

300 лет Санкт-Петербургу
Материалы XXXII конференции СПбГИТМО(ТУ)

УДК 538.69.083.2: 621.318.4

© В. А. Иванов, М. Я. Марусина, Н. Г. Рущенко, В. С. Сизиков

РЕКОНСТРУКЦИЯ МР-ИЗОБРАЖЕНИЙ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ПОЛЕЙ

Рассматривается задача реконструкции МР-изображений в условиях неоднородностей основного магнитного поля B и градиентных полей G_x , G_y , G_z . Неоднородности $\Delta B(x, y)$, $\Delta G_x(x, y)$, $\Delta G_y(x, y)$, $\Delta G_z(x, y)$ должны быть известными детерминированными монотонными функциями. Задача решается модифицированным методом Кумара—Велти—Эрнста и методом регуляризации Тихонова.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существует несколько методов реконструкции МР-изображений. Реконструкция МР-изображения — это определение распределения плотности протонов (или спиновой плотности) по сечению $c(x, y)$ или по объему $c(x, y, z)$ на основе измеренного эхо-сигнала $S(t)$ [1–5]. Одним из наиболее эффективных является метод Кумара—Велти—Эрнста [2–5], в котором плотность c определяется посредством двумерного или трехмерного преобразования Фурье над эхо-сигналом $S(t)$. Для реализации этого метода существует несколько практических схем [4, 5]. Однако в этом случае требуется высокая степень однородности основного магнитного поля (относительная неоднородность $\sim 10^{-6} \div 10^{-7}$) [6] и градиентных полей ($\sim 10^{-3}$) [7], что приводит к большому количеству технических проблем.

Между тем в работах [8–10] предложен метод, математически учитывающий неоднородности полей и позволяющий решать задачу реконструкции МР-изображений в условиях значительной неоднородности магнитных полей ($\sim 10^{-1}$).

В данной статье проводится дальнейшее развитие метода, предложенного в работах [8–10] (см. также [5, с. 53–55]).

ЭКСПЕРИМЕНТ В СЛУЧАЕ ОДНОРОДНОСТИ ПОЛЕЙ И ЕГО МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

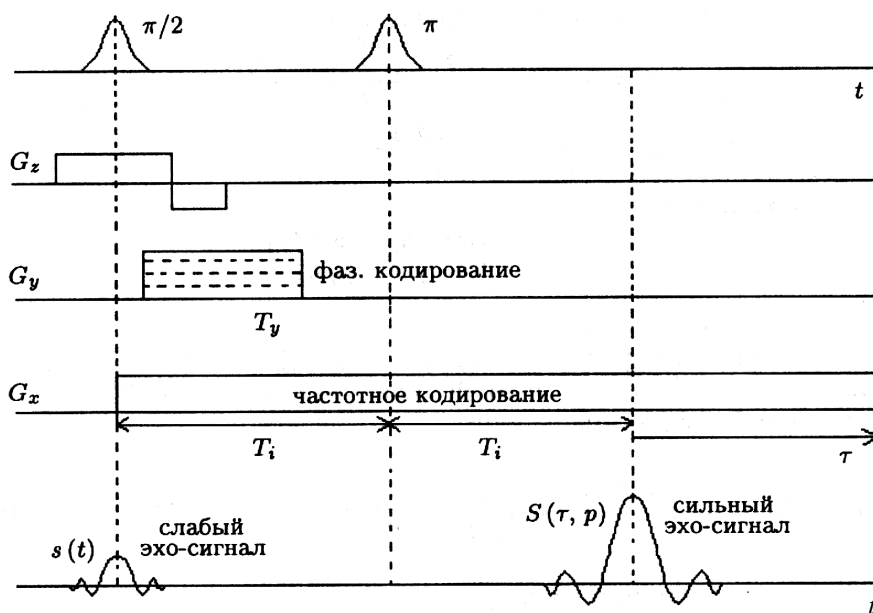
Рассмотрим так называемую 1-ю практическую схему эксперимента [4, с. 272], [5, с. 48–49] (см. рисунок). Согласно этой схеме, вдоль z включается градиентное поле $G_z = g_z z$. Вдоль x включается одно градиентное поле $G_x = g_x x$ (в прин-

ципе бесконечной длительности), т. е. создается частотное кодирование, поскольку этому соответствует постоянство лишь частоты $\gamma g_x x$, где γ — гиромагнитное отношение. Вдоль y включается поочередно несколько градиентных полей $G_y = g_y y$ с различными g_y продолжительностью T_y , т. е. при каждом значении g_y создается фазовое кодирование, поскольку каждому эхо-сигналу соответствует постоянство фазы $\gamma g_y y T_y$. При этом для селекции полагается, как обычно, что $g_z \gg g_x$ и $g_z \gg g_y$ [5, с. 46]. Помимо трех градиентных полей включается также статическое поляризующее однородное магнитное поле $B_0 = \text{const}$.

Для получения эхо-сигнала от ансамбля протонов (или сигнала спада свободной индукции (ССИ)) создаются $\pi/2$ - и π -импульсы Карра—Парселла (согласно методу эха Ганна). При этом, чтобы устранить расфазирование магнитных моментов протонов (спинов) вдоль z -координаты в пределах эффективной толщины слоя, используется методика Хоулта — изменение направления градиентного поля G_z на противоположное [5, с. 48].

Данный эксперимент требует идеальной однородности полей. Под этим будем подразумевать не только однородность основного поля ($B_0 = \text{const}$), но и изменение градиентных полей по точным законам: $G_z = g_z z$, $G_x = g_x x$, $G_y = g_y y$.

В условиях такого эксперимента от z -слоя протонов будет исходить ряд эхо-сигналов S (столько сигналов в виде временных процессов $S(t)$, сколько задано значений g_y). Двумерный эхо-сигнал, идущий от всего z -слоя, с учетом его волновой



Практическая схема эксперимента

природы можно записать в виде (ср. [5, с. 49])

$$S(t, g_y) = A \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, y) \times \exp[i\gamma(g_x x t + B_0 t + g_y y T_y)] dx dy, \quad (1)$$

где $S(t, g_y) = S_{\omega_z}(t, g_y)$ — измеренный сильный эхо-сигнал, $c(x, y) = c_z(x, y)$ — искомая плотность в z -слое, A — некоторая константа. Запишем (1) иначе:

$$S(t, g_y) = A \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, y) \times \exp\{i[\gamma(B_0 + g_x x)t + \gamma T_y y g_y]\} dx dy. \quad (2)$$

Введя новые переменные $\xi = \gamma(B_0 + g_x x)$, $\eta = \gamma T_y y$, получим (2) в виде двумерного преобразования Фурье:

$$S(t, g_y) = D \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c\left(\frac{\xi - \omega_0}{\gamma g_x}, \frac{\eta}{\gamma T_y}\right) \times \exp[i(\xi t + \eta g_y)] d\xi d\eta, \quad (3)$$

где $D = A/(\gamma^2 T_y g_x)$, $\omega_0 = \gamma B_0$.

Используя одно из свойств преобразования Фурье — масштабирование (scaling) [4, с. 24], получим:

$$c\left(\frac{\xi - \omega_0}{\gamma g_x}, \frac{\eta}{\gamma T_y}\right) = F \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(t, g_y) \times \exp[-i(\xi t + \eta g_y)] dt dg_y, \quad (4)$$

где $F = 1/(4\pi^2 D)$.

Формула (4) позволяет в принципе получить распределение плотности $c = c_z$ по измеренному эхо-сигналу $S = S_{\omega_z}$. При этом двумерное непрерывное преобразование Фурье (НПФ) (4) должно реализовываться через дискретное преобразование Фурье (ДПФ) или быстрое преобразование Фурье (БПФ). В этом случае задание равномерных сеток узлов по t , g_y , ξ и η породит также равномерные сетки по $x = (\xi - \omega_0)/(\gamma g_x)$ и $y = \eta/(\gamma T_y)$ для плотности c .

Для повышения устойчивости вычисления преобразования Фурье предлагается использовать метод регуляризации Тихонова [11]. В этом случае формула (4) запишется в виде регуляризованного решения:

$$c_\alpha \left(\frac{\xi - \omega_0}{\gamma g_y}, \frac{\eta}{\gamma T_y} \right) = F \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(t, g_y)}{1 + \alpha M(t, g_y)} \times \exp[-i(\xi t + \eta g_y)] dt dg_y, \quad (5)$$

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации, а $M(t, g_y)$ — функция вида

$$M(t, g_y) = \left(\frac{t}{t_{\max}} \right)^{2n} + \left(\frac{g_y}{g_{y \max}} \right)^{2n}, \quad (6)$$

причем $n = 1, 2, 3, \dots$ — порядок регуляризации (обычно $n = 1$), t_{\max} и $g_{y \max}$ — максимальные значения t и g_y .

Существует ряд способов выбора параметра регуляризации α [5]: способ невязки (использует значение среднеквадратической погрешности измерения S), способ подбора и др.

Решение ряда примеров показывает [5, с. 170–172], [11], что использование метода регуляризации Тихонова уменьшает погрешность вычисления c_α согласно (5) по сравнению с вычислением c согласно (4) (а значит, увеличивает отношение сигнал/помеха) в 2–3 раза.

ЭКСПЕРИМЕНТ В СЛУЧАЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОЛЕЙ И ЕГО МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

В предыдущем пункте мы описали эксперимент, использующий высокооднородные магнитные поля. Теперь рассмотрим эксперимент, использующий вместо $B_0 = \text{const}$ неоднородное поле $B(x, y) = B_0 + \Delta B(x, y)$, а вместо градиентных полей $G_x = g_x x$ и $G_y = g_y y$ — градиентные поля вида $G_x + \Delta G_x(x, y)$ и $G_y + \Delta G_y(x, y)$. Здесь $\Delta B(x, y)$, $\Delta G_x(x, y)$ и $\Delta G_y(x, y)$ — неоднородности полей. Схема такого эксперимента аналогична схеме эксперимента с однородными полями (см. рисунок).

Математически задача описывается следующим двумерным интегральным уравнением [5, с. 54], [8, 9]:

$$A \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, y) \exp\{i[\Omega(x, y)\tau + P(x, y)p]\} dx dy = S(\tau, p), \quad (7)$$

где

$$\Omega(x, y) = \gamma [B_0 + \Delta B(x, y) + g_x x + \Delta G_x(x, y)],$$

$$P(x, y) = \gamma [g_{y0} y + \Delta G_y(x, y)] T_y, \\ \tau = t - 2T.$$

Здесь $\Delta B(x, y)$, $\Delta G_x(x, y)$, $\Delta G_y(x, y)$ — неоднородности полей. Имеются в виду неоднородности, обусловленные в первую очередь техническими особенностями. Под ΔB подразумевается отклонение от $B = B_0 = \text{const}$, а под ΔG_x и ΔG_y — отклонения от законов $g_x x$ и $g_y y$. Например, если магнитное поле создано одной катушкой в виде соленоида с однородным распределением тока вдоль ее обмотки, то поле B будет падать от центра катушки к ее краям в ≈ 1.5 раза в типичных случаях [5, с. 59], а от оси катушки к ее обмотке возрастать. Ставится задача: в условиях высокой неоднородности полей выполнить реконструкцию МР-изображения, т. е. найти функцию $c(x, y) = c_z(x, y)$ путем решения уравнения (7).

Отметим свойства функций $\Delta B(x, y)$, $\Delta G_x(x, y)$, $\Delta G_y(x, y)$, которым они должны удовлетворять, чтобы задача реконструкции имела решение и притом единственное. Функции $\Delta B(x, y)$, $\Delta G_x(x, y)$, $\Delta G_y(x, y)$ должны быть известными гладкими детерминированными (неслучайными) функциями x и y . Существующими в настоящее время техническими средствами можно добиться выполнения данных свойств неоднородностей магнитных полей.

Рассмотрим ряд градиентных полей по y , равных $p [g_{y0} y + \Delta G_y(x, y)]$, где $p \in [p_{\min}, p_{\max}]$, $g_{y0} \neq 0$, например, $g_{y0} = \min |g_y| \neq 0$, а $p = \pm 1, \pm 2, \dots$

Остановимся на способе решения уравнения (7) относительно $c(x, y)$. Введем новые переменные

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \Omega(x, y), \\ \eta &= P(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Систему нелинейных уравнений (СНУ) (8) относительно x и y запишем подробнее:

$$\left. \begin{aligned} \gamma B_0 + \gamma \Delta B(x, y) + \gamma g_x x + \gamma \Delta G_x(x, y) &= \xi, \\ \gamma g_{y0} y T_y + \gamma \Delta G_y(x, y) T_y &= \eta. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Запишем систему (9) в виде, удобном для решения методом итераций:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\xi - \omega_0}{\gamma g_x} - \frac{\Delta B(x, y) + \Delta G_x(x, y)}{g_x}, \\ y &= \frac{\eta}{\gamma g_{y0} T_y} - \frac{\Delta G_y(x, y)}{g_{y0}}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где $\omega_0 = \gamma B_0$. При этом $dx dy = |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta$, где

$$J(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

— якобиан преобразования.

В результате решения СДУ (10) некоторым итерационным методом (Ньютона, хорд и т.д.) получим

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta), \\ y &= y(\xi, \eta), \end{aligned} \right\}$$

где $x(\xi, \eta)$ и $y(\xi, \eta)$ — некоторые численные зависимости.

Уравнение (7) можно записать в виде двумерного НПФ:

$$\begin{aligned} & A \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} c(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \times \\ & \times \exp[i(\xi \tau + \eta p)] |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta = \\ & = S(\tau, p). \end{aligned} \quad (11)$$

Обращение (11) с помощью обратного преобразования Фурье по аналогии с решением уравнения (3) приведет к формуле

$$\begin{aligned} & A c(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |J(\xi, \eta)| = \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} S(\tau, p) \exp[-i(\xi \tau + \eta p)] d\tau dp, \end{aligned}$$

откуда искомого решение равно

$$\begin{aligned} & c(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \\ & = Q(\xi, \eta) \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} S(\tau, p) \exp[-i(\xi \tau + \eta p)] d\tau dp, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$Q(\xi, \eta) = \frac{1}{4\pi^2 A |J(\xi, \eta)|}.$$

Для повышения устойчивости решения (12) используем метод регуляризации Тихонова. Решение (12) с регуляризацией будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & c_\alpha(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \\ & = Q(\xi, \eta) \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \frac{S(\tau, p)}{1 + \alpha M(\tau, p)} \times \\ & \times \exp[-i(\xi \tau + \eta p)] d\tau dp, \end{aligned} \quad (13)$$

$$M(\tau, p) = \left(\frac{\tau}{\tau_{\max}} \right)^{2n} + \left(\frac{p}{p_{\max}} \right)^{2n}.$$

Параметр регуляризации α может быть выбран различными способами, например способом подбора контрастности изображения (чем меньше α , тем выше контраст томограммы, и наоборот) или способом невязки из уравнения [5, с. 55], [11]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{S}(\tau, p)|^2 \left[\frac{\alpha M(\tau, p)}{1 + \alpha M(\tau, p)} \right]^2 d\tau dp = \delta^2$$

при условии

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{S}(\tau, p)|^2 d\tau dp > \delta^2,$$

где

$$\|\tilde{S} - S\|_{L_2}^2 \leq \delta^2,$$

т.е. δ — среднеквадратическая погрешность измерения эхо-сигнала $S(\tau, p)$, полагаемая известной (S — точный эхо-сигнал, а \tilde{S} — измеренный эхо-сигнал).

В работе [8] приведены результаты численного решения уравнения (7) (без регуляризации). В модельных примерах полагались следующие неоднородности полей:

$$\begin{aligned} \Delta B/B_0 &\approx 3.6 \cdot 10^{-5}, \quad \Delta G_x/g_x \approx 3.4 \text{ мм}, \\ \Delta G_y/g_y &\approx 4.1 \text{ мм} \text{ или } \Delta g_x/g_x \approx 2.8 \cdot 10^{-2}, \\ \Delta g_y/g_y &\approx 2.8 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Однако данная методика может быть использована и в случае, когда $\Delta B/B_0$, $\Delta g_x/g_x$ и $\Delta g_y/g_y$ имеют заметно большие значения. Необходимо только знать функции $\Delta B(x, y)$, $\Delta G_x(x, y)$ и $\Delta G_y(x, y)$. Они могут быть рассчитаны численно на основе заданной конфигурации катушек и распределения токов в них, например, по методике, изложенной в работах [6, 7]. Кроме того, возможно, что использование метода инвариантных аппроксимаций [12] позволит существенно уменьшить влияние неоднородностей магнитных полей при решении уравнения (7). Однако этот вопрос требует специального рассмотрения.

Применение метода регуляризации Тихонова для повышения устойчивости решения (12), как показывают примеры, рассмотренные в работе [11], понижает отношение $|\Delta c_\alpha|/c_\alpha$ в 2–3 раза

(где Δc_α — погрешность решения c_α).

При численной реализации метода непрерывное преобразование Фурье (НПФ) (13) заменяется на дискретное преобразование Фурье (ДПФ) или на быстрое преобразование Фурье (БПФ) на равномерных сетках узлов по τ, p, ξ, η . В результате решение c_α будет получено на неравномерных сетках узлов по x, y . Поэтому в дальнейшем необходимо применение интерполяции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов В.А. Внутривидение (ЯМР-томография). Л.: Знание, 1989. 32 с.
2. Эрнст Р., Боденхаузен Дж., Вокаун А. ЯМР в одном и двух измерениях. М.: Мир, 1990. 200 с.
3. Физика визуализации изображений в медицине, т. 2 / Ред. Уэбб С. М.: Мир, 1991. 408 с.
4. Cho Z.H., Jones J.P., Singh M. Foundations of medical imaging. NY: Wiley, 1993. 400 p.
5. Сизиков В.С. Математические методы обработки результатов измерений: Учебник для вузов. СПб.: Политехника, 2001. 240 с.
6. Галайдин П.А., Замятин А.И., Иванов В.А. Расчет и проектирование электромагнитных систем магниторезонансных томографов. СПб.: Изд-во ИТМО, 1998. 29 с.
7. Марусина М.Я. Коррекция неоднородности основного магнитного поля МР-томографа на

постоянных магнитах. Автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб., 1993. 18 с.

8. Kawanaka A., Takagi M. Estimation of static magnetic field and gradient fields from NMR image // J. Phys. E: Sci. Instrum. 1986. V. 19. P. 871–875.
9. Sizikov V.S. Integral equations in NMR-tomography: reconstruction of NMR images with a regularization // Proc. of the 5th Int. Conf. IMSE98 / B.S. Bertram (ed.). Houghton, USA, 1998. P. 74–75.
10. Лукьянович И.К., Савицкий А.А. ЯМР-томография в нестабильном и неоднородном поляризуемом магнитном поле // Прикладная спектроскопия. 1999. Т. 66, № 2. С. 270–274.
11. Сизиков В.С. Использование регуляризации для устойчивого вычисления преобразования Фурье // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1998. Т. 38, № 3. С. 376–386.
12. Математические методы построения и анализа алгоритмов / Отв. ред. А.О. Слисенко. Л.: Наука, 1990. 238 с.

Санкт-Петербургский государственный институт точной механики и оптики (технический университет)

Материал поступил в редакцию 10.04.2003.

RECONSTRUCTION OF NMR IMAGES WITH REGARD TO FIELD INHOMOGENEITIES

V. A. Ivanov, M. Ya. Marusina, N. G. Rushchenko, V. S. Sizikov

Saint-Petersburg State Institute of Fine Mechanics and Optics (Technical University)

The problem of reconstruction of NMR images subject to inhomogeneities of the ground magnetic field B and gradient fields G_x, G_y, G_z is considered. The inhomogeneities $\Delta B(x, y), \Delta G_x(x, y), \Delta G_y(x, y), \Delta G_z(x, y)$ must be known deterministic monotone functions. The problem is solved by the modified Kumar-Welti-Ernst method and the Tikhonov regularization method.