ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2003, том 13, № 1, с. 85–94

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК 629.7.05.001(02)

© С. В. Богословский, В. С. Богословский

МОДЕЛИ ТРАЕКТОРИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С РАВНОМЕРНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ВО ВРЕМЕНИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Актуальность проблемы обусловлена тем, что корректный анализ и синтез систем управления необходимо начинать с изучения свойств точного решения задачи Коши. Однако отсутствие точного аналитического решения рассматриваемых нестационарных систем дифференциальных уравнений вынуждает пользоваться приближенными моделями.

Рассматриваются модели, полученные с использованием различных алгоритмов приближенного суммирования асимптотических разложений точного решения задачи Коши. Впервые построены приближенные модели, учитывающие значения точного решения в начальной и в конечной точках траектории.

ВВЕДЕНИЕ

Модели нестационарных линейных систем управления с равномерно изменяющимися во времени коэффициентами используются при анализе и синтезе систем управления конечным положением [1–3]. Фундаментальные исследования в области предельной устойчивости систем, которые можно интерпретировать как системы управления конечным положением, опубликованы в работах [4, 5]. Однако в указанных работах рассмотрение ограничивается получением асимптотических разложений интегральных представлений решения задачи Коши, недостаточно удобных для решения задач анализа и синтеза систем управления. В данной работе рассматриваются алгоритмы получения приближенных моделей траекторий, позволяющие судить о зависимости устойчивости и точности таких систем от параметров их элементов не только в конечной точке, но и на всей траектории.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе [1] приведены интегральные представления решения задачи Коши для системы управления с равномерно изменяющейся дальностью до конечной точки траектории по всем координатам системы управления, в том числе — по первой координате, определяющей траекторию объекта управления (1), а также разложение этого интеграла на составляющие, соответствующие особым точкам подынтегрального выражения (2):

$$x_1(t)=\frac{\tau}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Big(W_{\sigma 1}(p)F_\sigma(p)e^{pt_0}\times \times\frac{1}{\varphi(p)}\int_{\infty}^{p}e^{z\tau}\varphi(z)\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}p; \qquad (1)$$

$$x_1(t)=R_1(t)+R_2(t)+R_3(t), \qquad (2)$$

где

$$R_1(t)=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{m}\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi\alpha_\nu i}}\times \times\int_{C_{\nu-}}e^{pt_0}W_{\sigma 1}(p)F_\sigma(p)\frac{1}{\varphi(p)}\mathrm{d}p\cdot\tau\int_{C_{\nu+}}e^{z\tau}\varphi(z)\mathrm{d}z\right),$$

$$R_2(t)= =\sum_{\nu=m+1}^{m+m_{q-}}\operatorname*{Res}_{p=z_\nu}\left\{e^{pt_0}W_{\sigma 1}(p)F_\sigma(p)\frac{\tau}{\varphi(p)}\int_{\infty}^{p}e^{z\tau}\varphi(z)\mathrm{d}z\right\},$$

$$R_3(t)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{m}e^{z_\nu\tau}\times \times\left(\oint_{|p-z_\nu|_+=const}e^{pt_0}W_{\sigma 1}(p)F_\sigma(p)\times \times\frac{1}{\varphi_\nu(p)}(p-z_\nu)^{-\beta_\nu+1}S_{3\nu}(p)\mathrm{d}p\right).$$

Там же приведены асимптотические разложения интегралов, входящих в первое слагаемое формулы (2).

Интегральные представления типа (1) и (2), а также асимптотические ряды, используемые для их вычисления, плохо поддаются аналитическому исследованию, недостаточно удобны для анализа и синтеза соответствующих систем управления.

В данной работе ставится задача получения приближенных аналитических зависимостей, пригодных для решения задач анализа и синтеза нестационарных систем управления с равномерно изменяющимися во времени коэффициентами.

Решение этой задачи получим методом приближенного суммирования асимптотических рядов на примере суммирования асимптотических рядов, соответствующих интегральным представлениям (1) и (2).

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим теперь алгоритмы вычисления интеграла (1), предусматривающие предварительное вычисление внутреннего интеграла.

Поскольку $\varphi(p) = \exp\left(-\int\limits_{\infty}^{p} \Phi(z)\mathrm{d}z\right)$, то, интегрируя внутренний интеграл в (1) по частям, легко получить

$$x_1(t) =$$
$$= \frac{\tau}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(W_{\sigma 1}(p)\ \ F_\sigma(p)e^{pt_0}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{1}{\varphi(p)}\int\limits_{\infty}^{p} e^{z\tau}\varphi(z)\ \mathrm{d}z\right)\mathrm{d}p =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[e^{pt}\ E_1(p) +\right.$$
$$\left.+ e^{pt_0}E_1(p)\varphi^{-1}(p)\int\limits_{\infty}^{p} e^{p\tau}\Phi(z)\varphi(z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}p, \qquad (3)$$

где $E_1(p) = W_{\sigma 1}(p)F_\sigma(p)$.

Параметрическая передаточная функция для конечной точки траектории

Из формулы (3) следует, что для конечной точки траектории (КТТ), соответствующей τ = 0, можно получить

$$x_1(t)\Big|_{t\to t_0} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[e^{pt}E_1(p) +\right.$$
$$\left.+ e^{pt_0}E_1(p)\varphi^{-1}(p)\int\limits_{\infty}^{p}\Phi(z)\varphi(z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}p =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[e^{pt_0}E_1(p)\times\right.$$
$$\left.\times\left(1 + \varphi^{-1}(p)\cdot(\varphi(\infty) - \varphi(p))\right)\right]\mathrm{d}p =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt_0}F_\sigma(p)W_{\sigma 1}(p)\cdot\frac{\varphi(\infty)}{\varphi(p)}\mathrm{d}p, \qquad (4)$$

откуда следует, что параметрическая передаточная функция (ППФ) от входа по возмущению, преобразованием Лапласа которого является $F_\sigma(p)$, до выхода по первой координате в КТТ (при τ = 0 и $\varphi(\infty)=1$) имеет вид

$$T(p,\tau)\Big|_{\tau\to 0} = W_{\sigma 1}(p)\cdot\frac{\varphi(\infty)}{\varphi(p)}. \qquad (5)$$

Формулы (4) и (5) позволяют, например, вычислить гипотетическое отклонение, которое имела бы траектория снижения летательного аппарата в точке нахождения глиссадного радиомаяка и которое может быть использовано для интегральной оценки точности снижения по заданной глиссаде.

Параметрическая передаточная функция для произвольной точки траектории

Получение параметрической передаточной функции (ППФ) для произвольного момента времени представляет более сложную задачу. Различные по сложности приближения к точной ППФ получим, используя различные алгоритмы приближенного суммирования асимптотического ряда, в который предварительно необходимо разложить интегральное представление ППФ:

$$T(p,\tau) =$$
$$= W_{\sigma 1}(p)\cdot\left(1 + e^{-p\tau}\varphi^{-1}(p)\int\limits_{\infty}^{p} e^{z\tau}\Phi(z)\varphi(z)\mathrm{d}z\right). \qquad (6)$$

Алгоритм интегрирования по частям

Интегрируя по частям интеграл, входящий в формулу (6), получим асимптотический ряд:

$$T(p,\tau) =$$

$$= W_{\sigma 1}(p)\cdot\left(1+e^{-p\tau}\varphi^{-1}(p)\int\limits_{\infty}^{p} e^{z\tau}\Phi(z)\varphi(z)\mathrm{d}z\right)=$$

$$= W_{\sigma 1}(p)\cdot\left(1+A(p,\tau)\right)=$$

$$= W_{\sigma 1}(p)\times$$

$$\times\left[1+\frac{\Phi(p)}{\tau}+\frac{-\dot{\Phi}(p)+\Phi^2(p)}{\tau^2}+O\left(\frac{1}{\tau^3}\right)\right], \qquad (7)$$

где

$$A(p,\tau)=\frac{\Phi(p)}{\tau}+\frac{-\dot{\Phi}(p)+\Phi^2(p)}{\tau^2}+O\left(\frac{1}{\tau^3}\right) \text{ —}$$

асимптотическое разложение по отрицательным степеням параметра ($\tau = t - t_0$) функции

$$e^{-p\tau}\varphi^{-1}(p)\int\limits_{\infty}^{p} e^{z\tau}\Phi(z)\varphi(z)\mathrm{d}z\,.$$

Простейший алгоритм приближенного суммирования асимптотического ряда (7) заключается в замене ряда для $A(p,\tau)$ степенным рядом

$$A_1(p,\tau)=\frac{\Phi(p)}{\tau}+\frac{\Phi^2(p)}{\tau^2}+O\left(\frac{1}{\tau^3}\right). \qquad (8)$$

Полагая $A(p,\tau)\approx A_1(p,\tau)$, для $T(p,\tau)$ получим асимптотический ряд

$$T(p,\tau)\approx W_{\sigma 1}(p)\cdot\left[1+\frac{\Phi(p)}{\tau}+\frac{\Phi^2(p)}{\tau^2}+\ldots\right],$$

который формально совпадает с представлением в виде ряда дроби

$$T_1(p,\tau)=\frac{W_{\sigma 1}(p)}{1+\dfrac{\Phi(p)}{(-\tau)}}\,. \qquad (9)$$

Выражение $T_1(p,\tau)$ может рассматриваться как аналитическое продолжение в область интересующих нас значений $\dfrac{\Phi(p)}{(-\tau)}$ асимптотического ряда (7).

Ряд (8) получен отбрасыванием из асимптотического разложения (7) всех производных передаточной функции $\Phi(p)$. В результате при $\tau = 0$ передаточная функция (9) отличается от точного значения (5).

Для обеспечения совпадения при $\tau = 0$ формул (9) и (5) прибавим к передаточной функции величину, имеющую порядок малости первого отброшенного члена асимптотического ряда (7):

$$T_1(p,\tau)=$$

$$= W_{\sigma 1}(p)\cdot\left[\frac{-\tau}{(-\tau)+\Phi(p)}+O\left(\frac{-\dot{\Phi}(p)}{\tau^2}\right)\right]. \qquad (10)$$

Введем $\dfrac{-\dot{\Phi}(p)}{\tau^2-\dot{\Phi}(p)}\dfrac{\varphi\left(p-\dfrac{\delta}{\tau}\right)}{\varphi(p)}$ — величину одного порядка малости с величиной $\dfrac{-\dot{\Phi}(p)}{\tau^2}$ (δ — малая величина, которая может выбираться на основании проведенных экспериментов).

Тогда получим следующее приближение к точному выражению ППФ, которое при $\tau = 0$ совпадает с точным выражением (5):

$$T_2(p,\tau)=\frac{\varphi\left(p+\dfrac{\delta}{(-\tau)}\right)}{\varphi(p)}\frac{W_{\sigma 1}\cdot\Phi(p)}{(-\tau)+\Phi(p)}\,. \qquad (11)$$

Формула (11) для больших τ позволяет моделировать поведение первой координаты функцией, проходящей через начальную и конечную точки траектории и зависящей от всех параметров системы управления.

Алгоритм разложения подынтегральной функции в ряд Маклорена

Ввод дополнительного слагаемого в формулу (10) скажется только при очень небольших значениях ($-\tau$), поэтому исследование поведения решения распадается на два этапа: на этап, соответствующий $\tau = 0$, и на этап, соответствующий $\tau \neq 0$. Такое раздельное рассмотрение одного и того же решения не всегда может оказаться достаточно удобным. Поэтому целесообразно рассмотреть и другое разложение функции:

$$A(p,\tau)=e^{-p\tau}\varphi^{-1}(p)\int\limits_{\infty}^{p} e^{z\tau}\Phi(z)\varphi(z)\mathrm{d}z=$$

$$=e^{-p\tau}\varphi^{-1}(p)\cdot\tau\int\limits_{\infty}^{p} e^{z\tau}\varphi(z)\mathrm{d}z-1\,. \qquad (12)$$

Статическая система управления. Предположим вначале, что функция $\varphi(z)$ не имеет особой точки в нуле (соответствует статической системе управления). Тогда подынтегральное выражение в $A(p,\tau)$ разложим в ряд по положительным степеням z и проинтегрируем этот ряд по частям:

$$\tau\int_{\infty}^{p} e^{z\tau}\varphi(z)\mathrm{d}z =$$

$$= \tau\int_{\infty}^{p} e^{z\tau}\left(\varphi(0) + \frac{z}{1!}\dot{\varphi}(0) + \frac{z^2}{2!}\ddot{\varphi}(0) + \cdots\right)\mathrm{d}z;$$

$$\int_{\infty}^{p} e^{z\tau}\varphi(0)\mathrm{d}z = \frac{\varphi(0)}{\tau}e^{p\tau};$$

$$\int_{\infty}^{p} e^{z\tau}\dot{\varphi}(0)\frac{z}{1!}\mathrm{d}z = \frac{\varphi(0)}{\tau}e^{p\tau}\left(p - \frac{1}{\tau}\right);$$

$$\int_{\infty}^{p} e^{z\tau}\ddot{\varphi}(0)\frac{z^2}{2!}\mathrm{d}z = \frac{\ddot{\varphi}(0)}{\tau}e^{p\tau}\frac{1}{2!}\left(p^2 - \frac{2p}{\tau} + \frac{2p^2}{\tau^2}\right).$$

Таким образом, для статических систем управления имеем

$$\tau\int_{\infty}^{p} e^{z\tau}\varphi(z)\mathrm{d}z =$$

$$= \tau\int_{\infty}^{p} e^{z\tau}\left(\varphi(0) + \frac{z}{1!}\dot{\varphi}(0) + \frac{z^2}{2!}\ddot{\varphi}(0) + \cdots\right)\mathrm{d}z \approx$$

$$\approx e^{p\tau}\cdot\left[\varphi(0) + \frac{p - \frac{1}{\tau}}{1!}\dot{\varphi}(0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(p - \frac{1}{\tau}\right)^2}{2!}\ddot{\varphi}(0) + \cdots\right] =$$

$$= e^{p\tau}\varphi\left(p - \frac{1}{\tau}\right). \tag{13}$$

Астатическая система управления. В случае астатической системы управления функция $\varphi(z)$ имеет особую точку в нуле, однако вначале можно сдвинуть эту особую точку вдоль отрицательной полуоси на небольшую величину, получить аппроксимирующее выражение (13), затем вернуться к истинному представлению функции $\varphi(p)$. Так будет выполнено аналитическое продолжение функции (13) на случай астатической системы управления. Подставляя приближенное выражение (13) в формулу (12) и (12) в формулу (7), получим:

$$A(p,\tau) \approx \varphi^{-1}(p)\cdot\varphi\left(p - \frac{1}{\tau}\right) - 1;$$

$$T_3(p,\tau) = W_{\sigma 1}(p)\cdot\left(1 + A(p,\tau)\right) =$$

$$= W_{\sigma 1}(p)\cdot\frac{\varphi\left(p - \frac{1}{\tau}\right)}{\varphi(p)}. \tag{14}$$

Как показали результаты моделирования, при $t_0 \le 20\,\text{с}$ более точна формула (14), а при $t_0 > 20\,\text{с}$ — формула (11).

Как следует из формул (11) и (14), анализ устойчивости и синтез оптимальных управлений применительно к области, непосредственно примыкающей к КТТ, не может быть выполнен обычными методами теории стационарных систем управления, поскольку параметрическая передаточная функция в указанной области в общем случае содержит точки ветвления, т. е. не является целой функцией.

Модели (11) и (14) ППФ могут послужить основой для разработки методов анализа устойчивости и синтеза оптимальных систем управления, передаточные функции которых содержат точки ветвления типа $(p - z_v)^{\alpha_v}$, где α_v — нецелое или комплексное число. Далее будем пользоваться формулой (14) как более компактной и ориентированной на не очень большие начальные дальности маневрирования.

АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВСЕХ СОСТАВЛЯЮЩИХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Рассмотрим алгоритмы вычисления всех составляющих, входящих в формулу (2).

Вычисление $R_1(t)$

Обозначим:

$$F_1(p) = W_{\sigma 1}(p)F_{\sigma}(p)\frac{1}{\varphi(p)} = \frac{E_1(p)}{\varphi(p)};$$

$$J_{1v}(t_0) = \int_{C_{v-}} e^{pt_0}(p - z_v)^{\alpha_v - \rho_v}F_{1v}(p)\mathrm{d}p;$$

$$\varphi(z) = (z - z_v)^{-\alpha_v}\varphi_v(z);$$

$$F_1(p) = (p - z_v)^{\alpha_v - \rho_v}F_{1v}(p);$$

$$J_{2v}(\tau) = \int_{C_{v+}} e^{z\tau}(z - z_v)^{-\alpha_v}\varphi_v(z)\mathrm{d}z.$$

Тогда

$$R_1(t) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{1-e^{-2\pi\alpha_\nu i}}J_{1\nu}(t_0)\cdot\tau\cdot J_{2\nu}(\tau).$$

В [1] показано, что интеграл $J_{1\nu}(t_0)$ может быть представлен в виде асимптотического разложения по отрицательным степеням t_0

$$J_{1\nu}(t_0) = -2ie^{z_\nu t_0}t_0^{-\alpha_\nu+\rho_\nu-1}\times$$
$$\times\sin\pi(\alpha_\nu-\rho_\nu+1)\Gamma(\alpha_\nu-\rho_\nu+1)S_{1\nu}(t_0),$$

где

$$S_{1\nu}(t_0) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(\alpha_\nu-\rho_\nu+k+1)}{\Gamma(\alpha_\nu-\rho_\nu+1)\cdot t_0^k\cdot k!}\left[\frac{d^k}{dp^k}F_{1\nu}(p)\right]_{p=0},$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция.

С точностью до величин порядка малости $\frac{1}{t_0^2}$ верно приближенное равенство

$$F_{1\nu}(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k!}\left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}p^k}F_{1\nu}(p)\right]_{p=0}\times(-1)^k\frac{(\alpha_\nu-\rho_\nu+1)\cdots(\alpha_\nu-\rho_\nu+k)}{t_0^k}\right\}\approx$$

$$\approx F_{1\nu}(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k!}\left[\frac{\mathrm{d}^kF_{1\nu}\left(\frac{-\alpha_\nu+\rho_\nu-1}{t_0}\right)}{\mathrm{d}\left(\frac{-\alpha_\nu+\rho_\nu-1}{t_0}\right)^k}\right]_{\frac{-\alpha_\nu+\rho_\nu-1}{t_0}=0}\times(-1)^k\frac{(\alpha_\nu-\rho_\nu+1)^k}{t_0^k}\right\}=$$

$$=F_{1\nu}\left(\frac{-\alpha_\nu+\rho_\nu-1}{t_0}\right).$$

Поэтому интеграл $J_{1\nu}(t_0)$ может быть приближенно вычислен по формуле

$$J_{1\nu}(t_0)\approx$$
$$\approx -2ie^{z_\nu t_0}t_0^{-\alpha_\nu+\rho_\nu-1}\sin\pi(\alpha_\nu-\rho_\nu+1)t_0^{-1}\times$$
$$\times\Gamma(\alpha_\nu-\rho_\nu+1)\cdot F_{1\nu}\left(\frac{-\alpha_\nu+\rho_\nu-1}{t_0}\right)=$$
$$=-2\pi i\frac{e^{z_\nu t_0}t_0^{-\alpha_\nu+\rho_\nu-1}}{\Gamma(-\alpha_\nu+\rho_\nu)}\cdot F_{1\nu}\left(\frac{-\alpha_\nu+\rho_\nu-1}{t_0}\right). \quad (15)$$

В соответствии с работой [1] имеем

$$J_{2\nu}(\tau)= e^{z_\nu\tau}(-\tau)^{\alpha_\nu-1}\int_{C_{0+}}e^{-u}u^{-\alpha_\nu}\varphi_\nu\left(\frac{u}{-\tau}\right)\mathrm{d}u=$$
$$=e^{z_\nu\tau}(-\tau)^{\alpha_\nu-1}\left(e^{-2\pi\alpha_\nu i}-1\right)S_{2\nu}(\tau),$$

где

$$S_{2\nu}(\tau)=$$
$$=\Gamma(-\alpha_\nu+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}D_{2\nu}^{(k)}(z_\nu)\frac{\Gamma(-\alpha_\nu+k+1)}{\Gamma(-\alpha_\nu+1)(-\tau)^k},$$

$$D_{2\nu}^{(k)}(z_\nu)=\left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}u^k}\varphi_\nu\left(\frac{u}{-\tau}\right)\right]_{u=0}.$$

Ряд $S_{2\nu}(\tau)$ является асимптотическим по τ рядом, пригодным для вычисления интеграла $J_{2\nu}(\tau)$ при больших τ.

В случае, когда $\alpha_\nu>1$, интегрированием по частям можно получить

$$\int_{C_{0+}}e^{-u}u^{-\alpha_\nu}\varphi_\nu\left(\frac{u}{-\tau}\right)\mathrm{d}u=$$
$$=\int_{C_{0+}}e^{-u}u^{-\alpha_\nu+r_{2\nu}}\left(1-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^{r_{2\nu}}\varphi_\nu\left(\frac{u}{-\tau}\right)\mathrm{d}u,$$

$$D_{2\nu}^{(k)}(z_\nu) = \left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}u^k}\left[\left(1-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^{r_{2\nu}}\varphi_\nu\left(\frac{u}{-\tau}\right)\right]\right]_{u=0},$$

где $r_{2\nu} \equiv [\alpha_\nu]$ — целая вещественная часть числа α_ν.

С точностью до величин порядка малости $\frac{1}{(-\tau)^2}$ имеет место приближенное равенство

$$S_{2\nu}(\tau) = \Gamma(-\alpha_\nu + r_{2\nu} + 1)\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{k!}D_{2\nu}^{(k)}(z_\nu)(-1)^k\frac{(-\hat{\alpha}_\nu)\cdots(-\hat{\alpha}_\nu + k)}{(-\tau)^k}\right\} \approx$$
$$\approx \Gamma(-\alpha_\nu + r_{2\nu} + 1)\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k D_{2\nu}^{(0)}\left(z_\nu + \frac{\hat{\alpha}_\nu}{-\tau}\right)}{d\left(\frac{\hat{\alpha}_\nu}{-\tau}\right)^k}\right]_{\frac{\hat{\alpha}_\nu}{-\tau}=0}\right\}\cdot\frac{(\hat{\alpha}_\nu)^k}{(-\tau)^k} =$$
$$= \Gamma(-\alpha_\nu + r_{2\nu} + 1)\cdot D_{2\nu}^{(0)}\left(z_\nu + \frac{\hat{\alpha}_\nu}{-\tau}\right),$$

где $\hat{\alpha}_\nu = \alpha_\nu - r_{2\nu}$.

При достаточно больших значениях $(-\tau)$ интеграл $J_{2\nu}(\tau)$ может быть записан более компактно

$$J_{2\nu}(\tau) = \int_{C_{\nu+}} e^{z\tau}\varphi(z)\,\mathrm{d}z =$$
$$= e^{z_\nu\tau}(-\tau)^{\alpha_\nu - 1}\left(e^{-2\pi\alpha_\nu i} - 1\right)\times$$
$$\times\Gamma(-\alpha_\nu + r_{2\nu} + 1)D_{2\nu}^{(0)}\left(z_\nu + \frac{\hat{\alpha}_\nu}{-\tau}\right). \qquad (16)$$

При малых значениях $(-\tau)$ интеграл $J_{2\nu}(\tau) = \int_{C_{\nu+}} e^{z\tau}\varphi(z)\,\mathrm{d}z$ можно представить в виде

$$J_{2\nu}(\tau) = \int_{C_{\nu+}} e^{z\tau}\varphi(z)\,\mathrm{d}z = e^{z_\nu\tau}J_{20\nu}(\tau),$$

где $J_{20\nu}(\tau) = \int_{C_{0+}} e^{p(t-t_0)}p^{-\alpha_\nu}\cdot\varphi_\nu(p+z_\nu)\mathrm{d}p$.

Поскольку интеграл

$$J_{20\nu k}(\tau) =$$
$$= \int_{C_0}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}e^{p(t-t_0)}p^{-\alpha_\nu}\cdot\varphi_\nu(p+z_\nu)\mathrm{d}p$$

сходится равномерно во всех точках промежутка $0 \le t \le t_0$, интеграл $J_{20\nu}(\tau)$ можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $t = t^* < t_0$:

$$J_{20\nu}(t) = J_{20\nu 0}(\tau^*) +$$
$$+ J_{20\nu 1}(\tau^*)\cdot(t-t^*) + \frac{J_{20\nu 2}(\tau^*)}{2!}\cdot(t-t^*)^2 + \ldots,$$

где

$$J_{20\nu k}(\tau^*) = \int_{C_0} e^{p\tau^*}p^{k-\alpha_\nu}\cdot\varphi_\nu(p+z_\nu)\mathrm{d}p,$$
$$\tau^* = t^* - t_0,\quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Интегралы $J_{20\nu k}(\tau^*)$ для достаточно больших абсолютных значений τ^* могут быть вычислены с использованием формулы (16).

Обобщая полученные результаты, можно написать окончательное выражение для $R_1(t)$:

$$R_1(t) = -\frac{1}{2\pi i}\times$$
$$\times\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{1-e^{-2\pi\alpha_\nu i}}\int_{C_{\nu-}} e^{pt_0}F_1(p)\,\mathrm{d}p\cdot\tau\int_{C_{\nu+}} e^{z\tau}\varphi(z)\mathrm{d}z =$$
$$= -\sum_{\nu=1}^{m}\left[\frac{e^{z_\nu t}\Gamma(-\alpha_\nu + r_{2\nu} + 1)}{\Gamma(-\alpha_\nu + \rho_\nu)}\frac{(-\tau)^{\alpha_\nu}}{(t_0)^{\alpha_\nu - \rho_\nu + 1}}\times\right.$$
$$\left.\times F_{1\nu}\left(\frac{-\alpha_\nu + \rho_\nu - 1}{t_0}\right)\cdot D_{2\nu}^{(0)}\left(z_\nu + \frac{\hat{\alpha}_\nu}{-\tau}\right)\right], \qquad (17)$$

где $\hat{\alpha}_\nu = \alpha_\nu - r_{2\nu}$ — дополнительная к целому числу часть показателя α_ν особой точки ($z - z_\nu$); $r_{2\nu} = [\alpha_\nu]$ — целая вещественная часть числа α_ν.

Вычисление $R_2(t)$

Основная трудность вычисления $R_2(t)$ связана с вычислением выражений

$$\frac{\tau}{\varphi(z_\nu)}\int_{\infty}^{z_\nu} e^{z\tau}\varphi(z)\mathrm{d}z$$

при значениях $z_\nu = z_{\nu-}$, соответствующих полюсам функции $F_1(p)$, не совпадающим с особыми точками функции $\varphi(p)$.

Воспользовавшись формулой (13), можно получить

$$\frac{\tau}{\varphi(z_\nu)}\int_\infty^{z_\nu} e^{z\tau}\varphi(z)\mathrm{d}z \approx \frac{e^{z_\nu\tau}\varphi\left(z_\nu - \frac{1}{\tau}\right)}{\varphi(z_\nu)}.$$

Следовательно,

$$R_2(t) =$$

$$= \sum_{\nu=m+1}^{m+m_{q-}} \operatorname*{Res}_{p=z_\nu}\left\{e^{pt_0}W_{\sigma1}(p)F_\sigma(p)\frac{\tau}{\varphi(p)}\int_\infty^{p} e^{z\tau}\varphi(z)\mathrm{d}z\right\}.$$

И таким образом,

$$R_2(t) =$$

$$= \sum_{\nu=m+1}^{m+m_{q-}} e^{z_\nu t}W_{\sigma1\nu}(p)F_{\sigma\nu}(p)\frac{\varphi\left(z_\nu - \frac{1}{\tau}\right)}{\varphi(z_\nu)}. \qquad (18)$$

Вычисление $R_3(t)$

Эта задача решается по правилам вычисления вычетов

$$R_3(t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{m}\Big[e^{z_\nu\tau}\times$$

$$\times \oint_{|p-z_\nu|_+=\mathrm{const}} e^{pt_0}E_{1\nu}(p)\frac{1}{\varphi_\nu(p)}(p-z_\nu)^{-q_{\nu+}+1}S_{3\nu}(p)\mathrm{d}p\Big].$$

И тогда

$$R_3(t) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m} e^{z_\nu t}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_\nu} - t_0\right)^{q_{\nu+}-2} E_{1\nu}(z_\nu)\frac{S_{3\nu}(z_\nu)}{\varphi_\nu(z_\nu)}. \qquad (19)$$

Здесь обозначены:

$$S_{3\nu}(p) = \sum_{k=0}^{0\le k\le\; q_{\nu+}-2} D_{3\nu\, k}(\tau)\frac{(p-z_\nu)^k}{-\alpha_\nu + k + 1};$$

$$E_1(p) =$$

$$= (z-z_\nu)^{\alpha_\nu-\rho_\nu}E_{1\nu}(p) =$$

$$= (z-z_\nu)^{\alpha_\nu-\rho_\nu}W_{\sigma1\nu}(p)F_{\sigma\nu}(p);$$

$$D_{3\nu\, k}(\tau) = \frac{1}{k!}\left[\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} - \tau\right)^k \varphi_\nu(p)\right]_{p=z_\nu}.$$

Приближенное интегральное представление решения задачи Коши при любых значениях $(-\tau)$ получим, подставляя в формулу (3) выражение для передаточной функции (6) и полагая $T(p,\tau)\approx$ $\approx T_3(p,\tau)$:

$$x_1(t_0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt}T(p,\tau)\mathrm{d}p \approx$$

$$\approx -\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt}F_\sigma(p)W_{\sigma1}(p)\cdot\frac{\varphi\left(p-\frac{1}{\tau}\right)}{\varphi(p)}\mathrm{d}p =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{m}\int_{C_{\nu-}} e^{pt}F_\sigma(p)W_{\sigma1}(p)\cdot\frac{\varphi\left(p-\frac{1}{\tau}\right)}{\varphi(p)}\mathrm{d}p -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{m}\int_{C_{\nu_\tau -}} e^{pt}F_\sigma(p)W_{\sigma1}(p)\frac{\varphi\left(p-\frac{1}{\tau}\right)}{\varphi(p)}\mathrm{d}p +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{m}\oint_{|p-z_\nu|_+=\mathrm{const}}\Big[e^{pt}F_{\sigma\nu}(p)W_{\sigma1\nu}(p)\times$$

$$\times\frac{\varphi\left(p-\frac{1}{\tau}\right)}{\varphi_\nu(p)}(p-z_\nu)^{-q_{\nu+}}\Big]\mathrm{d}p +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu_\tau=1}^{m}\oint_{|p-z_{\nu_\tau}|_+=\mathrm{const}}\Big[e^{pt}F_{\sigma\nu_\tau}(p)W_{\sigma1\nu_\tau}(p)\times$$

$$\times\frac{\varphi_{\nu_\tau}\left(p-\frac{1}{\tau}\right)}{\varphi(p)}(p-z_{\nu_\tau})^{-q_{\nu_\tau +}}\Big]\mathrm{d}p +$$

$$+\sum_{\nu=m+1}^{m+m_{q-}} e^{z_\nu t}\left\{\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} - t\right)^{q_{\nu-}-1}\times\right.$$

$$\left.\times\left[F_\sigma(p)W_{\sigma1}(p)\cdot\frac{\varphi\left(p-\frac{1}{\tau}\right)}{\varphi(p)}\right]\right\}_{p=z_\nu}. \qquad (20)$$

В соответствии с формулой (15) для общего случая (относительно значений α_ν и ρ_ν) будем иметь

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{m}\int_{C_{\nu-}} e^{pt}X_1(p)\mathrm{d}p \approx$$

$$\approx \sum_{\nu=1}^{m}\frac{e^{z_\nu t}t^{-\alpha_\nu+\rho_\nu-1}}{\Gamma(-\alpha_\nu+\rho_\nu+r_{1\nu}+1)}D_{1\nu}\left(\frac{-\alpha_\nu+\rho_\nu-1}{t}\right),$$

где

$r_{1\nu} = [\,\rho_\nu-\alpha_\nu-1]$ — целое неотрицательное число, ближайшее к вещественной части числа ($\rho_\nu-\alpha_\nu-1$) или нуль;

$$D_{1\nu}(p)=\left[\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}-t\right)^{r_{1\nu}}X_{1\nu}(p)\right];$$

$$X_1(p)=F_\sigma(p)W_{\sigma 1}(p)\cdot\frac{\varphi\left(p-\frac{1}{\tau}\right)}{\varphi(p)};$$

$$X_{1\nu}\left(\frac{-\alpha_\nu+\rho_\nu-1}{t}\right)=$$

$$=F_{\sigma\nu}\left(\frac{-\alpha_\nu+\rho_\nu-1}{t}\right)W_{\sigma 1\nu}\times$$

$$\times\left(\frac{-\alpha_\nu+\rho_\nu-1}{t}\right)\frac{\varphi_\nu\left(\frac{-\alpha_\nu+\rho_\nu-1}{t}-\frac{1}{\tau}\right)}{\varphi_\nu\left(\frac{-\alpha_\nu+\rho_\nu-1}{t}\right)}.$$

В случае если в точке $p=z_\nu$ подынтегральная функция имеет полюс порядка q_ν, интеграл $\int_{C_{\nu-}} e^{pt}X_1(p)\mathrm{d}p$ вычисляется по формуле вычетов

$$\int_{C_{\nu-}} e^{pt}X_1(p)\mathrm{d}p = \oint_{|p-z_\nu|_+=const} e^{pt}X_{1\nu}(p)(p-z_\nu)^{-q_\nu}\,\mathrm{d}p=$$

$$=e^{z_\nu t}\left[\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}-t\right)^{q_\nu-1}X_{1\nu}(p)\right]_{p=z_\nu},$$

где $q_{\nu+}$ — порядок полюса функции $X_1(p)=F_\sigma(p)W_{\sigma 1}(p)\dfrac{\varphi\left(p-\frac{1}{\tau}\right)}{\varphi(p)}$ в точке $p=z_\nu$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОНТУРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПРИ ЦЕЛЫХ СТЕПЕНЯХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

При целочисленных показателях степеней особых точек подынтегральных функций отличия от общих формул проявляются в вычислении интегралов вида

$$J_{1\nu}(t)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\nu-}} e^{pt}E_1(p)\frac{\varphi\left(p-\frac{1}{\tau}\right)}{\varphi(p)}\,\mathrm{d}p$$

и

$$J_{2\nu}(\tau)=\frac{1}{1-e^{-2\pi\alpha_\nu i}}\int_{C_{\nu+}} e^{z\tau}\varphi(z)\,\mathrm{d}z=$$

$$=e^{z_\nu\tau}(-\tau)^{\alpha_\nu-1}D_{2\nu}^{(0)}\left(z_\nu+\frac{\widehat{\alpha}_\nu}{-\tau}\right),$$

где

$E_1(p)=F_\sigma(p)W_{\sigma 1}(p)$;

α_ν,ρ_ν — целые числа; $\alpha_\nu-\rho_\nu<0$;

$$E_1(p)\frac{\varphi\left(p-\frac{1}{\tau}\right)}{\varphi(p)}=$$

$$=(p-z_\nu)^{\alpha_\nu-\rho_\nu}E_{1\nu}(p)\frac{\varphi\left(p-\frac{1}{\tau}\right)}{\varphi_\nu(p)}.$$

В этом случае можно воспользоваться формулами (15) и (16) для вычисления интегралов $J_{1\nu}(t)$ и $J_{2\nu}(\tau)$ при нецелых α_ν, а затем перейти к целым значениям α_ν. В частности, интеграл $J_{1\nu}(t)$ при $\alpha_\nu-\rho_\nu<0$ может быть представлен в виде конечной суммы

$$J_{1\nu}(t)=-\frac{1}{2\pi i}2ie^{z_\nu t}t^{-\alpha_\nu+\rho_\nu-1}\times$$

$$\times\sin\pi(\alpha_\nu-\rho_\nu+1)\Gamma(\alpha_\nu-\rho_\nu+1)S_{1\nu}(t),$$

где

$$S_{1\nu}(t)=\sum_{k=0}^{\rho_\nu-\alpha_\nu}\left\{(-1)^k\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\Gamma(\alpha_\nu-\rho_\nu+k+1)}{\Gamma(\alpha_\nu-\rho_\nu+1)\cdot t^k\cdot k!}\left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}u^k}E_{1\nu}(u)\right]_{u=0}\right\}.\quad(21)$$

Поскольку

$$\sin\pi(\alpha_\nu-\rho_\nu+1)\Gamma(\alpha_\nu-\rho_\nu+1)=\frac{\pi}{\Gamma(-\alpha_\nu+\rho_\nu)},$$

то при $\alpha_\nu-\rho_\nu<0$ функция (21) не равна нулю.

Если $\alpha_\nu - \rho_\nu \geq 0$, функция (21) и интегралы $J_{1\nu}(t_0)$, $J_\nu(t)$ равны нулю.

Обычно $\alpha_\nu \geq 1$, поэтому интеграл $J_{2\nu}(\tau)$ может быть представлен в виде конечной суммы

$$J_{2\nu}(\tau) = e^{z_\nu \tau}(-\tau)^{\alpha_\nu - 1} D_{2\nu}^{(0)}\left(z_\nu + \frac{\widehat{\alpha}_\nu}{-\tau}\right), \qquad (22)$$

где

$$D_{2\nu}^{(0)}\left(z_\nu + \frac{\widehat{\alpha}_\nu}{-\tau}\right) =$$

$$= \left[\left(1 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\alpha_\nu} \varphi_\nu(z)\right]_{z = z_\nu + \frac{\widehat{\alpha}_\nu}{-\tau}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\alpha_\nu} (-1)^k C_{\alpha_\nu}^k \left. \frac{\mathrm{d}^{\alpha_\nu} \varphi_\nu(z)}{\mathrm{d}z^{\alpha_\nu}} \right|_{z = z_\nu + \frac{\widehat{\alpha}_\nu}{-\tau}}.$$

Формулы (21), (22) позволяют моделировать переходные процессы для целых значений показателей степеней особых точек подынтегральных выражений, встречающихся в решениях задачи Коши для системы линейных нестационарных дифференциальных уравнений с равномерным по времени изменением коэффициентов дифференциальных уравнений.

При выводе формул (9), (11) и (14) не предполагается предварительное вычисление параметров (z_ν, α_ν) особых точек подынтегральных выражений, поэтому соответствующие этим формулам аналитические модели могут быть отнесены к бескорневым методам аналитического моделирования.

Формулы (17)–(20) представляют собой приближенные выражения для интегралов, входящих в решение задачи Коши для рассматриваемой нестационарной системы. Аналитические модели по формулам (17)–(20) могут быть построены только после нахождения аналитических зависимостей параметров (z_ν, α_ν) особых точек подынтегральных выражений от параметров системы управления. Соответствующее направление моделирования может быть отнесено к корневым методам аналитического моделирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведены алгоритмы приближенного суммирования асимптотических рядов, полученных в работе [1] для всех интегралов, входящих в структуру решения задачи Коши для рассматриваемой в работе системы линейных дифференциальных уравнений с переменными во времени коэффициентами. Впервые получены алгоритмы приближенного суммирования асимптотических рядов, позволяющие построить приближенные аналитические решения рассматриваемой системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, учитывающие значения точного решения в начальной и конечной точках траектории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богословский С.В., Богословский В.С.* Динамика нестационарных систем с равномерно изменяющимися во времени коэффициентами // Научное приборостроение. 2002. Т. 12, № 3. С. 83–92.
2. *Барабанов А.Т.* Методы исследования систем с переменными коэффициентами // Методы исследования нелинейных систем автоматического управления / Под ред. Р.А. Нелепина. М.: Наука, 1975. С. 305–443.
3. *Федосов Е.А., Инсаров В.В., Селивохин О.С.* Системы управления конечным положением в условиях противодействия среды. М.: Наука, 1989. 272 с.
4. *Барабанов А.Т.* Аналитическая теория предельной устойчивости (1) // Известия Академии наук: Теория и системы управления. 1998. № 3. С. 359–369.
5. *Барабанов А.Т.* Аналитическая теория предельной устойчивости (2) // Известия Академии наук: Теория и системы управления. 1998. № 6. С. 841–849.
6. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды: Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.

Санкт-Петербургский Государственный университет аэрокосмического приборостроения
(*С. В. Богословский*)

Санкт-Петербургская Академия межотраслевых наук (*В. С. Богословский*)

Материал поступил в редакцию 9.10.2002.

MODELS OF TRAJECTORIES IN NON-STATIONARY CONTROL SYSTEMS WITH UNIFORMLY TIME-VARYING FACTORS

S. V. Bogoslovsky, V. S. Bogoslovsky*

Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation
**Saint-Petersburg Academy of General Industry Sciences*

The urgency of the problem is caused by that the correct analysis and synthesis of non-stationary control systems should start with studying the properties of the exact solution of the Cauchy problem. However the absence of the exact analytical solution of the non-stationary systems of differential equations considered necessitates the use of approximate models.

The models obtained using various algorithms of approximate summation of asymptotical decompositions of the exact solution of the Cauchy problem are considered. For the first time the approximate models taking into account values of the exact solution at the initial and final points of the trajectory are constructed.