

УДК 621.391

© С. Н. Агиевич

## СПЛАЙН—ВИЛЕНКИНА—КРЕСТЕНСОНА ФУНКЦИИ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ СИГНАЛОВ

Для решения задач синтеза радиосигналов при описании радиоизлучений предлагается использование теории сплайн-гармонического анализа. Использование этой теории позволяет эффективно учитывать гладкость функций, описывающих сигналы. Вводится понятие сплайн—Виленкина—Крестенсона функций. Их частными случаями являются непрерывные и дискретные функции Виленкина—Крестенсона, непрерывные и дискретные экспоненциальные функции. Вводится соответствующее более общее понятие ядер Котельникова, частными случаями которых являются фундаментальные сплайны (ядра Котельникова для сплайнов) и классическое ядро Котельникова. Предложен инструмент сплайн-гармонического анализа, названный сплайн-быстрым преобразованием в базисе сплайн—Виленкина—Крестенсона функций. Указано на возможность создания новых видов передач на основе изменения степени гладкости базисных функций. Существование функций различной степени гладкости на основе функций сплайн—Виленкина—Крестенсона открывает возможность построения системы сигналов, цифровая обработка которых будет происходить быстрее.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в системах связи для передачи радиосигналов широко используются экспоненциальные функции. При этом информация передается путем изменения частоты, фазы, амплитуды этих бесконечно дифференцируемых функций. Для повышения скорости цифровой обработки таких радиосигналов часто используют алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ). Между тем, дискретные экспоненциальные функции (ДЭФ), лежащие в основе БПФ, являются частным случаем функций Виленкина—Крестенсона (ВКФ). Скорость быстрых преобразований на основе этих функций может быть существенно выше за счет меньшего модуля представления чисел. Однако, гладкие (несколько раз дифференцируемые) аналоги для ВКФ отсутствуют. Существование функций различной степени гладкости на основе ВКФ открывает возможность построения системы сигналов, цифровая обработка которых будет происходить быстрее. Кроме того, при использовании не только амплитуды, частоты и фазы таких базисных функций, но и их степени гладкости открывается возможность для повышения скорости передачи информации. Для решения указанных задач в работе предлагается система новых базисов, названных автором сплайн—Виленкина—Крестенсона функциями (СВКФ). Анализ сигналов по этой системе базисов назван сплайн-гармоническим анализом (СГА). Для восстановления СВКФ по их дискретным отсчетам получены соответствующие ядра, частным случаем которых

является ядро Котельникова. Предложены алгоритмы быстрых преобразований в базисе СВКФ.

Первая часть работы посвящена краткому изложению теории сплайн-гармонического анализа.

Во второй части статьи СГА обобщается на функции Виленкина—Крестенсона.

### ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СУЩЕСТВУЮЩЕЙ ТЕОРИИ СПЛАЙН- ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Основная идея этой теории заключается в том, что при обработке континуальных сигналов методами цифровой обработки сигналов (ЦОС) исследователю дается возможность учесть информацию о степени гладкости (дифференцируемости) исследуемого сигнала или его спектра, подобрав нужный базис по известной информации о гладкости исследуемого процесса. Это позволяет уменьшить количество спектральных коэффициентов разложения, представить анализируемую гладкую функцию в более рельефном виде, точно восполнить пропущенные значения функций. Частными случаями этой теории являются дискретный анализ, основанный на дискретном преобразовании Фурье и непрерывный анализ, основанный на интеграле Фурье.

Поясним физическую сущность сплайн-гармонического анализа. Пусть имеется пространство гладких функций — периодических сплайнов дефекта 1 [1]. Любой сигнал  $S^p(t)$  из этого пространства может быть построен из своего рода

"кирпичиков" — В-сплайнов  $M^p(t)$  порядка  $p$  и заданной степени гладкости  $p-1$ :

$$S^p(t) = \frac{1}{N} \sum_k q_k M^p(t - t_k), \quad (1)$$

где  $q_k$  — некоторые коэффициенты,  $N$  — количество отсчетов сигнала. При этом  $M^1(t)$  — однопериодический единичный импульс единичной энергии. Известно [2], что его спектр, найденный с помощью БПФ, имеет равномерное распределение. А так как базисные функции в этом случае — дискретные экспоненциальные [2], аппроксимирующие ступенчатой функцией, то можно сказать, что гладкость анализируемой функции  $M^1(t)$  совпадает с гладкостью ДЭФ. Подадим на вход устройства, выполняющего БПФ, гладкий импульс  $M^p(t)$ . (Последовательности импульсов  $M^p(t)$  для  $p=1, 2, 3, 4$  представлены на рис. 1).

Отметим важную особенность этого воздействия: энергия любого такого воздействия тоже равна единице, как и у  $M^1(t)$ . Естественно, что форма реакции устройства на такое воздействие уже не будет иметь равномерный вид. С повышением частоты (увеличением  $n$ ) спектральные коэффициенты (полученные с помощью БПФ) будут все меньше. И чем выше степень гладкости  $p-1$ , тем скорость уменьшения будет все больше (рис. 2).

Можно сказать, что устройство, реализующее БПФ, есть фильтр нижних частот для  $M^p(t_k)$ . В рассматриваемом случае гладкость единичного воздействия не соответствует гладкости базисных функций, в данном случае ДЭФ. Для такого соответствия и базисные функции должны иметь гладкость  $p-1$ . Из (1) получаем:

$$\begin{aligned} S^p(t) &= \frac{1}{N} \sum_k q_k M^p(t - t_k) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_k M^p(t - t_k) \sum_n \omega^{nk} F_n(q) = \\ &= \sum_n F_n(q) \frac{1}{N} \sum_k \omega^{nk} M^p(t - t_k) = \\ &= \sum_n \xi_n m_n^p(t) = \sum_n c_n U_n^p(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $m_n^p(t)$  — базисные функции гладкости  $p-1$ ;

$$F_n(q) = \frac{1}{N} \sum_k \omega^{-nk} q_k; \quad \xi_n = F_n(z) / u_n^p;$$

$$u_n^p = F_n(M^p) = \frac{1}{N} \sum_k \omega^{nk} M^p(t_k);$$

$\omega = \exp(j2\pi / N)$ ;  $N = TF_{max}$  — количество отсчетов сигнала;  $T = 1$ ;  $z = \{z_n\}_{-N/2}^{N/2-1}$  — совокупность

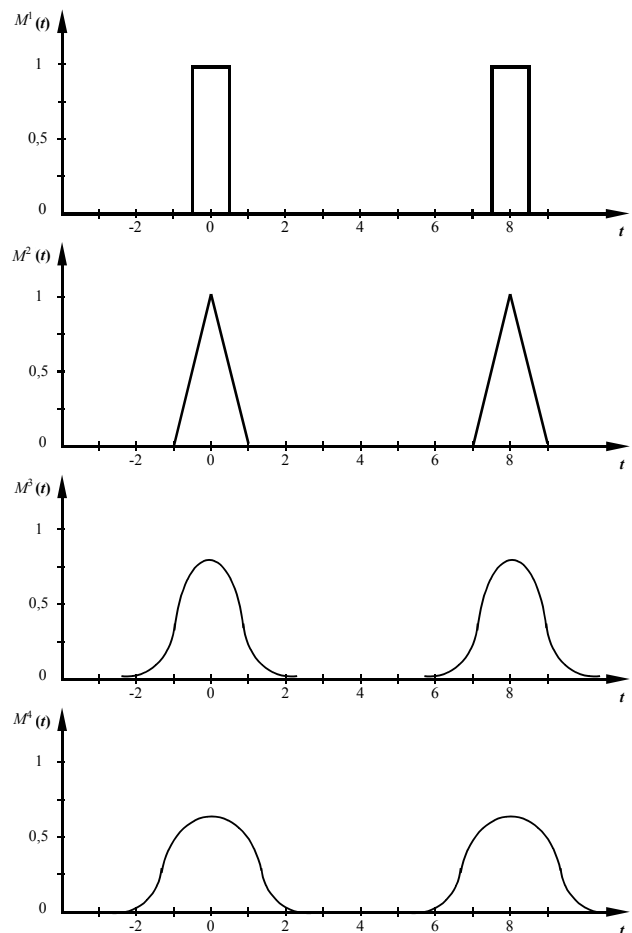


Рис. 1. Периодические В-сплайны для  $p=1, 2, 3, 4$

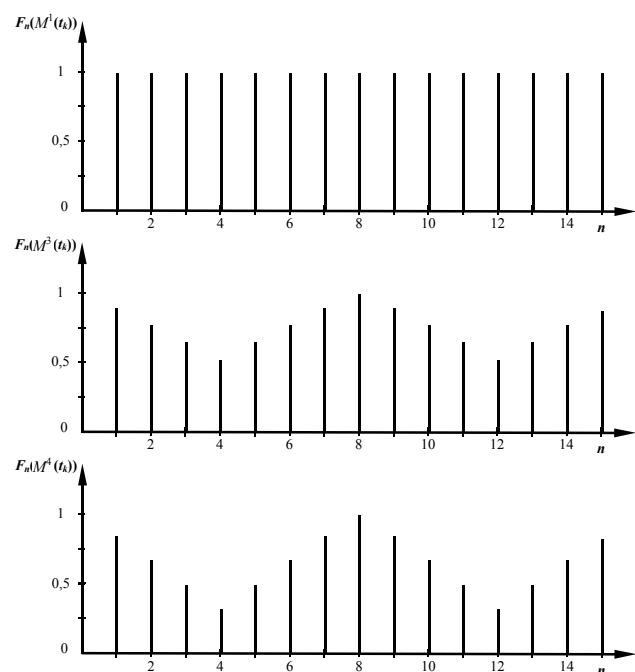


Рис. 2. БПФ от  $M^p(t_k)$  при  $p=1, 3, 4$

дискретных отсчетов сигнала;  $c_n = F_n(z)$ ;  $U_n^p(t)$  — базисные функции гладкости  $p-1$ .

Причем

$$m_n^p(t) = \frac{1}{N} \sum_k \omega^{nk} M^p(t - t_k), \quad (3)$$

$$U_n^p(t) = \frac{m_n^p(t)}{u_n^p}. \quad (4)$$

Иначе говоря, для того чтобы гладкость базисных функций (3), (4) совпадала с гладкостью воздействия, необходимо результат выполнения БПФ от любого сигнала  $S^p(t_k)$  в каждой точке поделить на результат выполнения БПФ от  $M^p(t_k)$ .

Естественно, что если  $S^p(t_k) = M^p(t_k)$ , то спектр будет равномерным. Можно рассматривать в качестве спектральных коэффициентов и  $c_n$ , но использовать в качестве базисных функций  $U_n^p(t)$ . При этом  $m_n^p(t)$  представляют собой экспоненциально-подобные функции, амплитуда которых в точках  $t_k$  уменьшается с увеличением  $n$  по закону  $u_n^p$ , а в промежутках между  $t_k$  — это сплайны гладкости  $p-1$ .  $U_n^p(t)$  интерполируют экспоненциальные функции, т.е. совпадают с ними в узловых точках, а между узловыми точками представляются сплайнами степени гладкости  $p-1$ . При  $p \rightarrow \infty$   $U_n^p(t) \rightarrow e^{2\pi j n t}$  [3]. Как видно, инструментом СГА является модернизированный алгоритм БПФ. Суть модернизации заключается в том, что для вычисления  $S^p(t)$  в любой точке выполняют БПФ от  $Z$ , делят каждую спектральную составляющую на БПФ от сплайна —  $u_n^p$ , выполняют обратное преобразование для получения  $\{q_n\}_{-N/2}^{N/2-1}$ , затем определяют  $S^p(t)$  из (2) [4]. (Совокупность действий по выполнению БПФ от  $Z$  и делению каждой спектральной составляющей на  $u_n^p$  для получения

$F_n(q) = \frac{1}{N} \sum_k \omega^{-nk} q_k$  можно назвать алгоритмом сплайн—БПФ. В этом случае при  $p = 1$   $u_n^1$  равномерно распределено, и мы имеем классический алгоритм БПФ). В этом случае, например, интерполяция и поиск экстремумов производится в несколько раз точнее [5], чем с помощью локальных сплайнов [6], [7], и до нескольких раз быстрее, чем без использования БПФ. При  $F_{\max} \rightarrow \infty$  из (2) можно получить обобщенный ряд Фурье [8]:

$$S^p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n U_n^p(t), \quad (5)$$

а при  $p \rightarrow \infty$  классический ряд Фурье:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S^p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi j n t}. \quad (6)$$

При переходе из пространства периодических сплайнов  $G_n^p$  в пространство непериодических  $G_f^p$  из (2) можно получить [8]

$$S^p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(f) U_f^p(t) df, \quad (7)$$

а

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S^p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(f) e^{2\pi j f t} df \quad (8)$$

— интеграл Фурье.

В работе [8] также показано, что из (2) для сигналов из  $G_f^p$  можно получить выражение для обобщенного ряда Котельникова:

$$S^p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k L^p(t - t_k), \quad (9)$$

где

$$L^p(t - t_k) = \int_{-F_{\max}/2}^{F_{\max}/2} e^{-2\pi j f k / F_{\max}} U_f^p(t) / F_{\max} df$$

— обобщенное ядро Котельникова для базисов сплайнов, а классический ряд Котельникова получается из (9) при  $p \rightarrow \infty$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S^p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k \frac{\sin \pi(t - t_k) F_{\max}}{\pi(t - t_k) F_{\max}}. \quad (10)$$

Там же рассмотрены и выражения для восстановления производных и функций по дискретным отсчетам сигнала с шумом.

Следует отметить, что выражение, подобное (9), приведено в [9]. В этой работе обобщенное ядро Котельникова степени  $p-1$  для базисов сплайнов (формула (15), с. 25) определяется следующим образом (с учетом наших обозначений):

$$L^{p-1}(t) = \sum_{k \in Z} (b_N^{p-1})_{(k)}^{-1} M^{p-1}(t - k),$$

где  $M^{p-1}(t - k)$  — В-сплайн  $p-1$  степени (порядка  $p$ ) и  $b_N^{p-1}(k) = M^{p-1}(t/N)|_{t=t_k} = k$ , т. е. как свертка непрерывного В-сплайна и дискретного В-сплайна

степени  $-1$ . При этом БПФ от  $(b_1^n)^{-1}$  связано с  $u_n^p$  следующим образом:

$$F_n(b_N^{p-1}(k)) = \frac{1}{u_n^{p-1}}.$$

Представляется, что приведенное краткое описание СГА более приближено к классическим понятиям теоремы Котельникова, дискретного и непрерывного преобразований Фурье, чем это следует из [9]. Из теории СГА непосредственно следуют обобщенные выражения для сплайновых экспонент  $U_n^p(t)$ , а на использовании классических экспонент, как известно, и построены системы связи.

Описанные в сжатой форме основы СГА позволяют рассматривать анализ и синтез сигналов с более общих позиций и выдать ряд практических рекомендаций.

Во-первых, теория СГА связывает воедино непрерывный и дискретный анализы Фурье, позволяя их рассматривать как частные случаи для  $p \rightarrow \infty$  и  $p = 1$  (7).

Во-вторых, на наш взгляд, дается четкий ответ на условие, которое ставится в теореме Котельникова об ограниченности спектра. Ограниченным спектром в классическом понимании обладают функции, бесконечно дифференцируемые в каждой точке определения (10). И именно для таких процессов ядро Котельникова является оптимальным. Для сигналов, имеющих другое значение гладкости, оптимальными будут другие ядра, т. к. в экспоненциальном базисе эти сигналы не будут являться ограниченными. В случае несоответствия гладкости ядра и гладкости восстанавливаемой функции точного восстановления не происходит. В частности, классический идеальный фильтр не будет являться таковым для процесса, описываемого функцией с конечной дифференцируемостью.

В-третьих, появление нового параметра для описания излучения — гладкости — дает возможность синтезировать сигналы, в которых информация может передаваться не только путем изменения частоты, амплитуды и фазы, но и на основе изменения гладкости.

В-четвертых, теория СГА дает возможность выбирать ядра для восстановления сигналов в случае конечной суммы в (10). В [10] показано, что в такой постановке задачи ряд (10) является оптимальным с точки зрения сходимости только в том случае, когда спектральная плотность мощности ограничена и равномерна. Для других форм спектральной плотности мощности ядра  $L^p(t - t_k)$  с конечной  $p$  могут быть лучше.

## СПЛАЙН-ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ФУНКЦИИ ВИЛЕНКИНА—КРЕСТЕНСОНА

В основе изложенной выше теории СГА лежат дискретные экспоненциальные функции. Между тем ДЭФ — это частный случай ВКФ. Последние могут позволить решать задачи анализа сигналов быстрее ввиду меньшего модуля представления чисел. Поэтому перейдем к поиску взаимосвязи между ВКФ и сплайнами.

Введем пространство  ${}_{Pal}G_n^p$  периодических сплайнов с упорядочением по Пэли [2] и распишем видоизмененное выражение (1):

$$\begin{aligned} {}_{Pal}S^p(t) &= \frac{1}{N} \sum_k q_k M^p(t \Theta t_k) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_k M^p(t \Theta t_k) \sum_n \overline{Pal}(n, k) {}_{Pal}F_n(q) = \\ &= \sum_n {}_{Pal}F_n(q) \frac{1}{N} \sum_k \overline{Pal}(n, k) M^p(t \Theta t_k) = \\ &= \sum_n {}_{Pal}\xi_n {}_{Pal}m_n^p(t) = \sum_n {}_{Pal}c_n {}_{Pal}U_n^p(t), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} {}_{Pal}m_n^p(t) &= \frac{1}{N} \sum_k \overline{Pal}(n, k) M^p(t \Theta t_k), \\ {}_{Pal}(n, k) &= w^{\sum_{i=1}^l n_{l+1-i} k_i}, \end{aligned}$$

$w = (j2\pi/\mu)$ ;  $\mu$  — модуль представления чисел;  $\overline{Pal}(n, k)$  — комплексно-сопряженное  ${}_{Pal}(n, k)$ ;  $\Theta$  — сдвиг по модулю  $\mu$ ;

$${}_{Pal}\xi_n = {}_{Pal}F_n(z) / {}_{Pal}u_n^p;$$

$${}_{Pal}F_n(q) = \frac{1}{N} \sum_k {}_{Pal}(n, k) q_k;$$

$${}_{Pal}u_n^p = {}_{Pal}F_n(M^p) = \frac{1}{N} \sum_k \overline{Pal}(n, k) M^p(t_k);$$

$$t_k = \left( \frac{p}{2} + k \right) / N;$$

$${}_{Pal}c_n = {}_{Pal}F_n(z); \quad {}_{Pal}U_n^p(t) = \frac{{}_{Pal}m_n^p(t)}{{}_{Pal}u_n^p}.$$

Из (11) видно, что появились новые функции  ${}_{Pal}m_n^p(t)$  и  ${}_{Pal}U_n^p(t)$ . Рассмотрим свойства  ${}_{Pal}m_n^p(t)$ .

### Свойство 1.

$${}_{Pal}m_n^p\left(t \oplus l / N\right) = \overline{Pal}(n, l) {}_{Pal}m_n^p(t).$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} {}_{Pal}m_n^p(t \oplus l / N) &= \\ &= \frac{1}{N} \sum_k \overline{Pal}(n, l) M^p \left( t \ominus \frac{\mu}{N} \right) = \\ &= \overline{Pal}(n, l) \frac{1}{N} \sum_k \overline{Pal}(n, k) M^p \left( t \ominus \frac{k}{N} \right) = \\ &= \overline{Pal}(n, l) {}_{Pal}m_n^p(t). \end{aligned}$$

**Свойство 2.**

${}_{Pal}m_n^p(t)$  —  $N$ -периодические по отношению к  $N$ .

Доказательство:

При  $l = N$  (из свойства 1)

$$\begin{aligned} {}_{Pal}m_n^p(t \oplus N / N) &= \overline{Pal}(n, N) {}_{Pal}m_n^p(t) = \\ &= \overline{Pal}(n, 0) {}_{Pal}m_n^p(t) = {}_{Pal}m_n^p(t). \end{aligned}$$

**Свойство 3.**

Справедливы выражения:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_0^1 \overline{{}_{Pal}m_n^p(t)} {}_{Pal}m_r^b(t) dt &= \delta_r^i {}_{Pal}u_n^{p+b}, \\ \text{б) } \frac{1}{N} \sum_k \overline{{}_{Pal}m_n^p(t_k)} m_r^b(t_k) &= \delta_r^i {}_{Pal}u_n^p u_r^b. \end{aligned}$$

Доказательство а):

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \overline{{}_{Pal}m_n^p(t)} {}_{Pal}m_r^b(t) dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} {}_{Pal}c_n \left( \overline{{}_{Pal}m_n^p} \right) {}_{Pal}c_n(m_r^b) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left( \int_0^1 \overline{Pal(n, t)} {}_{Pal}m_n^p(t) dt \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \int_0^1 Pal(n, t) {}_{Pal}m_r^b(t) dt \right) \right\} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left( \delta_n^i \int_0^1 Pal(n, t) M^p \left( t \ominus \frac{\mu}{N} \right) dt \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \delta_n^r \int_0^1 Pal(n, t) M^b \left( t \ominus \frac{\mu}{N} \right) dt \right) \right\} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta_n^i V_n^p) (\delta_n^r V_n^b) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_r^i \sum_{j=-\infty}^{\infty} {}_{Pal}V_{n+jN}^{p+b} = \delta_r^i {}_{Pal}u_n^{p+b},$$

где  $Pal(n, t)$  — континуальные функции ВКФ,  ${}_{Pal}V_n^p$  — коэффициенты Фурье в базисе  $Pal(n, t)$ .

Из доказательства следует, что сплайны  ${}_{Pal}m_n^p(t)$  образуют ортогональный базис пространства  ${}_{Pal}G_n^p$ .

Доказательство б):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N} \sum_k \overline{{}_{Pal}m_n^p(t_k)} m_r^b(t_k) = \\ &= \sum_{Pal} F_n(m_n^p(t_k)) {}_{Pal}F_n(m_r^b(t_k)) = \\ &= \delta_n^r {}_{Pal}u_n^p {}_{Pal}u_r^b. \end{aligned}$$

**Свойство 4.**

Сплайны  ${}_{Pal}m_n^p(t) / \sqrt{{}_{Pal}u_n^{2p}}$  образуют ортонормированный базис пространства  $G_n^p$ .

Доказательство:

Из 3, а) следует:

$$\int_0^1 \overline{{}_{Pal}m_n^p(t) / \sqrt{{}_{Pal}u_n^{2p}}} {}_{Pal}m_r^p(t) / \sqrt{{}_{Pal}u_r^{2p}} dt = \delta_n^r.$$

**Свойство 5.**

Сплайны  ${}_{Pal}m_n^p \left( t \oplus \frac{p}{2N} \right) / \sqrt{{}_{Pal}u_n^p}$  интерполируют  $\overline{Pal}(n, t)$ , а именно:

$${}_{Pal}m_n^p(l / N) = \overline{Pal}(n, l / N).$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} {}_{Pal}m_n^p \left( \frac{p}{2N} \oplus l / N \right) &= {}_{Pal}m_n^L \left( \frac{p}{2} \oplus l / N \right) = \\ &= \overline{Pal}(n, l / N) {}_{Pal}m_n^L \left( \frac{p}{2N} \right) = \overline{Pal}(n, l / N) {}_{Pal}u_n^p. \end{aligned}$$

**Свойство 6.**

Свертка  ${}_{Pal}m_n^p * {}_{Pal}m_r^b(t) = {}_{Pal}m_n^{p+b} \delta_n^r$ .

Доказательство непосредственно следует из 3, а).

Доказанные выше свойства показывают, что (11) есть разложение сигнала  ${}_{Pal}S^p(t)$  по базисным функциям  ${}_{Pal}m_n^p(t)$  или  ${}_{Pal}U_n^p(t)$ .

Обозначим через  ${}_{Pal}G_f^p$  пространство непериодических сплайнов. Напомним, что для  ${}_{Pal}G_n^p$   $N = T_{Pal}F_{max}$ , где  $T = 1$  (однопериодический случай) период сигнала,  ${}_{Pal}F_{max}$  — максимальная частота анализа сигнала в базисе  $m_n^p(t)$  ( $U_n^p(t)$ ).

**ТЕОРЕМА 1.**

Любой сигнал  ${}_{Pal}S^p(t)$  из пространства  ${}_{Pal}G_f^p$  с ограниченной спектральной плотностью может быть представлен с помощью выражения

$${}_{Pal}S^p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k {}_{Pal}L^p\left(t \Theta_{\mu} t_k\right).$$

**Следствие 1.** При  $\mu = N$  получаем:

$$S^p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k L^p(t - t_k),$$

где  $L^p(t - t_k) = \frac{1}{F_{max}} \int_{-F_{max}/2}^{F_{max}/2} e^{-2\pi jfk / F_{max}} U_f^p(t) df$ .

*Доказательство:*

Из [2] известно, что при равенстве модуля представления чисел  $\mu$  и количества отсчетов на периоде  $N$  функции Виленкина—Крестенсона переходят в ДЭФ. Тогда

$${}_{Pal}S^p(t) = \sum_k z_k {}_{Pal}L^p\left(t \Theta_{\mu} t_k\right) = S_{\Phi}^{ps}(z, t)$$

(см. [7], выражение (9) при  $s, \Phi = 0$ ), откуда и следует искомый результат.

**Следствие 2.** При  $\mu = N$  и  $p \rightarrow \infty$  получаем классический ряд Котельникова

$${}_{Pal}S^p(t) \underset{\substack{\mu=N \\ p \rightarrow \infty}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k \frac{\sin \pi(t - t_k) F_{max}}{\pi(t - t_k) F_{max}}.$$

*Доказательство* см. в [8]: следствие теоремы 2.

Следовательно, ограниченным спектром в классическом понимании обладают только сигналы, бесконечно дифференцируемые в каждой точке интервала времени их определения.

*Замечание.* В обозначениях работы [9] ядро  ${}_{Pal}L^{p-1}\left(t \Theta_{\mu} t_k\right)$  можно выразить следующим образом:

$${}_{Pal}L^{p-1}\left(t \Theta_{\mu}\right) = \sum_{k \in Z} {}_{Pal}\left(b_N^{p-1}\right)^{-1} M^{p-1}\left(t \Theta_{\mu} t_k\right).$$

**ТЕОРЕМА 2.**

Обобщенный ряд Фурье сигнала из  ${}_{Pal}G_n^p$  представляется в следующем виде

$$\begin{aligned} {}_{Pal}S^p(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} {}_{Pal}c_n {}_{Pal}U_n^p(t) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} {}_{Pal}c_n \frac{{}_{Pal}m_n^p(t)}{{}_{Pal}u_n^p}. \end{aligned}$$

*Доказательство:*

Из (11) имеем:

$${}_{Pal}S^p(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} {}_{Pal}c_n {}_{Pal}U_n^p(t).$$

Устремим  $F_{max} \rightarrow \infty$ , тогда

$$\lim_{F_{max} \rightarrow \infty} {}_{Pal}S^p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} {}_{Pal}c_n {}_{Pal}U_n^p(t),$$

что и требовалось доказать.

**Следствие 1.** При  $\mu = N$  справедливо

$${}_{Pal}S^p(t) =_{DЭФ} S^p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n U_n^p(t).$$

*Доказательство* непосредственно следует из следствия 1 теоремы 1.

**Следствие 2.** При  $\mu = N$  и  $p \rightarrow \infty$  имеем классический ряд Фурье

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ \mu = N}} {}_{Pal}S^p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi jnt}.$$

*Доказательство* следует из следствия 1 теоремы 1 и выражения (16) в [8].

**Следствие 3.** Из (11) при  $\mu = N$  и  $p = 1$  следует:

$$S^1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n U_n^1(t).$$

Полученное выражение можно рассматривать как классическое дискретное разложение сигнала  $S^p(t)$  (дискретный анализ Фурье) в базисе ступенчатых функций  $U_n^1(t)$ , которые в точках  $t_k$  совпадают с ДЭФ. Теорема 2 показывает, что при разложении сигнала минимума спектральных коэффициентов можно достичь в базисе, гладкость которого совпадает с гладкостью описывающей сигнал функции. В частности, из следствия 2 этой теоремы видно, что базисные функции  $e^{2\pi jnt}$  оптимальны для бесконечно дифференцируемых сигналов. И чем больше отличаются степень диф-

ференцируемости сигнала и гладкость базисных функций, тем больше спектральных коэффициентов потребуется для разложения анализируемого процесса.

Базисные функции  ${}_{Pal}m_n^p(t)$ ,  ${}_{Pal}U_n^p(t)$ , полученные в настоящей статье, можно назвать сплайн—Виленкина—Крестенсона функциями и ввести для них соответственно обозначения  $sPal^p(n,t)$  и  $SPal^p(n,t)$  при упорядочении по Пэли и  $sWal^p(n,t)$ ,  $SWal^p(n,t)$  при упорядочении по Уолшу. Частным случаем  $SPal^p(n,t)$  и  $SWal^p(n,t)$  при  $p = 1$  и  $t = t_k$  являются дискретные экспоненциальные функции для соответствующего упорядочения  $SPal^1(n,t)$  и  $SWal^1(n,t)$  — континуальные функции ВКФ. В качестве примера  $SWal^p(n,t)$  при  $\mu = 2$  (модуль 2) на рис. 3, 4 показаны первые восемь базисных функций для  $p = 3, 4$ . Построены они с помощью быстрого преобразования Уолша (БПУ). От каждой из базисных функций Уолша вычисляли БПУ. Результат делили на БПУ от  $M^4(t_k)$ . Затем выполняли обратное быстрое преобразование Уолша

(это также БПУ) для получения  $q_k$  в (11) и с учетом диадного сдвига [2] вычисляли  $SWal^4(n,t)$ .

Как видно, описанный порядок действий аналогичен алгоритму сплайн—БПФ, суть которого пояснена в первой части статьи. Вообще же, подобным образом можно вычислять промежуточные значения между узлами функции в любом базисе  $SWal^p(n,t)$ . Наглядное представление о  $SPal^p(n,t)$ , когда  $\mu = N$ , дает рис. 1 в [8].

Теперь обратимся к ядрам  $L^p\left(t\Theta_{\mu}t_k\right)$  (12)–(14). При  $\mu = N$  представление об этих ядрах дает рис. 2 из [8]. Для случая  $\mu = 2$ ,  $t_k = 0$  ядра  $L^3(t\Theta_2t_k)$ ,  $L^4(t\Theta_2t_k)$  представлены на рис. 5.

В отличие от  $L^4(t\Theta_Nt_k)$  (классического кардинального или глобального базисного сплайна) представленный на рисунке сплайн имеет конечный носитель. Ненулевые значения  $L^4(t\Theta_2t_k)$  принимает только на 4 интервалах из восьми. При увеличении  $N$  ситуация не изменяется. Поэтому, с одной стороны, данное ядро можно

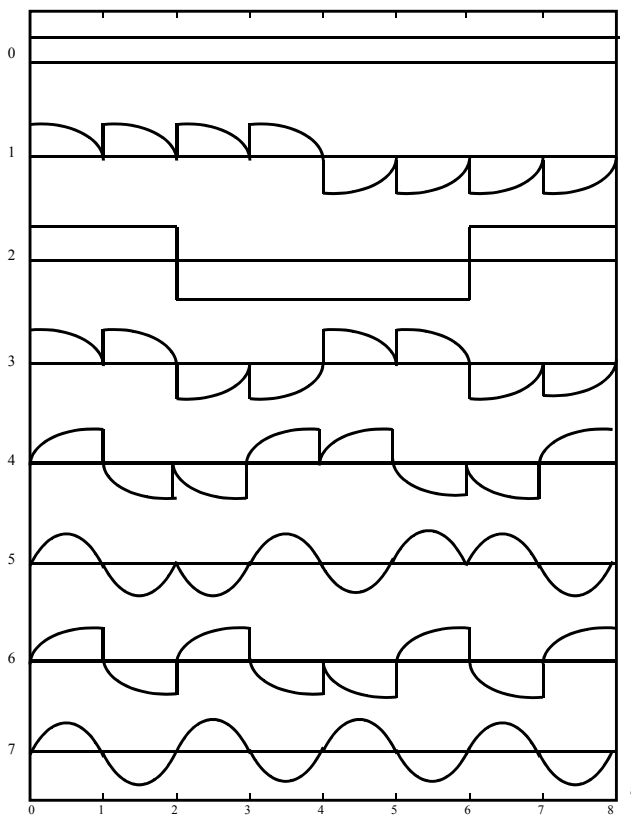


Рис. 3. Базисные функции  $SWal^3(n, t)$

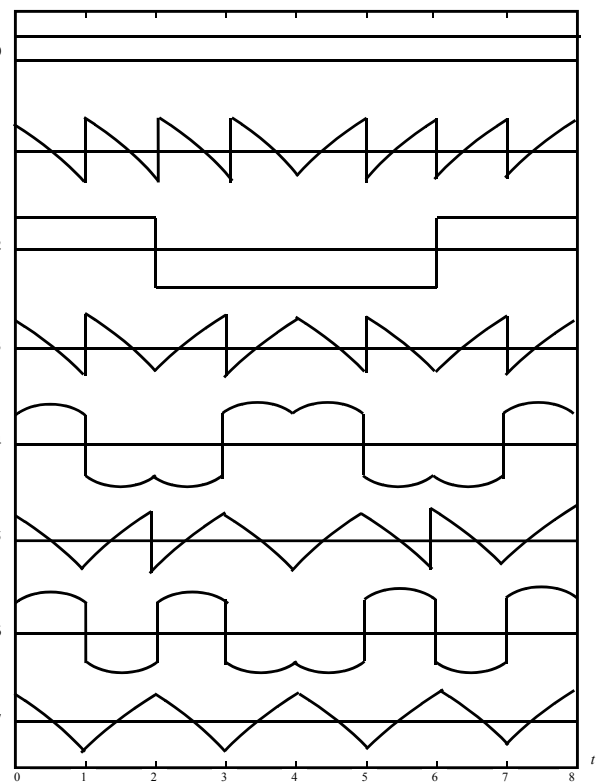


Рис. 4. Базисные функции  $SWal^4(n, t)$

использовать при проектировании систем связи и для восстановления отсчетов сигнала или его спектра. С другой стороны, они быстро сходятся, и их можно использовать для формирования вейвлетного базиса [3].

### РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В ходе исследования был проведен эксперимент, результат которого демонстрирует рис. 6. Сплошной линией представлен результат построения сплайна по отсчетам  $z_k = \{0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0\}$  с помощью кубического сплайна с ядром  $L^4(t-t_k)$ , а пунктирной — с помощью  $L^4(t\Theta_2 t_k)$ . При этом сдвиг ядра  $L^4(t\Theta_2 t_k)$  осуществлялся "по кругу", т. е. обычным образом (без диадной свертки).

Как видно, качество восстановления сигнала по дискретным отсчетам оказалось довольно хорошим. За пределами единичных отсчетов "хвосты" быстро сошлись к нулю.

Отметим еще одно свойство  $L^p\left(t\Theta_\mu t_k\right)$ . При разработке СГА исходили из того, что рассматриваемое ядро должно находиться путем взятия интеграла от произведения дискретной базисной функции ВКФ и ее непрерывного варианта соответствующей степени гладкости (14), как это сделано в классической теореме Котельникова. Между тем, можно определить ядро по-другому.

Из (12) имеем:

$${}_{Pal}S^p(t) = \frac{1}{N} \sum_k q_k M^p\left(t\Theta_\mu t_k\right).$$

При  ${}_{Pal}S^p(t) = {}_{Pal}L^p(t)$  ( $t_k = 0$ ) узловые точки  $z_k$  есть совокупность  $\{1, 0, 0, \dots, 0\}$ , тогда коэффициенты  $q_k$  можно получить, используя алгоритм сплайн—БПФ в базисе функций Виленкина—Крестенсона. Для этого над  $z = \{z_k\}_{k=-N/2}^{N/2-1}$  выполняют БП в базисе функций Виленкина—Крестенсона, делят на  ${}_{Pal}u_n^p$  и делают обратное преобразование.

При этом, как известно, БП от  $M^1(t_k)$  —  ${}_{Pal}u_n^1$  имеет равномерный спектр в любом базисе ВКФ. Следовательно, в этом случае алгоритм сплайн—БПФ вырождается в обычный алгоритм БПФ. Именно так и получены представленные на рис. 5 функции  $L^4(t\Theta_2 t_k)$ .

Наглядное представление обо всех рассматриваемых базисных функциях может дать рис. 7. Функции  $SPal^1(n, t)$  расположены на передней

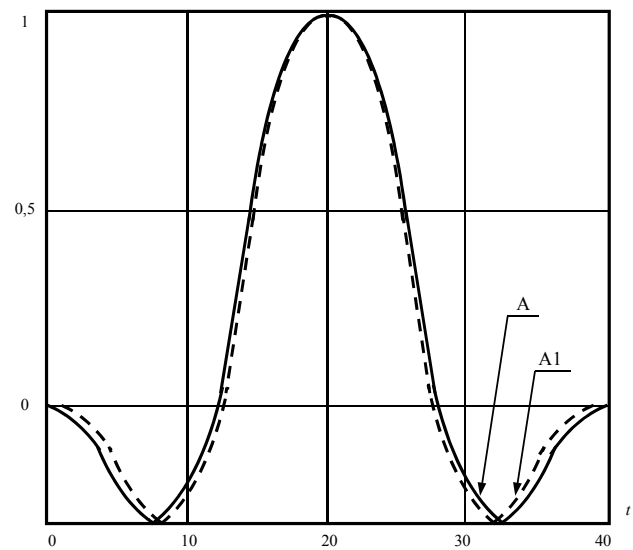


Рис. 5. Графики функций ядер преобразования:

A — график функции ядра  $L^3(t\Theta_2 t_k)$ ,

A1 — график функции ядра  $L^4(t\Theta_2 t_k)$

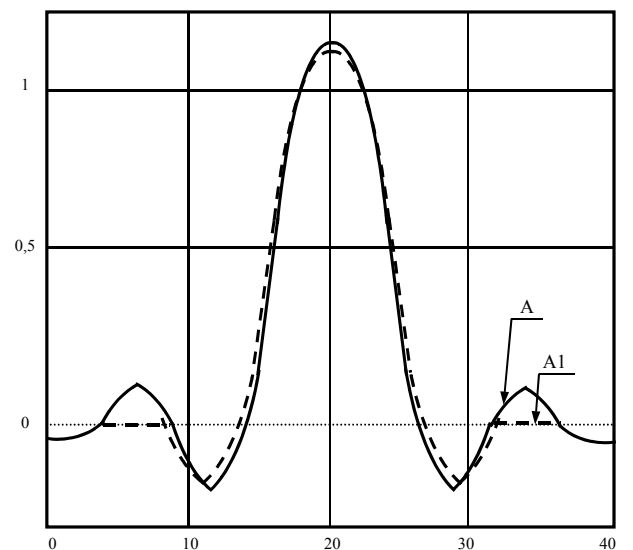


Рис. 6. Восстановление функций:

A — с помощью ядра  $L^4(t-t_k)$ ,

A1 — с помощью ядра  $L^4(t\Theta_2 t_k)$

грани своеобразного куба.

Здесь представлены континуальные ВКФ, при  $t = t_k$  — дискретные функции ВКФ (см. рис. 2.5 [2]),  $SPal^p(n, t)$  при  $\mu = N$  — левая грань куба



и при  $p \rightarrow \infty$  это  $e^{2\pi jnt}$ ,  $SPal^p(n, t)$  при  $\mu = 2$  — верхняя грань куба, функции на основе базиса Уолша, представители которых для  $p = 4$  рассмотрены выше. Для получения ядер  $L^p\left(t \Theta t_k\right)$  необходимо выбрать дискретную базисную функцию  $SPal^1(n, t_k)$  на передней грани "куба" и свернуть с соответствующей непрерывной функцией  $SPal^p(n, t)$  внутри "куба". В частности, свертка  $SPal^1(n, t_k)$  с  $SPal^1(n, t)$  дает прямоугольный импульс, а ДЭФ и  $e^{2\pi jnt}$  — ядро Котельникова.

На рис. 8 представлены диадные сдвиги для  $L^p\left(t \Theta t_k\right)$  при  $\mu = 2$ .

Предложенные базисные функции могут использоваться в системах связи. Изменяя не только частоту, фазу или амплитуду функции  $SPal^p(n, t)$ , но и ее гладкость  $p$ , можно увеличить скорость передачи информации за счет расширения размерности изменяемых параметров. А т. к. для синтеза и анализа функций можно использовать быстрые алгоритмы в базисе ВКФ, то увеличение скорости цифровой обработки будет существенным (для БПУ выигрыш в скорости по сравнению с БПФ может быть от 5 до 13 раз [2]).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе теория СГА распространена на функции Виленкина—Крестенсона. Тем самым, во-первых, получены сплайн—Виленкина—Крестенсона функции. Их частными случаями являются дискретные функции Виленкина—Крестенсона, дискретные экспоненциальные функции, континуальные ВКФ, классические непрерывные экспоненциальные функции. Получен ряд Фурье в базисе СВКФ. Дано графическое представление полученных базисных функций  $SWal^4(t)$  и  $SWal^3(t)$ .

Во-вторых, на основе дискретных функций Виленкина—Крестенсона и непрерывных сплайн—Виленкина—Крестенсона функций получены соответствующие ядра, частными случаями которых являются фундаментальные сплайны (ядра Котельникова для сплайнов) и классическое ядро Котельникова. Доказана теорема отсчетов, частными случаями которой является теорема отсчетов для функций любой степени гладкости, доказанная ранее в работе [8], и классическая теорема Котельникова.

В-третьих, предложен инструмент СГА, названный быстрым сплайн-преобразованием в базисе функций сплайн—Виленкина—Крестенсона.

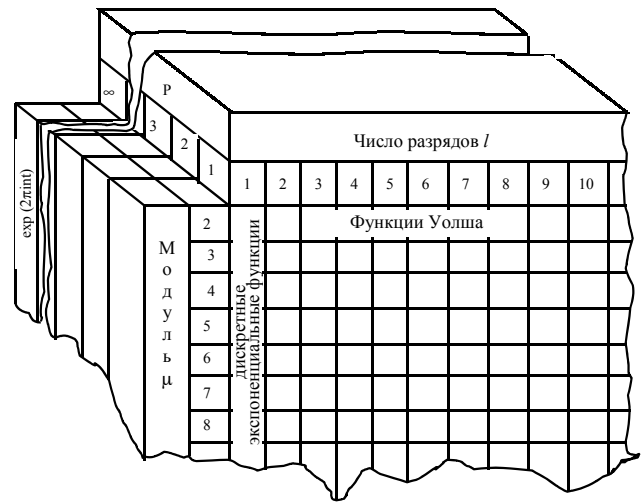


Рис. 7. Базисные функции  $Spal^p(n, t)$

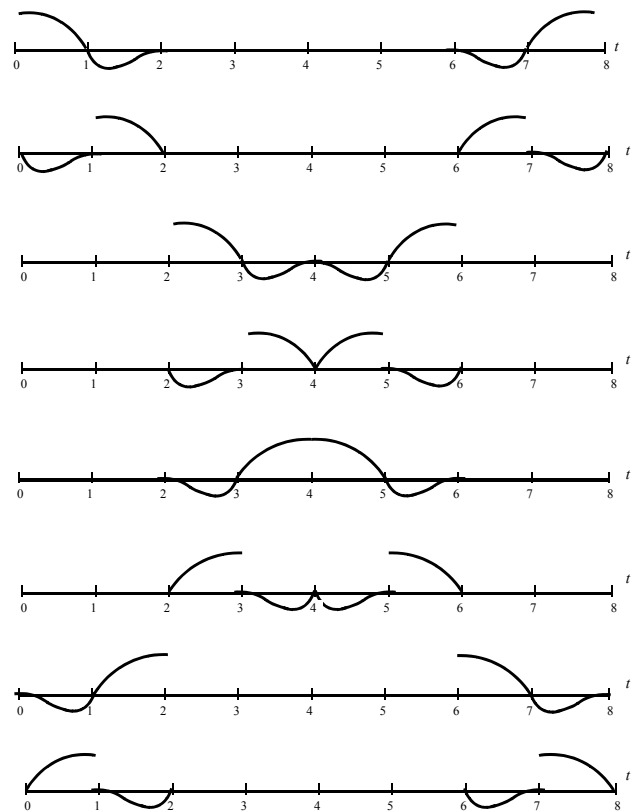


Рис. 7. Диадный сдвиг ядра  $L^4\left(t \Theta t_k\right)$

Частным случаем является сплайн—БПФ и БПФ.

В-четвертых, показано, что на основе теории СГА возможна разработка новых видов передач для систем связи. Информация может передаваться путем изменения гладкости базисной функции.

В-пятых, продемонстрировано, что  $L^p\left(t\Theta_{\mu}t_k\right)$  могут быть кандидатами для построения вейвлетного базиса, т. к. часть из них имеют конечный носитель.

В-шестых, экспериментально подтверждена возможность восстановления промежуточных значений функций с помощью  $L^p\left(t\Theta_{\mu}t_k\right)$ .

В-седьмых, скорость цифровой обработки радиосигналов, синтезированных на основе предлагаемых функций, можно существенно увеличить по сравнению со скоростью обработки сигналов, синтезированных с использованием экспоненциальных функций.

#### Приложение. Доказательство теоремы 1.

Для сигналов из  $G_n^p$  имеем:

$$\begin{aligned} {}_{Pal}S^p(t) &= \frac{1}{N} \sum_k q_k M^p\left(t\Theta_{\mu}t_k\right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_k M^p\left(t\Theta_{\mu}t_k\right) \sum_n \overline{Pal}(n, k) {}_{Pal}F_n(q) = \\ &= \sum_n {}_{Pal}F_n(q) \frac{1}{N} \sum_k \overline{Pal}(n, k) M^p\left(t\Theta_{\mu}t_k\right) = \\ &= \sum_n {}_{Pal}F_n(q) m_n^p(t) = \sum_n {}_{Pal}F_n(z) \frac{{}_{Pal}m_n^p(t)}{{}_{Pal}u_n^p} = \\ &= \sum_n \frac{1}{N} \sum_k z_k \overline{Pal}(n, k) \frac{{}_{Pal}m_n^p(t)}{{}_{Pal}u_n^p} = \\ &= \sum_k z_k \frac{1}{N} \sum_k \overline{Pal}(n, k) {}_{Pal}U_n^p(t) = \\ &= \sum_k z_k {}_{Pal}L^p\left(t\Theta_{\mu}t_k\right). \end{aligned}$$

Перейдем из  $G_n^p$  в  $G_f^p$ . Для этого устремим  $T \rightarrow \infty$ . Тогда:

$$\begin{aligned} {}_{Pal}S^p(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k {}_{Pal}L^p\left(t\Theta_{\mu}t_k\right). \quad (\text{п1}) \\ \lim_{T \rightarrow \infty} n/T &= f, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T = df; \\ \lim_{T \rightarrow \infty} {}_{Pal}L^p\left(t\Theta_{\mu}t_k\right) &= \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \overline{Pal}(n, k) {}_{Pal}U_n^p(t) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{F_{\max} T} \sum_{\substack{n \\ T = \frac{n - F_{\max}}{2}}}^{\frac{F_{\max}}{2}} \overline{Pal}\left(\frac{n}{T}, \frac{k}{F_{\max}}\right) {}_{Pal}U_{n/T}^p(t) = \\ &= \frac{1}{F_{\max}} \int_{-\frac{F_{\max}}{2}}^{\frac{F_{\max}}{2}} \overline{Pal}\left(f, \frac{k}{F_{\max}}\right) {}_{Pal}U_f^p(t) df, \quad (\text{п2}) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} {}_{Pal}U_f^p(t) &= \frac{{}_{Pal}m_f^p(t)}{{}_{Pal}u_f^p}, \\ {}_{Pal}m_f^p(t) &= \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{Pal}\left(f, \frac{k}{F_{\max}}\right) M^p\left(t\Theta_{\mu}t_k\right), \\ {}_{Pal}u_f^p &= \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{Pal}\left(f, \frac{k}{F_{\max}}\right) M^p(t_k). \end{aligned}$$

Здесь значения  $f$  и  $F_{\max}$  понимаются как текущая и максимальная частоты в используемых базисах.

Таким образом, выражение (п1) с ядром (п2) доказывает теорему 1.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
2. Трахтман А.М., Трахтман В.А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Советское радио, 1975. 208 с.
3. Zheludev V.A. Periodic splines, harmonic analysis and wavelets in Signal and image representation in combined spaces, wavelet // Anal. Appl., 7 / eds Y.Y. Zeevi and R. Coifman. Academic Press, San Diego, CA, 1998. P. 477–509.
4. Желудев В.А. Периодические сплайны и быстрое преобразование Фурье // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32, № 2. С. 179–198.
5. Агиевич С.Н., Мальшев С.Р., Подымов В.А., Смирнов П.Л. Сплайн-интерполятор. Патент 116669 РФ // Б.И. 1998. № 21. 34 с.
6. Агиевич С.Н., Смирнов П.Л., Желудев В.А., Красильников С.Н., Хохленко Ю.Л. Способ оценивания несущей частоты и устройство для его осуществления. Патент 2100812 РФ // Б.И. 1997. № 36; Б.И. 1999. № 26. 104 с.
7. Алексеев А.А., Агиевич С.Н., Желудев В.А., Макеев В.М. Применение локальных сплайнов для цифровой обработки частотно-временных функций плотности распределения сигнальной энергии // Радиотехника и радиоэлектроника. 2000. № 3. С. 296–311.

8. *Агиевич С.Н., Алексеев А.А., Глушанков Е.И.* Модели сигналов в базисах сплайнов дефекта 1 и оценивание параметров радиоизлучений // Радиоэлектроника (Известия вузов). 1995. Т. 38, № 4. С. 3–16.
9. *Unser M.* Splines // IEEE Signal Processing Magazine. 1999. V. 16, N 6. P. 22–38.
10. *Мановцев А.П.* Основы теории радиотелеметрии. М.: Энергия, 1973. 354 с.

*Военный университет связи, Санкт-Петербург*

Материал поступил в редакцию 12.11.2001.

## **SPLINE—VILENKIN—KRESTENSON FUNCTIONS FOR SIGNAL REPRESENTATION**

**S. N. Agievich**

*Military Communication University, Saint-Petersburg*

We present here a computational technique named Spline Harmonic Analysis in a new basis of the Spline—Vilenkin—Krestenson functions. The discrete Fourier transform in the basis of the Vilenkin—Krestenson functions is a special case of the new Spline Harmonic Analysis. We present more general spline functions. Cardinal splines and the Kotelnikov kernel are special cases of the new general spline functions. The new spline functions could be used in communication systems.