V_y^2}$  в  $\text{см}/\text{сек}^2$ .

На рис. 10 — изолинии напряженности  $V_z(x, y, 0)$  в  $\text{см}/\text{сек}^2$ . Видим, что картины гравитационных полей даже от одного сфероида могут быть довольно сложными.

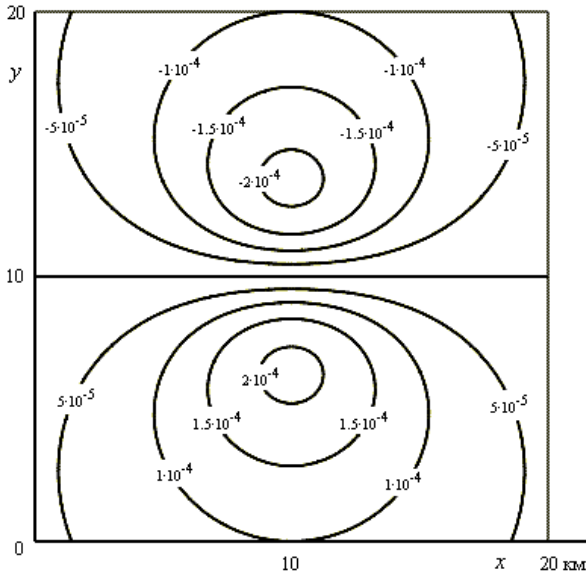
Результаты решения обратной задачи будут опубликованы.



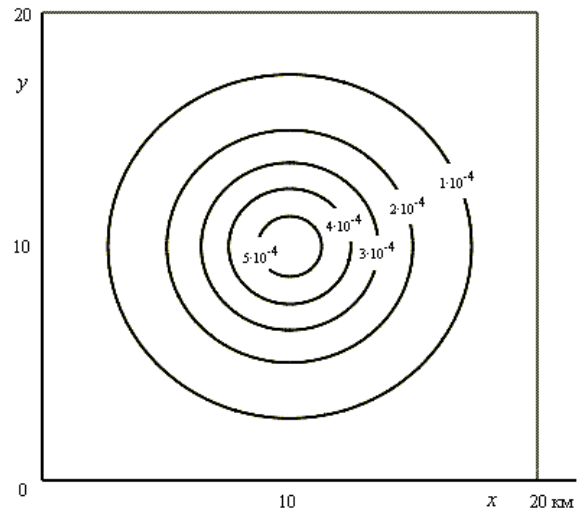
**Рис. 6.** Изолинии напряженности  $V_x(x, y, 0)$  в  $\text{см}/\text{с}^2$



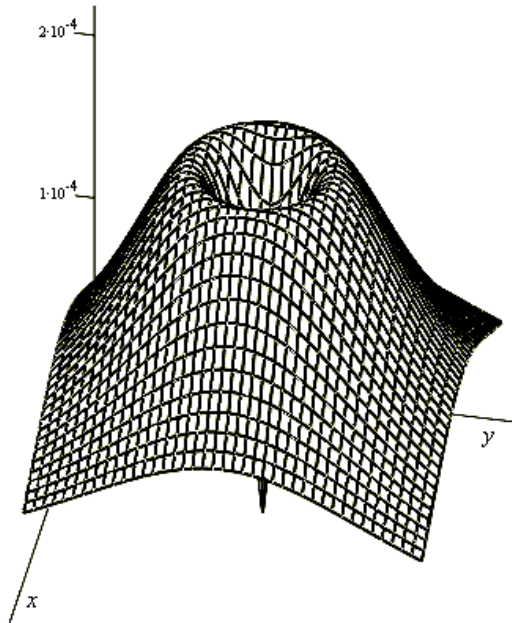
**Рис. 7.** Поверхности значений напряженности  $V_x(x, y, 0)$  в  $\text{см}/\text{с}^2$



**Рис. 8.** Изолинии напряженности  $V_y(x, y, 0)$  в  $\text{см/с}^2$



**Рис. 10.** Изолинии напряженности  $V_z(x, y, 0)$  в  $\text{см/с}^2$



**Рис. 9.** Поверхности значений  $\sqrt{V_x^2 + V_y^2}$  в  $\text{см/с}^2$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. Киев: Наук. думка, 1978. 227 с.
2. Гласко В.Б., Мудрецова Е.А., Страхов В.Н. Обратные задачи гравиметрии и магнитометрии // Некорректные задачи естествознания / Под ред. А.Н. Тихонова, А.В. Гончарского. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 89–102.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 287 с.
4. Докл. всесоюзн. семинара "Теория и методика интерпретации гравимагнитных полей" / Старостенко В.И., Страхов В.Н. (ред.). Киев.: Наук. думка, 1981. 411 с.
5. Страхов В.Н. Методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Пермь: Изд. ПГУ, 1984. 72 с.
6. Материалы VII научно-техн. конф. геофизиков Украины "Алгоритмы, методика и результаты интерпретации геофизических данных" / Старостенко В.И. (ред.). Киев: Наук. думка, 1985. 260 с.
7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А. Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987. 160 с.

8. Физика визуализации изображений в медицине (в 2-х т.) / Уэбб С. (ред.). М.: Мир, 1991. Т. 1: 408 с. Т. 2: 408 с.
9. Сизиков В.С. Математические методы обработки результатов измерений. СПб.: Политехника, 2001. 240 с.
10. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990. 288 с.
11. Иванов В.А. Внутривидение (ЯМР-томография). Л.: Знание, 1989. 32 с.
12. Cho Z.H., Jones J.P., Singh M. Foundation of medical imaging. New York: Wiley, 1993. 400 p.
13. Галайдин П.А., Замятин А.И., Иванов В.А. Основы магниторезонансной томографии. СПб.: Изд. ИТМО, 1998. 24 с.
14. Голов И.Н., Сизиков В.С. Обратная задача гравиметрии как задача внутривидения // Научно-техн. вестник. СПбГИТМО(ТУ), 2001. Т. 197, вып. 3. С. 171–175.
15. Голов И.Н. Интерпретация гравиметрических измерений как задача томографии и внутривидения // Изв. вузов: Приборостроение. 2002. Т. 45, № 7. С. 20–24.
16. Булах Е.Г., Шиншин И.В. Алгоритмическое и программное решение задачи построения аналитической модели гравитационного поля // Геофиз. журнал. 2000. Т. 22, № 2. С. 107–114.
17. Новиков П. Об единственности решения обратной задачи потенциала // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18, № 3. С. 165–168.
18. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов (изд-е 13-е). М.: Наука, 1986. 544 с.
19. Субботин М.Ф. Курс небесной механики, т. 3. Л.-М.: ГИТТЛ, 1949. 280 с.
20. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы (изд-е 3-е). М.: Наука, 1975. 800 с.
21. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наук. думка, 1986. 544 с.

*Санкт-Петербургский государственный институт точной механики и оптики (технический университет)*

Материал поступил в редакцию 10.04.2003.

## INTERPRETATION OF THE INVERSE GRAVIMETRY PROBLEM AS A PROBLEM OF GRAVITATIONAL TOMOGRAPHY AND INTRAVISION OF THE EARTH

**I. N. Golov, V. A. Ivanov, V. S. Sizikov**

*Saint-Petersburg State Institute of Fine Mechanics and Optics (Technical University)*

The inverse gravimetry problem is treated as a problem of gravitational tomography and intravision of the Earth. Geological deposits are modeled by homogeneous spheroids. Formulae for the gravitational potential and spheroid strength components are used. The problem of determining spheroid parameters is formulated as that of functional minimization with regularization and constraints on the solution. Results of numerical experiments are given.