ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2002, том 12, № 1, с. 90–95

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК 621.519

© Д. С. Потехин, Е. П. Тетерин, И. Е. Тарасов

ВЛИЯНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ И ПРЕДЕЛОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ВЕЙВЛЕТ-ФУНКЦИИ МОРЛЕ НА ТОЧНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ АНАЛИЗА ГАРМОНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ С НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В статье рассмотрена зависимость величины интеграла действительной части вейвлет-функции Морле от пределов интегрирования и коэффициента в показателе степени экспоненты. Найдены оптимальные значения этих факторов, при которых исследуемый интеграл стремится к нулю.

ВВЕДЕНИЕ

Создание современных высокоточных приборов предполагает решение целого ряда задач, одна из которых заключается в определении параметров нестационарных сигналов, имеющих различные гармонические составляющие. Для их определения применяют либо фильтрацию сигналов с помощью устройств с избирательной амплитудно-частотной характеристикой, либо спектральное разложение в ряд Фурье, либо методы спектрального анализа, основанные на ином математическом аппарате. И если первый подход часто — аппаратное решение задачи в аналоговой форме со всеми присущими ему достоинствами и недостатками, то последние два предполагают цифровую форму представления сигналов с последующей обработкой числовых массивов средствами вычислительной техники. В настоящее время наибольшее распространение получил Фурье-анализ как хорошо отработанный и испытанный многолетней практикой метод анализа. Однако преобразованию Фурье присущи по крайней мере два существенных недостатка: невозможность развертки во времени амплитудных и фазовых характеристик исследуемых сигналов и наличие эффекта Гиббса, заключающегося в искажении величины спектральной плотности вследствие представления функции конечной длительности бесконечными гармоническим функциями.

От этих недостатков свободен интенсивно развивающийся в последнее время представитель третьего подхода анализа сигналов — вейвлет-анализ [1]. Вейвлет-анализ предусматривает представление исследуемого сигнала в виде функций конечной энергии, быстро убывающей во времени. Спектральная плотность вейвлет-функции находится вычислением интеграла вида

$$W(t,a)=\frac{1}{a}\int_{x_1\cdot a}^{x_2\cdot a}\varphi(x)\cdot\psi\left(\frac{x-t}{a}\right)\mathrm{d}x\,,$$

где $\varphi(x)$ — исследуемая функция; $\psi\left(\frac{x-t}{a}\right)$ — вейвлет-функция; x_1 и x_2 — границы интеграла, приведенные к единичному масштабу; t — момент времени, для которого вычисляется значение вейвлет-функции; a — масштаб.

Поскольку величина вычисляемого интеграла существенным образом зависит от вида используемой вейвлет-функции, важной задачей является получение ее аналитического выражения, позволяющего наиболее точно определить параметры исследуемого нестационарного сигнала.

Вейвлет-функцией может быть любая функция конечной энергии, удовлетворяющая условию

$$\int_{x_1}^{x_2}\psi(x)\mathrm{d}x=0\,.$$

АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ СИГНАЛА ВЕЙВЛЕТ-ФУНКЦИЯМИ МОРЛЕ

Одной из широко известных вейвлет-функций является функция Морле, описываемая выражением

$$\psi(x)=(\cos x+i\sin x)\cdot e^{-\frac{x^2}{k}}\,,$$

где k — некоторый постоянный коэффициент.

У вейвлет-функции Морле выделяется реальная (косинусная) составляющая, обозначаемая ψ_{Re}, и мнимая (синусная) — ψ_{Im}, а коэффициент k традиционно выбирают равным 50 с пределами интегрирования (1) x_1 и x_2, равными $\pm 4\pi$. Такой вейвлет-функцией проведены исследования гармонической функции $\varphi(t)=100\cdot\cos(\omega t)$ с целью определить ее амплитуду. На рис. 1 показано влияние фазы сигнала на погрешность определения амплитуды.

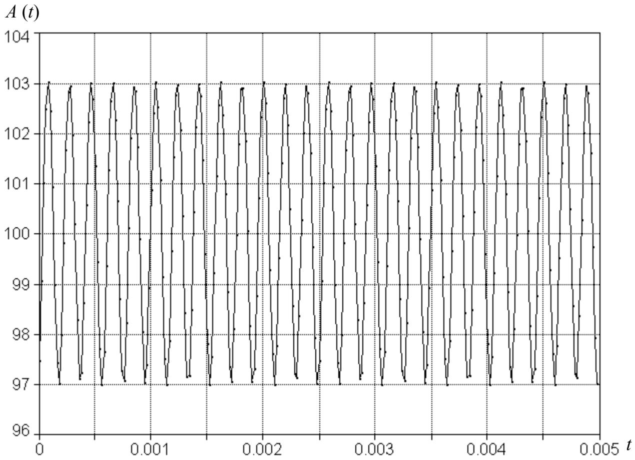

Рис. 1. Зависимость измеренной амплитуды тестового сигнала от его фазы при коэффициенте $k = 50$ и границах интегрирования $\pm 4\pi$ вейвлет-функции Морле

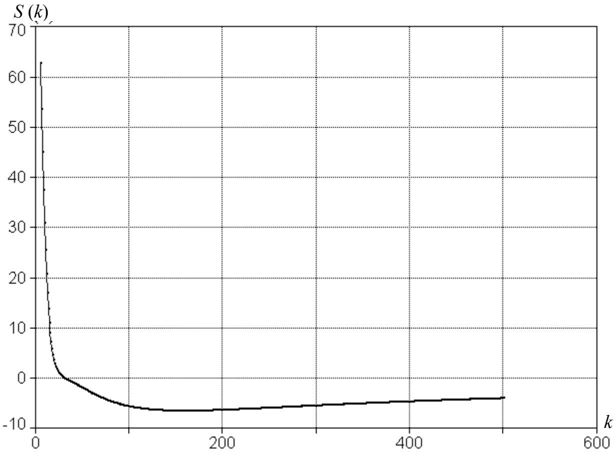

Рис. 2. Зависимость величины интеграла реальной части вейвлет-функции Морле от коэффициента k (пределы интегрирования $\pm 4\pi$)

Значения интеграла S от вейвлет-функции Морле, размах изменений измеренной амплитуды и их среднеквадратическое значение при различных пределах интегрирования и значениях параметра k

Пределы интегрирования вейвлет-функции Морле	Величина параметра k вейвлет-функции Морле	Значение S интеграла от вейвлет-функции Морле	Размах изменения амплитуды, при $A = 100$	Среднеквадратическое отклонение амплитуды, при $A = 100$
$\pm 4\pi$	50	5.8	6.0	2.1
$\pm 4.04\pi$	50	4.1	—	—
$\pm 4\pi$	30.011	0.005	0.04	0.01
$\pm 4.04\pi$	30.011	0.2	—	—
$\pm 1.5\pi$	13.284	0.0007	2.1	0.7
$\pm 1.515\pi$	13.284	0.06	—	—
$\pm 3.5\pi$	26.53353	$1.3\cdot 10^{-4}$	0.08	0.03
$\pm 3.535\pi$	26.53353	$2.0\cdot 10^{-2}$	—	—
$\pm 5.5\pi$	39.485491	$2.3\cdot 10^{-5}$	0.003	0.001
$\pm 5.555\pi$	39.485491	$2.2\cdot 10^{-3}$	—	—
$\pm 9.5\pi$	65.020128	$6.5\cdot 10^{-6}$	$7.6\cdot 10^{-6}$	$3.5\cdot 10^{-6}$
$\pm 9.595\pi$	65.020128	$5.5\cdot 10^{-5}$	—	—

Из анализа рис. 1 следует, что полный размах изменения амплитуды составляет 6 единиц, при заданной амплитуде тестового сигнала в 100 единиц. Невысокая точность определения амплитуды тестового сигнала цифровым методом и зависимость этого значения от фазы исследуемого сигнала связаны с неудачным выбором коэффициента k и границ интегрирования, следствием чего является неравенство нулю реальной части ψ-функции

$$\int_{x_1}^{x_2} \psi_{\mathrm{Re}}(x)\mathrm{d}x = S\,, \qquad (3)$$

где $\psi_{\mathrm{Re}}(x)$ — реальная или косинусная составляющая вейвлета Морле. При традиционных величинах k, x_1 и x_2 интеграл (3), взятый численно, колеблется в пределах 4.1–5.8 (см. таблицу), в то время как интеграл мнимой (синусной) части для симметричных пределов всегда равен нулю вследствие нечетности функции.

НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО k

Для нахождения оптимальной величины коэффициента k была построена зависимость интеграла реальной составляющей вейвлет-функции Морле от собственно коэффициента k (рис. 2). Коэффициент k дает нулевое значение этой функции в точке 30.011. При этом значение интеграла (3) S находится в пределах 0.005–0.2, что значительно лучше предыдущего случая. Измеренная амплитуда тестового сигнала для уточненного коэффициента k представлена на рис. 3.

Рис. 3 показывает, что полный размах отклонения амплитуды с использованием уточненного коэффициента k составляет уже 0.04. Приведенные зависимости доказывают, что погрешность определения амплитуды гармонического сигнала зависит от значения интеграла (3). Чтобы иметь более полную картину влияния границ интегрирования вейвлет-функции Морле на точность определения амплитуды, необходимо рассмотреть поведение функции $\cos x$ вблизи различных границ интегрирования.

НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ГРАНИЦ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Пределы интегрирования $\pm 4\pi$ выбраны не совсем удачно, т.к. при этом косинус "обрывается" на максимуме, а при цифровом представлении исследуемого сигнала пределы интегрирования невозможно выдержать точно (они будут выдержаны с точностью до одного кванта дискретизации по времени). Неточность установки пределов интегрирования и приводит к возникновению гармонических колебаний на графике амплитуды (рис. 1, 3).

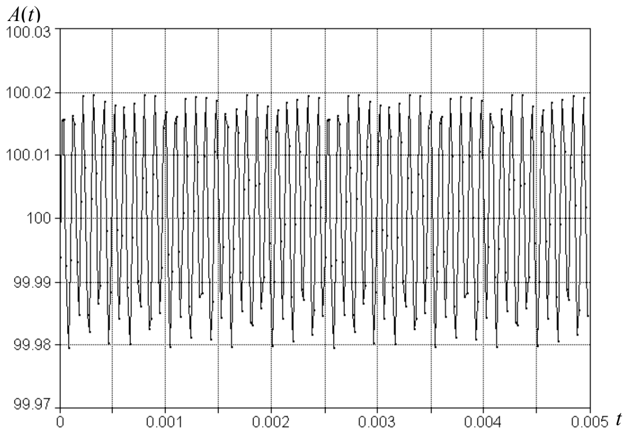

Рис. 3. Зависимость измеренной амплитуды тестового сигнала от фазы сигнала при уточненном коэффициенте k

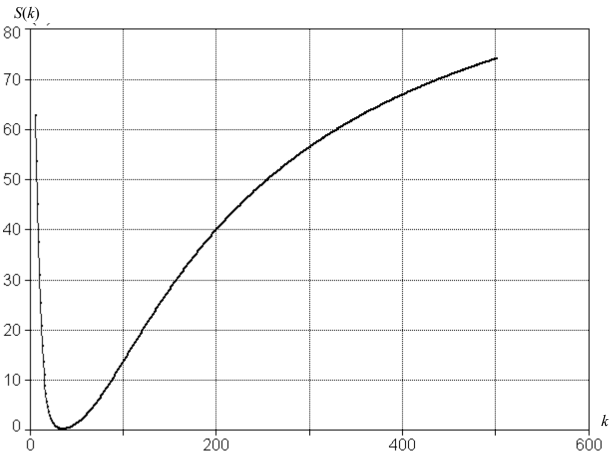

Рис. 4. Зависимость величины интегрирования реальной части вейвлет-функции Морле от коэффициента k в пределах интегрирования $\pm 4.5\pi$

Таким образом, можно остановить свой выбор на границах интегрирования, в которых функция $y = \cos x$ имеет значение, близкое к нулю. Такие границы имеют следующие значения: $\pm 1.5\pi$; $\pm 2.5\pi$; $\pm 3.5\pi$; $\pm 4.5\pi$; $\pm 5.5\pi$ и т.д. Зависимость реальной части вейвлет-функции Морле от параметра k при границах интегрирования $\pm 4.5\pi$ видна на рис. 4.

Эта зависимость имеет ярко выраженный минимум, но нулевого значения функция не достигает. Подобное поведение зависимости $S(k)$ наблюдается и для пределов интегрирования $\pm 2.5\pi$. Для границ $\pm 1.5\pi$; $\pm 3.5\pi$; $\pm 5.5\pi$ зависимость $S(k)$ приведена на рис. 5.

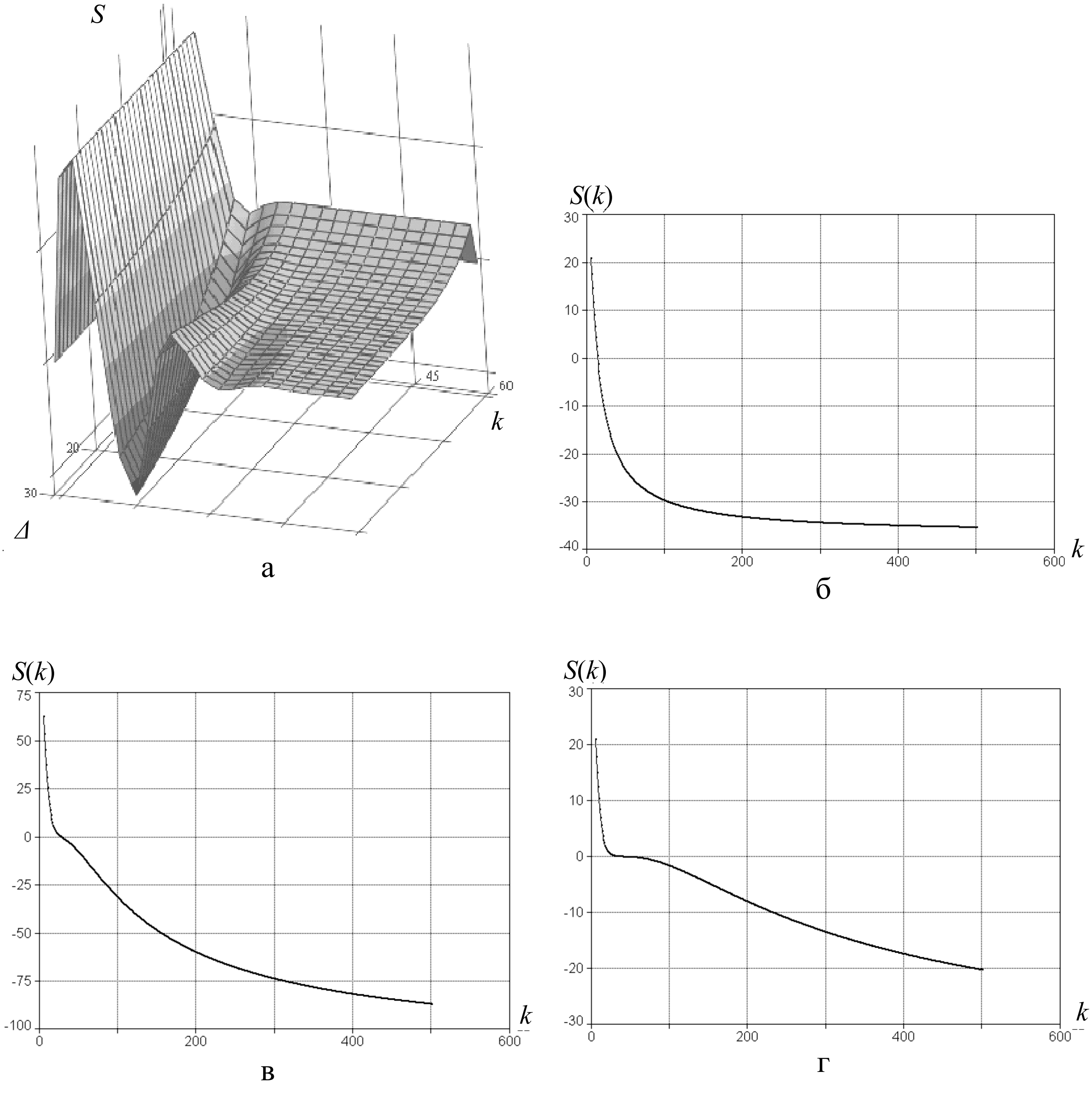

Рис. 5. Зависимость $S(\mathit{\Delta}, k)$ от пределов интегрирования $\mathit{\Delta}$ и коэффициента k (а). Сечения: зависимость $S(k)$ для пределов интегрирования $\pm 1.5\pi$ (б), $\pm 3.5\pi$ (в), $\pm 5.5\pi$ (г)

Анализируя зависимости, представленные на рис. 5, следует иметь в виду, что конечная точность цифрового представления вейвлет-функции приведет к отклонению от оптимального значения коэффициента k. В этом случае существенную роль играет отношение $\frac{\partial S}{\partial k} \approx \frac{\Delta S}{\Delta k}$, которое определяет величину погрешности вычисления вейвлет-функции ΔS в зависимости от точности представления Δk коэффициента k. Т.к. $\Delta S = \dfrac{\partial S}{\partial k}\Delta k$, для минимизации ошибки следует выбирать величину $\dfrac{\partial S}{\partial k}$ возможно меньшей. Если сравнить рис. 4 и 5, г, то можно заключить, что выбор пределов интегрирования $\pm 5.5\pi$ обеспечивает лучшую устойчивость к погрешности цифрового представления вейвлет-функции, чем использование пределов $\pm 4.5\pi$.

Величины коэффициента k и интеграла (3) для различных пределов интегрирования приведены в таблице.

Большой интерес представляет зависимость оптимального значения коэффициента k от пределов интегрирования вейвлет-функции Морле (рис. 6).

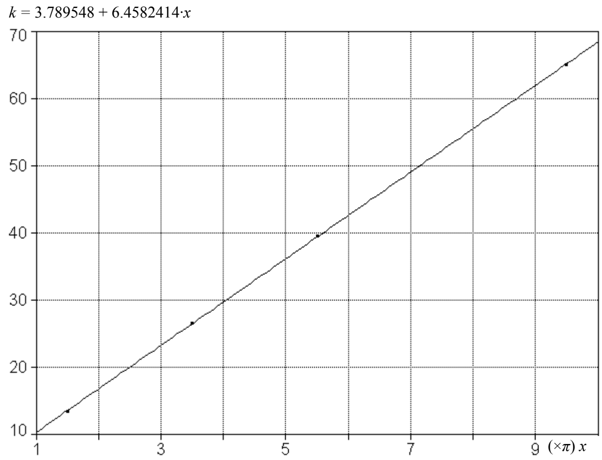

Рис. 6. Зависимость оптимального значения коэффициента k от границ интегрирования вейвлет-функции Морле

ЗАВИСИМОСТЬ ОПТИМАЛЬНОГО *k* ОТ ПРЕДЕЛОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

На рис. 6 прослеживается прямолинейная зависимость оптимального значения коэффициента k от пределов интегрирования вейвлет-функции Морле, построенная по данным из таблицы. Эта зависимость становится еще более интересной, если заметить, что на данной прямой лежат и уточненное значение коэффициента k для традиционных пределов интегрирования $\pm 4\pi$, и минимумы коэффициента k для границ $\pm 2.5\pi$ и $\pm 4.5\pi$. Существование такой зависимости позволяет легко переходить от одних границ интегрирования к другим. Такой переход полезен, например, при уточнении коэффициента k при "плавающих" вследствие дискретности цифровых сигналов пределах интегрирования вейвлет-функции Морле.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение нелишним будет упомянуть о главном недостатке вейвлет-преобразований — большом объеме вычислений. Этот недостаток существенно снижает диапазон их практического применения, а величина границ интегрирования существенным образом сказывается на времени вычислений параметров гармонического сигнала. Поэтому при выборе границ интегрирования необходимо помнить о сохранении оптимального соотношения погрешность/время преобразования. Практический опыт использования подобных методик анализа позволяет рекомендовать пределы интегрирования $\pm 5.5\pi$ для вычислений с погрешностью не более 0.1 %. Пределы интегрирования $\pm 1.5\pi$ приводят к появлению большей погрешности, а пределы $\pm 7.5\pi$ и $\pm 9.5\pi$ существенно увеличивают вычислительные затраты.

Модифицированная вышеописанным образом вейвлет-функция Морле была использована при обработке сигналов в ряде задач, таких как определение параметров акустической волны в жидких средах, определение периодов сокращения сердечной мышцы, сдвига фаз между двумя гармоническими сигналами и др.

В процессе решения этих задач была отмечена высокая точность определения параметров гармонических сигналов и крайне низкое влияние дестабилизирующих факторов на точность определения этих параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Петухов А.П.* Введение в теорию базисов всплесков. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. 132 с.

Ковровская государственная технологическая академия

Материал поступил в редакцию 14.12.2001.

EFFECT OF COEFFICIENTS AND INTEGRATION LIMITS OF THE MORLET WAVELET FUNCTION ON THE ACCURACY OF HARMONIC SIGNAL ANALYSIS WITH NON-STATIONARY PARAMETERS

D. S. Potekhin, E. P. Teterin, I. E. Tarasov

In this paper we discuss the dependence of the real part integral of the Morlet wavelet function on the integration limits and the coefficient in the exponent. Optimal values of these quantities at which the integral in question tends to zero are found.