ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2002, том 12, № 1, с. 96–99

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК 697.7.05

© А. А. Умнов, А. О. Кадкин

МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОМ МАНЕВРИРОВАНИИ

В статье использованы результаты работ по созданию программно-математической модели систем оптимизации режимов полета и вертикального маневра различных летательных аппаратов. Иллюстративный материал дан для самолета ТУ-154М. Рассмотрен алгоритм формирования оптимального управления на этапе смены эшелона с использованием метода Ньютона для приближенного решения краевой задачи.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Эффективным способом оптимизации управления самолетом при наборе высоты и снижении является формирование оптимальных по заданному критерию программ набора высоты или снижения и стабилизация самолета относительно этих программ [1]. Крейсерский участок полета при больших дальностях имеет ступенчатый профиль, т.е. может включать несколько этапов смены эшелона. Ниже рассматривается задача отыскания оптимального управления, переводящего летательный аппарат (ЛА) из крейсерского режима с параметрами (H_0, V_0) в крейсерский режим с новыми заданными высотой и скоростью ($H_з$, $V_з$). Поскольку параметры этих режимов являются "достаточно близкими", целесообразно синтезировать оптимальный регулятор, формирующий управляющие воздействия в каналах скорости и высоты в виде обратных связей по невязкам между текущим и заданным состояниями ЛА. Такие управляющие устройства могут быть получены методами аналитического конструирования оптимальных регуляторов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве критерия оптимальности для рассматриваемой задачи смены эшелона целесообразно использовать экономический критерий (минимум расхода топлива). Анализ зависимости расхода топлива самолета ТУ-154М

$$q_t = q_t(V, H, N) \tag{1}$$

от скорости V, высоты H и оборотов компрессора высокого давления N показал, что для крейсерских режимов эта зависимость с погрешностью не более 5 % может быть представлена в виде

$$q_t = q_{t_з} + K^{\mathrm{T}} \varDelta X, \tag{2}$$

где $q_{t_з}$ — временной расход, отвечающий заданному крейсерскому режиму с параметрами (H, V)$_{\text{зад.}}$; $\varDelta X$ — невязка между текущими и заданными координатами состояния ЛА; K — матрица коэффициентов.

Критерий оптимальности должен минимизировать затраты на режиме смены эшелона и может быть представлен с учетом (2) в виде

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_k} \left(q_t - q_{t_з}\right)^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^{t_k} \varDelta X^{\mathrm{T}} K K^{\mathrm{T}} \varDelta X \mathrm{d}t . \tag{3}$$

Для обеспечения требуемого качества процесса регулирования (апериодический характер вписывания в заданную крейсерскую траекторию, ограничения по перегрузкам) в ядро функционала (3) добавляется квадратичная форма управлений

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_k} \left(\varDelta X^{\mathrm{T}} \Phi\, \varDelta X + \varDelta U^{\mathrm{T}} \Psi\, \varDelta U\right) \mathrm{d}t , \tag{4}$$

где $\Phi = K \cdot K^{\mathrm{T}}$; Ψ подбирается на основе эксперимента с выполнением требований, сформулированных в [2]; $\varDelta U = U - U_з$ — невязка между текущим и балансировочным заданным управлениями.

Для рассматриваемой задачи смены эшелона будем использовать модель продольного движения самолета ТУ-154М в проекциях на связанные оси [2]

$$\dot{V}_{xx} = \omega_{zz} V_{yy} + \frac{R}{m} +$$
$$+ \frac{1}{m}\left(Y_\alpha \sin\alpha - X_\alpha \cos\alpha\right) - g \sin\theta;$$

$$\dot{V}_{yy} = -\omega_{zz} V_{xx} + \frac{1}{m}\left(X_\alpha \sin\alpha + Y_\alpha \cos\alpha\right) - g\cos\theta;$$
$$\dot{\omega}_{zz} = \frac{M_{zz}(\delta_\text{В})}{I_{zz}};$$
$$\dot{\varphi} = \omega_{zz};$$
$$\dot{H} = V_{xx}\sin\theta + V_{yy}\cos\theta; \tag{5}$$
$$\dot{N}_2 = \frac{1}{\tau_2}\left(K_2 \alpha_\text{СГ} - N_2\right);$$
$$\dot{N}_1 = \frac{1}{\tau_1}\left(K_1 N_2 - N_1\right);$$
$$R = K_R N_1;\ q_t = K_q N_2;\ \alpha = -\operatorname{arctg}\frac{V_{yy}}{V_{xx}},$$

где V_{xx} и V_{yy} — проекции скорости на продольную и нормальную оси; ω_{zz} — угловая скорость вращения; θ — угол тангажа; H — высота; N_2 и N_1 — обороты компрессоров высокого и низкого давления; R — сила тяги; X_α — сила лобового сопротивления; Y_α — подъемная сила; M_{zz} — момент тангажа; I_{zz} — момент инерции; $\alpha_\text{СГ}$ — положение сектора газа; $\delta_\text{В}$ — положение руля высоты; α — угол атаки.

Таким образом, движение ЛА в вертикальной плоскости может быть представлено нелинейным векторным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{6}$$

где $\mathbf{x} = \left(V_{xx}, V_{yy}, \omega_{zz}, \theta, H, N_2, N_1\right)^\text{T}$; $\mathbf{u} = \left(\delta_\text{В}, \alpha_\text{СГ}\right)^\text{T}$; F — вектор-функция, содержащая уравнения системы (5).

Итак, рассмотрим задачу минимизации функционала (4) на уравнениях движения (6), соответствующих нелинейной модели продольного движения самолета ТУ-154М.

АНАЛИЗ ЗАДАЧИ

Уравнение (6) имеет начальные данные $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, соответствующие балансировочным значениям исходного крейсерского режима с параметрами H_0, V_0. Балансировочные значения векторов состояния и управления отвечают установившимся режимам, т.е. являются решением алгебраического уравнения $F(\mathbf{x}, \mathbf{u})$=0.

Представим систему (6) в отклонениях от некоторой желаемой точки. В качестве начала координат пространства отклонений выберем точку с координатами $\mathbf{x}_\text{зад.}, \mathbf{U}_\text{зад.}$, соответствующую балансировочным значениям векторов $\mathbf{x}, \mathbf{U}$, отвечающим заданному крейсерскому режиму с параметрами ($H_\text{зад.}, V_\text{зад.}$). Получим новые векторы состояния и управления, являющиеся отклонениями (невязками) текущих координат объекта от желаемых:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_\text{зад.}, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{U} - \mathbf{U}_\text{зад.}. \end{aligned} \tag{7}$$

Система (6) и функционал (4) в отклонениях (7) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= F\left(\mathbf{y} + \mathbf{x}_\text{зад.}, \mathbf{v} + \mathbf{U}_\text{зад.}\right) = F_1(\mathbf{y}, \mathbf{v}), \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\text{зад.}; \end{aligned} \tag{8}$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_k}\left(\mathbf{y}^\text{T}\Phi\,\mathbf{y} + \mathbf{v}^\text{T}\Psi\mathbf{v}\right)\mathrm{d}t. \tag{9}$$

Для последующих действий запишем систему (8) с выделением линейных частей вектор-функции F_1 по $\mathbf{y}$ и $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &\approx A\mathbf{y} + f(\mathbf{y}) + B\mathbf{v}, \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\text{зад.}; \end{aligned} \tag{10}$$

причем матрицы A и B можно получить, используя описанные в [2] процедуры аналитической либо автоматической линеаризации исходной вектор-функции F_1 в точке $\mathbf{x}_\text{зад.}, \mathbf{U}_\text{зад.}$.

Для минимизации функционала (9) на уравнениях движения (10) запишем расширенный функционал

$$\widetilde{J} = \int_0^{t_k}\left[\frac{1}{2}\left(\mathbf{y}^\text{T}\Phi\,\mathbf{y} + \mathbf{v}^\text{T}\Psi\,\mathbf{v}\right) + \boldsymbol{\lambda}^\text{T}\left(\dot{\mathbf{y}} - A\mathbf{y} - f(\mathbf{y}) - B\mathbf{v}\right)\right]\mathrm{d}t. \tag{11}$$

Приравнивая нулю первую вариацию (11), соответствующую вариациям траектории и управления, получим краевую задачу

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + f(\mathbf{y}) + B\mathbf{v}, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\text{зад.}; \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\left(A + f_{y(0)}\right)^\text{T}\boldsymbol{\lambda} - \Phi\,\mathbf{y}, \\ \boldsymbol{\lambda}(t_k) = 0; \end{cases}$$

причем $\mathbf{v} = -\Psi^{-1}B^\text{T}\boldsymbol{\lambda}$. Здесь $f_{y(0)}$ — матрица частных производных вектор-функции f по вектору $\mathbf{y}$ в точке $\mathbf{y}_0$.

После исключения управлений получается окончательный вариант краевой задачи на интервале $0 \le t \le t_k$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} - A\mathbf{y} - f(\mathbf{y}) + B\Psi^{-1}B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} = 0; \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} + \left(A + f_{y(0)}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} + \Phi\,\mathbf{y} = 0; \\ \mathbf{y}(0) - \mathbf{y}_0 = 0; \\ \boldsymbol{\lambda}(t_k) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Обозначим вектор $\mathbf{z}^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\right)$ и будем рассматривать уравнение (12) совместно с граничными условиями как некоторое операторное уравнение [3]

$$F(\mathbf{z}) = 0, \tag{13}$$

корень которого нас интересует.

Пусть имеется нулевое приближение корня этого уравнения $\mathbf{z}^0$. Заменяя выражение $F(\mathbf{z}) - F(\mathbf{z}^0)$ его главной линейной частью, т.е. элементом $F_z(\mathbf{z}^0)(\mathbf{z} - \mathbf{z}^0)$, получаем вместо (13) линейное уравнение

$$F_z(\mathbf{z}^0)(\mathbf{z} - \mathbf{z}^0) = -F(\mathbf{z}^0), \tag{14}$$

решение которого $\mathbf{z}^1$ естественно рассматривать как следующее приближение к решению уравнения (13). Здесь $F_z(\mathbf{z}^0)$ — матрица частных производных вектор-функции F по вектору $\mathbf{z}$ в точке начального приближения $\mathbf{z}^0$. Новое приближение $\mathbf{z}^1$, взятое за исходное, можно далее уточнять по той же схеме. Метод Ньютона, очевидно, преобразует нелинейную краевую задачу (12) в последовательность линейных задач, для решения которых можно использовать аналитические методы.

Выполним аналитически одну итерацию метода Ньютона исходя из специально подобранного начального приближения. В качестве начального приближения решения (12) возьмем простейшую траекторию, удовлетворяющую краевым условиям:

$$\mathbf{y}^0(t) = \mathbf{y}_0, \quad \boldsymbol{\lambda}^0(t) = 0, \quad 0 \le t \le t_k. \tag{15}$$

Введем новые переменные $\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^0(t)$,

$\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\lambda}(t) - \boldsymbol{\lambda}^0(t)$.

Тогда операторное уравнение (14) для конкретной системы (12) будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}} - \left(A + f_{y(0)}\right)\boldsymbol{\xi} + B\Psi^{-1}B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta} = A\mathbf{y}_0 + f(\mathbf{y}_0), \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} + \left(A + f_{y(0)}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta} + \Phi\boldsymbol{\xi} = -\Phi\mathbf{y}_0, \\ \boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\eta}(t_k) = 0. \end{cases}$$

Сделаем замену $\boldsymbol{\xi}_1(t) = \boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{y}_0$ и преобразуем последнюю систему уравнений

$$\begin{gathered} \dot{\boldsymbol{\xi}}_1 - \left(A + f_{y(0)}\right)\boldsymbol{\xi}_1 + B\Psi^{-1}B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta} = \\ = f(\mathbf{y}_0) - f_{y(0)} \cdot \mathbf{y}_0; \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} + \left(A + f_{y(0)}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta} + \Phi\boldsymbol{\xi}_1 = 0; \\ \boldsymbol{\xi}_1(0) = \mathbf{y}_0; \quad \boldsymbol{\eta}(t_k) = 0; \quad 0 \le t \le t_k. \end{gathered} \tag{16}$$

Будем искать общее решение для $\boldsymbol{\eta}(t)$ при известном $\boldsymbol{\xi}_1(t)$ в виде

$$\boldsymbol{\eta}(t) = K\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{17}$$

Поскольку матрицы A, B, Φ, Ψ постоянны, матрица K в (17) также будет постоянной, а вектор-функция $\boldsymbol{\varepsilon}$ будет зависеть только от отклонения $\mathbf{y}$. Подставим (17) во второе уравнение системы (16) и вычтем из него первое, предварительно умноженное на матрицу K слева, получим

$$\begin{gathered} \Big[\left(A + f_{y(0)}\right)^{\mathrm{T}} K + \Phi + K\left(A + f_{y(0)}\right) - \\ - KB\Psi^{-1}B^{\mathrm{T}}K \Big]\boldsymbol{\xi}_1 + \\ + \Big[\left(A + f_{y(0)}\right)^{\mathrm{T}} - KB\Psi^{-1}B^{\mathrm{T}}\Big]\boldsymbol{\varepsilon} = \\ = -K\left(f(\mathbf{y}_0) - f_{y(0)} \cdot \mathbf{y}\right). \end{gathered} \tag{18}$$

Как и в стандартном варианте аналитического конструирования линейных регуляторов, потребуем, чтобы матрица K удовлетворяла матричному алгебраическому уравнению Риккати

$$\begin{gathered} K\left(A + f_{y(0)}\right) + \left(A + f_{y(0)}\right)^{\mathrm{T}} K - \\ - KB\Psi^{-1}B^{\mathrm{T}}K + \Phi = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Найдя из (19) матрицу K, можно определить из (18) вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\varepsilon} = -\Big[\left(A + f_{y(0)}\right)^{\mathrm{T}} - KB\Psi^{-1}B^{\mathrm{T}}\Big]^{-1} \times \\ \times K\left(f(\mathbf{y}) - f_{y(0)} \cdot \mathbf{y}\right). \end{gathered} \tag{20}$$

В итоге получаем закон управления с обратной связью

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{\text{зад.}} - \Psi^{-1} B^{\text{T}} \left\{ K\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{зад.}}\right) - \left[\left(A + f_{y(0)}\right)^{\text{T}} - KB\Psi^{-1}B^{\text{T}}\right]^{-1} K\left[f\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{зад.}}\right) - f_{y(0)} \cdot \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{зад.}}\right)\right]\right\}. \qquad (21)$$

Второе слагаемое в фигурных скобках представляет собой дополнительную часть управляющего устройства, которая отсутствует при использовании стандартных приемов аналитического конструирования регуляторов. Важно отметить, что эта часть регулятора вырабатывает дополнительный управляющий сигнал, зависящий от несоответствия нелинейной системы своему линейному приближению.

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В связи с изложенным бортовой алгоритм оптимального управления ЛА на этапе смены эшелона содержит следующие процедуры.

1. Вычисление по H_3, V_3 (параметрам заданного крейсерского режима) значений заданных координат векторов состояния и управления

$$\mathbf{x}_{\text{зад.}} = \left(V_x, V_y, \omega_t, \theta, H, N_z, N_1\right)^{\text{T}}_{\text{зад.}};$$
$$\mathbf{U}_{\text{зад.}} = \left(\delta_{\text{В}}, \alpha_{\text{СГ}}\right)^{\text{T}}_{\text{зад.}}.$$

2. Вычисление матриц A и B линейного приближения в точке $\left(\mathbf{x}_{\text{зад.}}, \mathbf{U}_{\text{зад.}}\right)$; матрицы частных производных f_y в точке начала маневра; матрицы K, представляющей собой решение уравнения (19). Важно отметить, что элементы этих матриц могут быть рассчитаны заранее для различных точек области параметров полетной обстановки (высоты, скорости, текущей массы ЛА, отклонения температуры от стандартной и т.д.), а затем аппроксимированы аналитическими выражениями.

3. Вычисление текущих значений вектор-функции $f\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{зад.}}\right)$ и формирование сигналов управления в соответствии с (21).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Умнов А.А.* Оптимизация управления движением самолета на этапе набора высоты // Проблемы транспорта: Вып.5. СПб.: Межд. акад. транспорта, 2001. С. 105–109.
2. *Умнов А.А.* Проектирование бортовых комплексов управления: Текст лекций. СПб.: ГУАП, 2000. 59 с.
3. *Медведев В.С.* Проектирование следящих систем с помощью ЭВМ. М.: Машиностроение, 1979. 365 с.

Государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург

Материал поступил в редакцию 20.11.2001.

A MODEL OF AIRCRAFT CONTROL AT VERTICAL MANEUVERING

A. A. Umnov, A. O. Kadkin

State University of Aerospace Instrumentation, Saint-Petersburg

The paper presents the results of building a mathematical model and computer program for optimization of flight and vertical maneuver conditions of flying vehicles applied to the ТУ-154M type airplane as an illustration. An algorithm of optimal control generation at the flight level changing stage using the Newton method of approximate boundary-value problem solving is considered.