ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2003, том 13, № 2, с. 22–26

300 лет Санкт-Петербургу
Материалы XXXII конференции СПбГИТМО(ТУ)

УДК 681.2.001: 681.325.3: 603.23

© **В. А. Иванов, М. Я. Марусина, А. В. Флегонтов**

ИНВАРИАНТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В МР-ТОМОГРАФИИ

Рассмотрен метод уменьшения влияния артефактов на МР-изображения с помощью теории инвариантов. Эта задача сводится к синтезу групп измерительных преобразований, передающих измеряемую величину без искажений, т. е. решается вопрос об инвариантной аппроксимации исследуемой функции функциями меньшего числа переменных. Приведена техника построения допустимых групп, вычислены инварианты и построены функции через инварианты, представлены примеры.

ВВЕДЕНИЕ

Основная задача работы состоит в отыскании функций, инвариантных относительно действия заданной группы и наилучшим образом аппроксимирующих выделенную функцию. Этот вопрос рассматривается на примере проблем, возникающих при обработке измерительной информации в условиях неопределенностей в МР-томографии. При этом возникает необходимость аппроксимировать функцию, описывающую эхо-сигнал, функцией, не зависящей от некоторых переменных. Выявленные групповыми методами фиктивные переменные заменяются инвариантами.

Свойства инвариантности (или симметрии) рассматриваемых уравнений являются фундаментальными свойствами любого сложного процесса и соответственно математической модели, описывающей этот процесс. Практическая же эффективность инвариантных методов распространяется на все типы математических моделей.

Знание группы симметрии — группы допускаемых преобразований переменных или параметров — также дает существенную информацию об изучаемой модели, а именно: средство классификации множества функций, формирующих модель; средство классификации семейств самих моделей, зависящих от произвольных параметров или функций; возможность определения структурных типов моделей, допускающих заданную группу симметрии.

Анализ проблем, связанных с симметрией сложных процессов, приводит к необходимости решения как прямых, так и обратных задач.

Прямые задачи связаны с непосредственным анализом рассматриваемых функций и процессов на предмет наличия симметрии; поиском допускаемых групп преобразований; синтезом инвариантов и инвариантных семейств; групповой классификации и т.п.

Более общие обратные задачи в свою очередь связаны с синтезом типов функций и уравнений заданных структур и порядков, допускающих симметрию определенного вида (точечную, Ли—Беклунда, неклассическую и др.), представлением функций через инварианты и инвариантные аппроксимации. Решение таких задач позволяет выделить весь спектр возможных моделей для описания процесса или явления, имеющего априорную симметрию, что особенно часто требуется в физических приложениях. Алгоритм решения таких задач в общем случае существенно отличается от алгоритма решения прямых задач. Так например, прямая задача поиска допускаемой дискретной группы приводится к решению системы нелинейных уравнений с частными производными, а обратная — к соответствующему функциональному уравнению.

ПОСТРОЕНИЕ ДОПУСКАЕМЫХ ГРУПП

Для поиска группы G многомерных однопараметрических преобразований (для простоты рассматривается 3-мерный случай, $n = 3$) в пространстве точек $x = (x_1, x_2, x_3)$ в виде

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, \tau), \\ \tilde{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, \tau), \\ \tilde{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, \tau), \end{cases} \quad \begin{cases} f_1(\tau = 0) = x_1, \\ f_2(\tau = 0) = x_2, \\ f_3(\tau = 0) = x_3, \end{cases} \tag{1}$$

допускаемой заданной системой уравнений

$$F_1(x) = 0, \ldots, F_s(x) = 0, \qquad s < n, \tag{2}$$

определяющих $(n - s)$-мерную поверхность M, необходимо из уравнения (критерия инвариантности)

$$XF_k\big|_M = 0, \quad k = 1, \ldots, s \tag{3}$$

найти координаты $\xi^i(x)$ инфинитезимального оператора

$$X = \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \xi^i(x) = \left.\frac{\partial f_i(x,\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}. \qquad (4)$$

В 3-мерном случае этот оператор имеет вид

$$X = \xi(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + \eta(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \\ + \zeta(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}. \qquad (5)$$

Затем путем решения уравнений Ли

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{x}_i}{\mathrm{d}\tau} = \xi^i(\tilde{x}), \quad \tilde{x}_i(\tau=0) = x_i, \quad i = 1,\ldots,n \qquad (6)$$

можно найти и сами преобразования (1) допускаемой группы.

Алгоритм поиска координат инфинитезимального оператора, часто называемый алгоритмом Ли, состоит из следующих этапов:

1) задание вида инфинитезимального оператора и его продолжений с учетом конкретного вида исходной системы (2);

2) действие полученным оператором на уравнение, т. е. непосредственное вычисление производных Ли;

3) переход на поверхность M, задаваемую исходными уравнениями, т. е. замыкание относительно уравнений;

4) расщепление полученного уравнения по степеням независимой переменной x_3.

На этапе 3 получаем определяющее уравнение (ОУ), а на этапе 4 определяющую систему (ОС).

Выделенные таким образом коэффициенты при различных степенях независимой переменной представляют собой линейные однородные выражения относительно ξ и η и их производных по переменным x_1 и x_2. Условие равенства этих выражений нулю и дает соответствующую ОС. В силу переопределенности такой системы определяющих уравнений удается, как правило, получить наиболее общее ее решение и тем самым найти полную алгебру Ли.

Пример 1

Рассмотрим параболоид вращения, заданный в форме

$$F(x_1,x_2,x_3) = x_1^{\,2} + x_2^{\,2} - x_3 = 0. \qquad (7)$$

Применяя алгоритм Ли для критерия (3) с оператором (5), получим ОУ в виде

$$\eta_{x_1} + \left(\eta_{x_2} - \xi_{x_1}\right)x_3 - x_3^{\,2}\xi_{x_2} - \xi F_{x_1} - \eta F_{x_2} = 0,$$

которое приведет к следующей ОС:

$$x_3^{\,2}: \ \xi_{x_2} = 0, \quad x_3: \ \eta_{x_2} - \xi_{x_1} = 0,$$
$$x_3^{\,0}: \ \eta_{x_1} - 2x_1\xi - 2x_2\eta = 0.$$

Следуя работе [2], получим: рассматриваемый параболоид вращения допускает оператор Ли (5) в виде $X = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + 2x_3\frac{\partial}{\partial x_3}$. Таким образом, найденная группа неоднородных растяжений $\tilde{x}_1 = x_1 e^{\tau}$, $\tilde{x}_2 = x_2 e^{\tau}$, $\tilde{x}_3 = x_3 e^{2\tau}$ перемещает точки параболоида вдоль этой поверхности, и, следовательно, каждое из уравнений, задающих рассматриваемый параболоид, инвариантно. Однако, как легко убедиться, для самой исходной функции (7), задающей параболоид, не выполняется условие инвариантности $F(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3) \neq F(x_1,x_2,x_3)$, т. е. она не является инвариантом найденной группы. В то же время можно построить еще как минимум 3 инвариантные функции, эквивалентные исходной.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНВАРИАНТОВ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧЕРЕЗ ИНВАРИАНТЫ

Если же, наоборот, группа G задана, и нужно найти допускающую ее систему уравнений, то удобно воспользоваться теоремой [1] о представлении инвариантных уравнений с помощью инвариантов. В этом случае систему (2) можно равносильным образом переписать так, что левые части уравнений будут инвариантами группы G, т. е. в виде

$$\Phi_k\left(J_1(x),\ldots,J_{n-1}(x)\right) = 0, \quad k = 1,\ldots,s, \qquad (8)$$

где $J_1(x),\ldots,J_{n-1}(x)$ — базис инвариантов группы G. Таким образом, уравнения (2) и (8) будут задавать одну и ту же поверхность M.

Из условий (3) и (8) следует, что всякая однопараметрическая группа точечных преобразований имеет ровно $n-1$ функционально независимых инвариантов, в качестве которых можно взять левые части $n-1$ первых интегралов $I_1(x) = C_1,\ldots,I_{n-1}(x) = C_{n-1}$ сопряженной с (3) системы обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнений характеристик)

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\xi} = \frac{\mathrm{d}x_2}{\eta} = \frac{\mathrm{d}x_3}{\zeta} = \frac{\mathrm{d}x_4}{\varsigma_1}\cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{\varsigma_{n-3}}. \qquad (9)$$

Пример 2

Вычислим инварианты и построим инвариантные функции для рассмотренного параболоида вращения из примера 1. Для этого в соответствии с найденным оператором запишем систему (9) в виде

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{x_2}=\frac{\mathrm{d}x_3}{2x_3}.$$

Решая систему ОДУ, получим 3 возможных инварианта

$$J_1=\frac{x_1}{x_2},\qquad J_2=\frac{x_1^{\ 2}}{x_3},\qquad J_3=\frac{x_2^{\ 2}}{x_3},$$

2 из которых образуют функционально независимый базис. Разрешая каждый раз один из инвариантов относительно x_3 и подставляя полученное выражение в исходную функцию $F(x)=0$, получим 3 инвариантные функции из вычисленных инвариантов:

$$\begin{aligned}&\Phi_1(J_1,J_2)=1+J_1^{\ -1}-J_2^{\ -1}=0,\\ &\Phi_2(J_1,J_3)=1+J_1^{\ 2}-J_3^{\ -1}=0,\\ &\Phi_3(J_2,J_3)=J_2+J_3-1=0.\end{aligned}\tag{10}$$

Таким образом, каждое из уравнений (10) и (7) задает одну и ту же поверхность, но в (7) определена неинвариантная функция 3 переменных, а в (10) построены инвариантные функции 2 аргументов. Представления одних через другие имеет вид:

$$F_1(x_1,x_2,x_3)=1+\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_3}{x_1^{\ 2}}=\Phi_1(J_1,J_2),$$

$$F_2(x_1,x_2,x_3)=1+\frac{x_1-x_3}{x_2^{\ 2}}=\Phi_2(J_1,J_3),$$

$$F_3(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}}{x_3}-1=\Phi_3(J_2,J_3).$$

Аналогичным образом решаются и более общие задачи поиска общего вида функций или динамических процессов, инвариантных относительно заданных групп, другими словами, с априорной симметрией. Так, в работе [3] приводится общий вид функции, инвариантной относительно группы вращения

$$\Phi(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_1x_3-x_2}{x_1+x_2x_3}-F(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2})=0,$$

а из приведенных в работах [1, 4] таблиц можно получить, например, функции, инвариантные относительно групп трансляций или проективных преобразований

$$\hat{\Phi}(x_1,x_2,x_3)=x_3-F(x_2)=0,$$

$$\widetilde{\Phi}(x_1,x_2,x_3)=x_1x_3-x_2-F(\frac{x_2}{x_1})=0,$$

где F — произвольная функция.

Если группа многопараметрическая, то у нее столько операторов, сколько независимых параметров.

Пример 3

Рассмотрим 3-параметрическую группу движений на плоскости

$$\begin{cases}\widetilde{x}_1=\tau_1+x_1\cos\tau_3+x_2\sin\tau_3,\\ \widetilde{x}_2=\tau_2-x_1\sin\tau_3+x_2\cos\tau_3.\end{cases}$$

Построим соответствующие операторы и вычислим инварианты. Координаты операторов легко получаются из соотношений

$$\frac{\partial\widetilde{x}_1}{\partial\tau_1}=1,\qquad \frac{\partial\widetilde{x}_1}{\partial\tau_2}=0,\qquad \frac{\partial\widetilde{x}_2}{\partial\tau_1}=0,\qquad \frac{\partial\widetilde{x}_2}{\partial\tau_2}=1,$$

$$\frac{\partial\widetilde{x}_1}{\partial\tau_3}=-x_1\sin\tau_3+x_2\cos\tau_3\big|_{\tau_1=\tau_2=\tau_3=0}=x_2,$$

$$\frac{\partial\widetilde{x}_2}{\partial\tau_3}=-x_1\cos\tau_3-x_2\sin\tau_3\big|_{\tau_1=\tau_2=\tau_3=0}=-x_1,$$

откуда получим 2 оператора переноса и один вращения

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x_1},\qquad X_2=\frac{\partial}{\partial x_2},\qquad X_3=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Решая соответствующие уравнения характеристик, получим семейство возможных инвариантов $J_1=x_2$, $J_2=x_1$, $J_3=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}$.

Переходя в группе вращения к каноническим переменным $u=\sqrt{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}}$, $t=\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}$, получим, например, следующие инвариантные семейства

$$\Phi_1(x_1,x_2)=\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}-C=0,$$

$$\Phi_2(x_1,x_2)=\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}+\sqrt{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}}-C=0.$$

Перейдя к инвариантам, получим функциональную зависимость между инвариантными функциями от инвариантов в виде

$$\Phi_1\left(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}\right)=\Phi_2\left(\frac{x_1}{x_2}\right),$$

что подтверждается и вычислением определителя

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0 .$$

ИНВАРИАНТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ В МР-ТОМОГРАФИИ

Математически влияние неоднородностей магнитных полей при получении МР-изображений можно уменьшить с помощью теории инвариантов. Представим уравнение для эхо-сигнала в упрощенном виде:

$$S = k\rho(1 - \exp(-TR / T_1)) \exp(-TE / T_2^*) , \qquad (11)$$

причем $\dfrac{1}{T_2^*} = \dfrac{1}{T_2} + \dfrac{1}{T_{2\Delta B}} + \dfrac{1}{T_{2темп.}}$, а TR и TE — аппаратные функции (TR — время повторения, TE — время эхо-сигнала).

Перепишем выражение (11) в виде:

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4) = kx_1(1 - e^{-a_1/x_2})e^{-a_2/x_3}e^{-a_2/x_4}, \qquad (12)$$

где переменная x_1 представляет собой спиновую плотность ρ, x_2 — спин-решеточное время релаксации T_1, x_3 — спин-спиновое время релаксации T_2, x_4 — является вещественной переменной, от которой зависит интенсивность сигнала. В x_4 входят возмущающие факторы, во-первых, зависящие от молекулярных процессов, — T_2, во-вторых, связанные с неоднородностью магнитных полей, — $T_{2\Delta B}$ и, в-третьих, связанные с температурной нестабильностью — $T_{2темп}$, т. е. $x_4 = f(T_2, T_{2\Delta B}, T_{2темп})$ является фиктивной переменной.

Задача уменьшения влияния артефактов изображения может быть решена с использованием теории инвариантов. Эта задача сводится к синтезу групп G измерительных преобразований, передающих измеряемую величину без искажений. Такая задача позволяет найти преобразование, с помощью которого можно было бы уменьшить влияние факторов $T_{2\Delta B}$ и $T_{2темп}$ на контрастность изображения, т. е. в выражении (12) необходимо аппроксимировать исследуемую функцию функцией, не зависящей от переменной x_4, другими словами, решить задачу инвариантной аппроксимации [5]. Такое преобразование возможно при помощи группы всех сдвигов по фиктивным переменным. Реализация такой группы возможна при переходе от старых координат к новым в виде:

$$\tilde{x}_1 \to x_1, \quad \tilde{x}_2 \to x_2, \quad \tilde{x}_3 \to x_3, \quad \tilde{x}_4 \to x_4 - \tau .$$

Тогда на основании доказанных теорем [5] следует, что искомая инвариантная функция будет иметь вид

$$\begin{aligned} &S_1(x_1, x_2, x_3) = \\ &= \frac{1}{2} \sup_{0 \le x_4 \le 1} S(x_1, x_2, x_3, x_4) + \\ &+ \frac{1}{2} \inf_{0 \le x_4 \le 1} S(x_1, x_2, x_3, x_4). \end{aligned} \qquad (13)$$

Для функции (12) выполнение условия (13) приводит к выражениям

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \le x_4 \le 1} S(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Big|_{\text{при } x_4 = 0} = \\ &= k\, x_1 (1 - e^{-a_1/x_2}) e^{-a_2/x_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\inf_{0 \le x_4 \le 1} S(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Big|_{\text{при } x_4 = 1} = \\ &= \frac{k}{e^{a_2}} x_1 (1 - e^{-a_1/x_2}) e^{-a_2/x_3}, \end{aligned}$$

откуда окончательно получим инвариантную аппроксимацию в виде

$$\begin{aligned} &S(x_1, x_2, x_3, x_4) = S_1(x_1, x_2, x_3) = \\ &= \frac{k\left(1 + e^{a_2}\right)}{2e^{a_2}} x_1 (1 - e^{-a_1/x_2}) e^{-a_2/x_3}. \end{aligned} \qquad (14)$$

Итак, нам удалось аппроксимировать эхо-сигнал функцией, не зависящей от возмущающих факторов. Применение предложенного метода позволит улучшить контрастность МР-изображений, а следовательно, повысить качество МР-томограмм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
2. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
3. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
4. *Зайцев В.Ф.* Введение в современный групповой анализ: Вып. 2. СПб.: РГПУ, 1996. 40 с.
5. Математические методы построения и анализа

алгоритмов / Отв. ред. А.О. Слисенко. Л.: Наука, 1990. 238 с.

Санкт-Петербургский государственный институт точной механики и оптики (технический университет)

Материал поступил в редакцию 10.04.2003.

INVARIANT APPROXIMATIONS AND THEIR APPLICATION IN MR TOMOGRAPHY

V. A. Ivanov, M. Ya. Marusina, A. V. Flegontov

Saint-Petersburg State Institute of Fine Mechanics and Optics (Technical University)

A method of reduction of the artefact influence on MR images using the theory of invariants is considered. This task is reduced to synthesis of groups of measuring transformations leaving dimension without distortions, i.e. solving the problem of invariant approximation of a given function by functions of less variables. The construction of allowable groups, calculation of invariants and functions using the invariants are described, examples are given.