

УДК 538.65: 621.316.73

© Г. А. Сапожников, С. В. Богословский

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ МАГНИТНЫМ ПОДВЕСОМ В ДАТЧИКАХ

Кратко описаны результаты создания датчиков, основанных на магнитной левитации. Рассматривается математическая модель управления периодом напряжения питания для изменения рабочего зазора в магнитном подвесе. Для оптимизации управления движением магнитно-подвешенного элемента использован метод аналитического конструирования регуляторов.

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость повышения конкурентоспособности отечественных систем управления и их элементов предъявляет все более высокие требования к датчикам первичной информации по целому комплексу характеристик, к числу которых относятся: точность, чувствительность, допустимый частотный диапазон функционирования и диапазон измерений, надежность, виброустойчивость, вес, габариты и др.

Одним на наиболее перспективных направлений совершенствования систем управления и навигации является применение датчиков на магнитном подвесе, в которых отсутствуют механические связи между подвижными и неподвижными частями прибора, сохраняется работоспособность в условиях глубокого вакуума и в агрессивных средах. Электромагнитные подвесы позволяют на порядок повысить точность и на несколько порядков — пороговую чувствительность измерительных приборов (акселерометров, гироскопов, датчиков давления и др.), в которых ранее в качестве опор чувствительного элемента использовались камневые опоры часового типа.

Электромагнитные подвесы могут не только уменьшать сопротивление трения, но и одновременно выдавать точную информацию о величинах смещения и силах, определяющих движение элементов, т.е. могут являться многофункциональными измерительными подвесами.

КОНСТРУКТИВНЫЕ СХЕМЫ МАГНИТНЫХ ПОДВЕСОВ ДЛЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

Выбор схемы и параметров подвеса зависит от требований, предъявляемых к конкретному классу измерительных приборов. Например, к измерителям перемещений предъявляются требования вы-

сокой крутизны выходного сигнала, значительного линейного диапазона, симметричности характеристики относительно нулевого сигнала, отсутствия силового воздействия со стороны датчика. При быстроменяющихся сигналах от датчика перемещений требуются необходимые динамические характеристики. Поэтому при выборе подвеса чувствительного элемента для такого измерителя исходят из того, что параметр подвеса, несущий информацию о перемещении якоря относительно статора, должен линейно зависеть от перемещения, иметь достаточную крутизну и симметричность характеристики относительно нулевого сигнала.

Используя электромагнитный подвес в акселерометрах и силомерах летательных аппаратов, необходимо выбирать такую структурную схему подвеса, которая позволяла бы определять действующую на якорь силу с заданной точностью при заданной перегрузочной способности подвеса. Важнейшими требованиями, предъявляемыми к электромагнитным подвесам элементов датчиков, являются также высокая динамическая устойчивость, надежность, минимальное потребление энергии, простота и технологичность конструкции.

В зависимости от способа управления величиной магнитного поля в рабочих зазорах электромагнитные подвесы подразделяются на пассивные и активные. Подвес с использованием вспомогательной следящей системы называется подвесом активного типа, а подвес, стабильность которого обусловлена естественным изменением параметров основной системы подвеса, — подвесом пассивного типа.

Пассивные электромагнитные магниторезонансные подвесы (ЭМРП) в настоящее время нашли наиболее широкое практическое применение в датчиках первичной информации систем управления, что объясняется их сравнительной простотой, малыми габаритами, весом, малой потребляемой мощностью. Статическая устойчивость

ЭМРП достигается достаточно просто за счет параметрической обратной связи, возникающей при настройке резонансных характеристик контуров, образованных электромагнитами и конденсаторами, включенные в резонансные цепи, последовательно соединенные резонансные контуры или мостовые резонансные схемы. Значительно сложнее получить динамическую устойчивость ЭМРП без ухудшения статических характеристик и использования внешнего механического демпфирования.

Несмотря на отсутствие механического контакта между статором и взвешиваемым телом, электромагнитный подвес может стать источником внутренних возмущающих моментов. Возникновение возмущающих моментов в магнитном подвесе связано с возможным отклонением электромагнитных сил от направления к центру ротора. Это отклонение может быть вызвано двумя причинами. Первая из них связана с погрешностью обработки поверхности ротора, приводящей к несовпадению нормалей к поверхности с направлениями к геометрическому центру ротора. Вторая причина обуславливается проявлением гистерезисных свойств ферромагнитного материала ротора. Гистерезисные явления приводят к тому, что элементарные магнитные силы могут отклоняться от нормали к поверхности ротора, из-за чего момент магнитного тяжения в подвесе может возникать даже при идеальной поверхности ротора. Вследствие этого положительный эффект, достигаемый применением магнитных подвесов в прецизионных датчиках первичной информации систем управления, во многом зависит от того, насколько успешно решена задача сведения к минимуму возмущающих моментов. Применение электромагнитных резонансных подвесов (ЭМРП) в качестве измерительного подвеса ограничено нелинейным характером зависимостей силы и индукции в рабочем зазоре подвеса. Кроме того, выходная информационная величина датчика на ЭМРП — это переменное напряжение высокой частоты, измерить которое с малой погрешностью затруднительно. Однако малый вес, небольшие габариты, малое потребление энергии ЭМРП были использованы при создании комбинированного электромагнитного подвеса, состоящего из ЭМРП и внешнего контура автоматического регулирования суммы индукции в рабочих зазорах подвеса. Такой подвес имеет линейную силовую характеристику, что позволяет успешно использовать его в качестве измерительного подвеса.

Получить динамическую устойчивость ЭМРП без использования внешнего механического демпфирования и улучшить его статические характеристики можно за счет:

— управления магнитным сопротивлением магнитопроводов подвеса;

— управления магнитным сопротивлением для потоков рассеяния;

— управления индуктивным сопротивлением резонансной схемы;

— управления емкостным сопротивлением резонансной схемы;

— управления активным сопротивлением резонансной схемы;

— управления сопротивлениями связей между резонансными схемами.

Наиболее перспективными методами коррекции характеристик ЭМРП являются:

— управление индуктивным сопротивлением резонансной схемы;

— управление емкостным сопротивлением резонансной схемы.

— комплексный подход к методам формирования и коррекции статических и динамических характеристик ЭМРП, к выбору рабочей точки на резонансной характеристике с учетом влияния корректирующих цепей.

Структурная схема инвариантного к внешней силе подвеса приведена на рис. 1. Электромагнитный подвес содержит: взвешиваемый якорь 1; диаметрально противоположные электромагниты 2 с рабочими 3 и дополнительными 4 обмотками; последовательно соединенные резонансные контуры, образованные рабочими обмотками диаметрально противоположных электромагнитов и конденсаторами 5; выпрямительные мосты 6; управляемые дроссели 7 с обмотками управления 8, подключенные к дополнительным обмоткам элек-

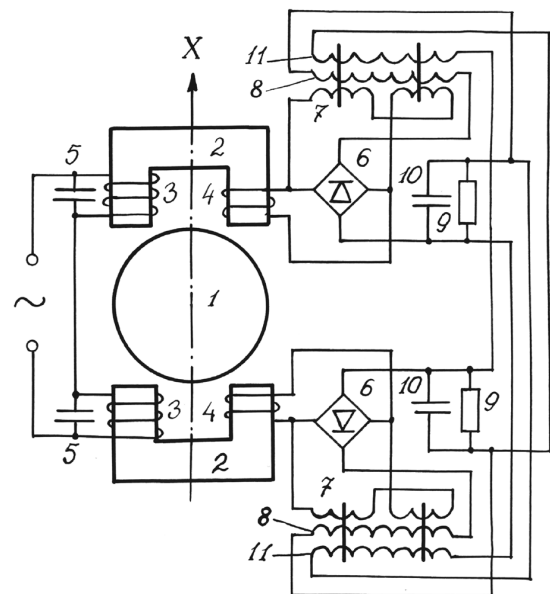


Рис. 1. Инвариантный подвес

тромагнитов; резисторы 9; дополнительные конденсаторы 10; в каждом управляемом дросселе дополнительную обмотку управления 11. Причем обмотка управления каждого управляемого дросселя подключена к дополнительной обмотке электромагнита через выпрямительный мост и резистор, зашунтированный дополнительным конденсатором, а дополнительная обмотка управления каждого управляемого дросселя включена параллельно резистору цепи управления противоположного управляемого дросселя.

Введение в каждый управляемый дроссель дополнительной обмотки управления, включенной параллельно резистору цепи управления противоположного управляемого дросселя, обеспечивает перестройку резонансных контуров электромагнитного подвеса в зависимости от внешней силы, действующей на взвешиваемый якорь, эквивалентную перестройке резонансных контуров, обусловленной изменением зазоров между взвешиваемым якорем и магнитопроводами, что делает подвес инвариантным к внешней силе и тем самым повышает точность центрирования взвешиваемого якоря.

Несмотря на то что история электромагнитных подвесов началась с активных электромагнитных подвесов, в которых регулирование взвешивающего поля осуществляется внешней электронной обратной связью, до последнего времени их применение было весьма ограниченным. После появления пассивных магниторезонансных подвесов интерес к активным схемам и вовсе снизился. Основными недостатками активных электромагнитных подвесов по сравнению с магниторезонансными являлись их большая сложность и большие габариты, обусловленные наличием дополнительного внешнего регулятора. Однако развитие микроэлектроники в последнее десятилетие, с одной стороны, а также рост требований к характеристикам подвеса со стороны датчиков первичной информации — с другой, в значительной мере изменили отношение к активным схемам. К числу важнейших преимуществ активного подвеса относятся:

- более высокая жесткость и быстроедействие, так как явно выраженная обратная связь делает более легким регулирование крутизны изменения токов;

- возможность обеспечения меньшего уровня возмущающих моментов;

- большой диапазон возможных значений центрирующей силы.

Все это позволяет сделать вывод о перспективности использования активного электромагнитного подвеса с дифференциальным электромагнитным преобразователем силы для датчиков первичной информации управляющих измерительно-вычислительных комплексов.

На рис. 2 показана функциональная схема одноосного электромагнитного подвеса с дифференциальным преобразователем силы. Подвес состоит из взвешиваемого тела (ВТ); установленных с противоположных сторон от него электромагнитов ЭМ₁ и ЭМ₂; бесконтактного датчика положения (ДП); усилительно-преобразовательных блоков УПБ₁ и УПБ₂ и усилителей мощности УМ₁ и УМ₂.

С целью увеличения точности и расширения диапазона измеряемых электромагнитными подвесами величин используются подвесы с управляемой жесткостью, инвариантные к внешним условиям и к изменению внутренних параметров. В качестве выходных информационных величин предложено использовать частоту и скважность управляющих сигналов, измерить которые можно с очень высокой точностью. Предложены и исследованы структуры активных электромагнитных подвесов на переменном токе с регулированием рабочего зазора по амплитуде напряжения питания, по величине периода напряжения питания, по частоте следования управляющих импульсов. Анализ статических характеристик магнитных подвесов показал, что для улучшения их линейности, увеличения точности измерения сил магнитными подвесами в их структуру необходимо вводить контуры регулирования индукции в рабочих зазорах, а также контуры, обеспечивающие инвариантность подвеса по зазору, и управление жесткостью подвеса. Для получения устойчивого активного подвеса в вакууме достаточно в контур регулирования рабочего зазора подвеса ввести звено динамической коррекции первого порядка.

При разработке измерительных электромагнит-

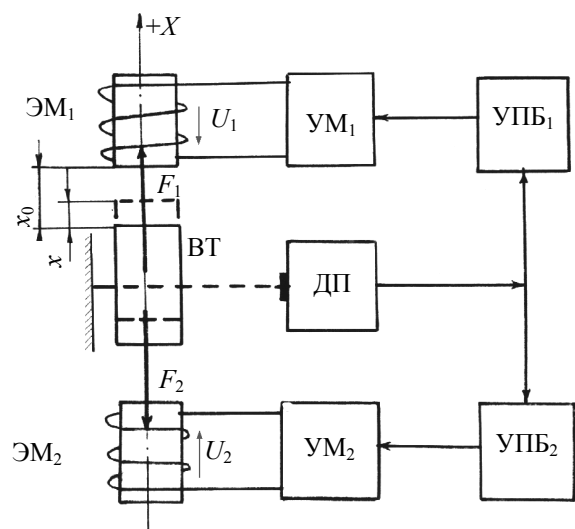


Рис. 2. Активный электромагнитный подвес

ных подвесов следует отдавать предпочтение подвесам на переменном токе с формированием силовой характеристики по индукции в зазоре. Причем частота напряжения питания электромагнитных преобразователей подвеса зависит от жесткости подвеса, конструктивных параметров, динамических свойств электромагнитных преобразователей. Она в значительной степени влияет на выбор материала для преобразователей и на статические характеристики подвеса. Точность измерения индукции с помощью датчиков на переменном токе значительно выше, чем на постоянном. Кроме того, переменный ток оказывает размагничивающее действие на магнитопроводы электромагнитных преобразователей, что существенно уменьшает погрешность измерения силы за счет остаточной намагниченности материала магнитопровода. Исследования показывают, что остаточная намагниченность материала магнитопровода в измерительных подвесах постоянного тока не позволяет снизить погрешность измерения силы менее 0.1–0.2 %, даже в случае использования в качестве материала магнитопровода пермалля 79НМ.

Одним из перспективных путей повышения жесткости электромагнитного подвеса, уменьшения погрешности линейности его статической характеристики, является введение следящей системы регулирования электромагнитной индукции в электромагнитный преобразователь силы. В электромагнитном подвесе с контуром регулирования индукции отсутствует погрешность линейности статической характеристики, обусловленная изменением величины рабочего зазора. При этом погрешность линейности подвеса будет определяться удвоенной погрешностью линейности регулятора индукции, а поскольку регулятор индукции состоит из пропорциональных звеньев с весьма высокой линейностью и датчика индукции, то требования к обеспечению линейности регулятора индукции сводятся к выбору датчиков индукции с соответствующей линейностью статической характеристики.

На рис. 3 приведена функциональная схема активного дифференциального подвеса с управляемой жесткостью. Подвес содержит взвешенный элемент 1, расположенный в зазоре между двумя электромагнитами 2, обмотки которых соединены с выходами усилительно-преобразовательных блоков 3; датчик положения 4 взвешенного элемента, подключенный к входу блока динамической коррекции 5; блок суммирования 6 и блок вычитания 7; источник опорного сигнала 8; блок индикации 9; датчики индукции 10, чувствительные элементы 11 которых размещены в зазорах между взвешенным элементом и соответствующим электромагнитом, два интегратора 12; две схемы сравнения 13; управляемый делитель 14 и управляемый усилитель 15.

Задача регулирования величины рабочего зазо-

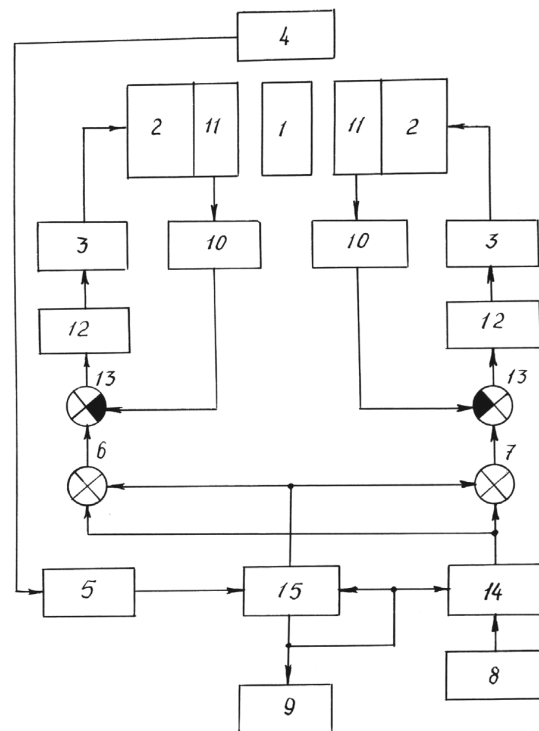


Рис. 3. Активный дифференциальный подвес с управляемой жесткостью

ра в зависимости от величины периода (частоты) напряжения питания решена в процессе синтеза квазиоптимального нелинейного детерминированного регулятора для активного электромагнитного подвеса на переменном токе. В результате был построен квазиоптимальный нелинейный регулятор для нелинейной модели электромагнитного подвеса на основе стандартного метода аналитического конструирования линейных регуляторов в комбинации с итерационным методом Ньютона для решения систем нелинейных операторных уравнений. Результаты моделирования подтвердили, что введение нелинейной обратной связи значительно улучшает динамические свойства активного электромагнитного подвеса.

На рис. 4 приведена функциональная схема такого подвеса. Подвес содержит взвешенный элемент 1, расположенный между двумя электромагнитами 2, обмотки которых соединены с выходами усилительно-преобразовательных блоков 3; датчик 4 положения взвешенного элемента, подключенный к входу блока 5 динамической коррекции; первый блок 6 суммирования и первый блок 7 вычитания, первые входы которых подключены к источнику 8 опорного сигнала; блок 9 индикации; датчики 10 индукции, чувствительные элементы 11 которых размещены в зазорах между взвешенным элементом и соответствующим электромагнитом; два интегратора 12; две схемы 13 сравне-

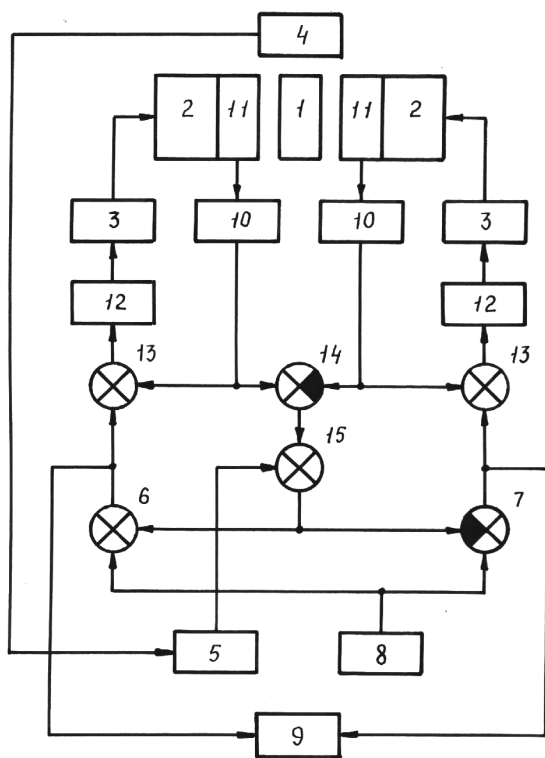


Рис. 4. Магнитный подвес, инвариантный по зазору

ния; второй блок 14 вычитания и второй блок 15 суммирования. Причем первые входы схем сравнения соединены с соответствующими выходами первого блока суммирования и первого блока вычитания и с входами блока индикации, а выходы — с входами интеграторов, выходы которых подключены к соответствующим входам усилительно-преобразовательных блоков. Вторые входы схем сравнения и входы второго блока вычитания подключены к выходам соответствующих датчиков индукции; выходы второго блока вычитания подключены ко второму входу второго блока суммирования, первый вход которого подключен к выходу блока динамической коррекции, а выход — ко вторым входам первого блока суммирования и первого блока вычитания.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАГНИТНОГО ПОДВЕСА С РЕГУЛИРОВАНИЕМ РАБОЧЕГО ЗАЗОРА

Дифференциальный электромагнитный подвес с регулированием рабочего зазора по периоду питающего напряжения содержит взвешиваемое тело; установленные с противоположных сторон от него первый и второй электромагниты, обмотки которых соединены с выходами первого и второго

усилителей мощности; датчик положения взвешиваемого тела, подключенный к входу блока динамической коррекции, выход которого соединен с первыми входами блоков суммирования и вычитания, вторые входы которых соединены с выходами источника опорного сигнала. Выходы датчиков индукции, представляющих собой измерительные катушки и размещенных в зазорах между взвешиваемым телом и соответствующими электромагнитами, подключены к первым входам схем сравнения. Вторые входы схем сравнения соединены с выходами генераторов перестраиваемой частоты, а выходы — с входами усилителей мощности. Выходы блоков суммирования и вычитания соединены с входами генераторов перестраиваемой частоты. При этом последовательно соединенные схемы сравнения, усилители мощности и электромагниты, а также датчики индукции образуют два замкнутых контура регулирования величины индукции в зазорах между взвешиваемым телом и электромагнитами.

Для исследования динамических свойств активного электромагнитного подвеса с регулированием рабочего зазора по величине периода напряжения питания прежде всего необходимо получить математическую модель электромагнитного преобразователя силы на переменном токе при изменении амплитуды и величины периода напряжения питания.

Рассмотрим работу дифференциального электромагнитного преобразователя силы в случае, когда на обмотки возбуждения электромагнитов подается переменное синусоидальное напряжение. Уравнение электрической цепи обмотки возбуждения запишем в виде

$$dY/dt + K \cdot Y = U, \quad (1)$$

где Y — потокосцепление, $K = R/L$.

В общем случае

$$U(t) = U_0(t) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T(t)} \cdot t\right),$$

где $U_0(t)$ и $T(t)$ являются функциями времени и выражаются через переменные состояния системы электромагнитного подвеса.

Уравнение движения взвешиваемого тела имеет вид

$$m \cdot \frac{d^2 X}{dt^2} + \lambda \cdot \frac{dX}{dt} = F_3 + F_{вн}, \quad (2)$$

где $F_3 = \frac{B^2 \cdot S}{2 \cdot \mu_0}$; m — масса взвешиваемого тела,

λ — коэффициент демпфирования, $F_{вн}$ — величина внешней силы.

При построении математической модели электромагнитного преобразователя силы будем предполагать, что в выражении (2) амплитуду и период

возмущения можно представить суммой малых ступенчатых возмущений:

$$U_0(t) = \sum_{i=1}^n U_{0i}(t), \quad T(t) = \sum_{j=1}^m T_j(t).$$

При этом на изменение величины периода наложим следующее ограничение: будем полагать, что переходные процессы, обусловленные j -м скачком величины периода, заканчиваются к моменту наступления $(j+1)$ скачка величины периода. Тогда в силу линейности уравнения (1) можем записать:

$$Y = \sum_{i=1}^n Y_{1i}(t) + \sum_{j=1}^m Y_{2j}(t),$$

где $Y_{1i}(t)$ — реакция на i -е ступенчатое возмущение, обусловленное изменением амплитуды; $Y_{2j}(t)$ — реакция на j -е ступенчатое возмущение, обусловленное изменением величины периода.

Электромагнитная сила, действующая со стороны электромагнитов на взвешиваемое тело, определяется выражением [1]:

$$F_y(t) \cong \frac{Y^2}{2 \cdot \mu_0 \cdot w^2 \cdot S} = \frac{1}{4 \cdot \mu_0 \cdot w^2 \cdot S} \frac{U_m^2}{\omega^2} \cdot [1 - \cos 2(\omega \cdot t + \alpha_0 - \varphi)].$$

При наличии в системе демпфирования и вследствие того, что взвешиваемое тело инерционно, оно не реагирует на "быстроменяющиеся" периодические составляющие электромагнитной силы. Поэтому при анализе электромагнитного преобразователя силы необходимо выделить "медленноменяющиеся" составляющие уравнения (1). В выражении (1) параметр K в общем случае является переменной величиной и зависит от изменения величины индуктивности L . Однако изменение параметра K при соответствующем диапазоне изменения индуктивности, имеющем место в реальных системах, практически не влияет на динамику системы. Следовательно, параметр K в уравнении (1) можно считать постоянным. На всем диапазоне изменения величины T периода напряжения питания справедливо следующее соотношение: $\frac{2 \cdot \pi}{T} \gg K$.

Это допущение реализуется выбором соответствующего диапазона изменения величины периода питающего напряжения. Пусть напряжение, приложенное к обмоткам электромагнитов,

$$U(t) = U_m \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \gamma_0\right) \text{ и}$$

$$Y(0) = 0, \quad T = T_0, \quad \gamma_0 = 0, \quad U_m = U_0.$$

Тогда решение уравнения (1) можно записать в виде

$$Y(t) = \frac{U_0}{\sqrt{K^2 + \frac{4 \cdot \pi^2}{T_0^2}}} \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T_0} t - \varphi\right) + \frac{U_0}{\sqrt{K^2 + \frac{4 \cdot \pi^2}{T_0^2}}} \cdot \sin \varphi \cdot e^{-Kt}.$$

Или с учетом того, что $\frac{2 \cdot \pi}{T_0} \gg K$,

$$Y(t) = \frac{U_0 \cdot T_0}{2 \cdot \pi} \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T_0} t - \varphi\right) + \frac{U_0 \cdot T_0}{2 \cdot \pi} \cdot \sin \varphi \cdot e^{-Kt} = Y_1(t) + Y_2(t),$$

где $\varphi = \text{arctg} \frac{2 \cdot \pi}{T_0 \cdot K}$.

Первое слагаемое в этой формуле представляет установившийся режим, второе — определяет динамику системы. В общем случае, когда происходит одновременное изменение амплитуды и величины периода напряжения питания, магнитное потягосцепление может быть получено в виде:

$$Y(\tau) = Y_1(\tau) + Y_2(\tau), \tag{3}$$

где $Y_1(\tau) = \frac{U \cdot T}{2 \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \tau + \gamma - \varphi\right)$, U и T — текущие значения амплитуды и величины периода напряжения питания соответственно, γ — начальная фаза, а $Y_2(\tau)$ определяется из решения уравнения:

$$\dot{Y}_2(\tau) + K \cdot Y_2(\tau) = -\alpha \cdot \dot{U} - \beta \cdot \dot{T}, \tag{4}$$

где

$$\beta = \frac{U_0 \cdot \sin(\gamma'' - \varphi)}{2 \cdot \pi}, \quad \alpha = \frac{T_0 \cdot \sin(\gamma' - \varphi)}{2 \cdot \pi}, \tag{5}$$

$\dot{U} = \alpha \Delta U \delta(\tau)$, $\dot{T} = \alpha \Delta T \delta(\tau)$, $\delta(\tau)$ — импульсная дельта-функция, $\Delta U = \text{const}$, $\Delta T = \text{const}$,

$\gamma' = \frac{2\pi}{T_0} t'_0$, $\gamma'' = \frac{2\pi}{T_0} t''_0$, t'_0 и t''_0 — моменты времени

изменений амплитуды и периода напряжения питания соответственно, T_0 — начальное значение периода напряжения питания.

Мгновенная электромагнитная сила, действующая на взвешиваемое тело, определяется выражением

$$F_3(t) \cong \frac{\Psi^2}{2 \cdot \mu_0 \cdot w^2 \cdot S} = \frac{1}{4 \cdot \mu_0 \cdot w^2 \cdot S} \frac{U_m^2}{\omega^2} \cdot [1 - \cos 2(\omega \cdot t + \alpha_0 - \varphi)], \quad (6)$$

где U_m — амплитуда переменного напряжения питания; ω — частота напряжения питания; w — число витков измерительной обмотки; S — площадь полюса; μ_0 — магнитная проницаемость вакуума; ω — частота питания; α_0 — начальная фаза.

Выражение для среднего значения электромагнитной силы с учетом выражений (3), (4), (6) будет иметь вид

$$F_{\text{эсп}} = K_F \cdot \left[\frac{U^2 \cdot T^2}{8 \cdot \pi^2} + Y_2^2(\tau) \right], \quad (7)$$

где $T = 2\pi/\omega$ — величина периода напряжения питания.

Из выражения (7) следует, что первая составляющая среднего значения электромагнитной силы не зависит от величины начальной фазы γ . Составляющая $Y_2^2(\tau)$ зависит от начальной фазы γ . Коэффициенты α и β определяются выражениями (5) и содержат составляющую $\sin(\gamma - \varphi)$, которая в зависимости от фазы γ может принимать значения от -1 до 1 . Для исследования вопросов устойчивости при дальнейших расчетах будем рассматривать худший случай, когда $\sin(\gamma - \varphi) = \pm 1$. Знак в этом выражении не имеет значения, поскольку величина $\Psi(\tau)$ в выражении (6) стоит в квадрате.

Для дифференциального электромагнитного преобразователя силы

$$F_{\text{эсп}} = F_{\text{эсп1}} - F_{\text{эсп2}} = K_F \cdot \left[\frac{U_1^2 \cdot T_1^2}{8 \cdot \pi^2} - \frac{U_2^2 \cdot T_2^2}{8 \cdot \pi^2} + Y_{21}^2(\tau) - Y_{22}^2(\tau) \right].$$

Разлагая первые два слагаемых в ряд Тейлора в точках U_0, T_0 , получим, выражение для электромагнитной силы в виде:

$$F_{\text{эсп}} = a_1 \cdot \Delta T_1 - b_1 \cdot \Delta T_2 + a_2 \cdot \Delta U_1 - b_2 \cdot \Delta U_2 + a_3 \cdot Y_{21}^2 - b_3 \cdot Y_{22}^2, \quad (8)$$

где $a_1 = b_1 = K_F \cdot \frac{U_0^2 \cdot T_0}{4 \cdot \pi^2}$, $a_2 = b_2 = K_F \cdot \frac{U_0 \cdot T_0^2}{4 \cdot \pi^2}$, $a_3 = b_3 = K_F$.

В дальнейшем будем опускать перед переменными знак Δ , не забывая о том, что выражения записаны в отклонениях.

Подставив уравнение (8) в уравнение движения взвешиваемого тела (2), получим следующее выражение:

$$m \cdot \ddot{X} + \lambda \cdot \dot{X} = a_1 \cdot T_1 - b_1 \cdot T_2 + a_2 \cdot U_1 - b_2 \cdot U_2 + a_3 \cdot Y_{21}^2 - b_3 \cdot Y_{22}^2 + F_{\text{ен}}. \quad (9)$$

Вводя промежуточную переменную $X_1 = \dot{X}$ и добавив к уравнению (9) уравнение (4) для двух плеч дифференциальной схемы, получим систему уравнений, характеризующую дифференциальный электромагнитный преобразователь силы [1, 2]:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= X_1; \\ \dot{X}_1 &= -\frac{\lambda}{m} \cdot X_1 + \frac{a_1}{m} \cdot T_1 - \frac{b_1}{m} \cdot T_2 + \frac{a_2}{m} \cdot U_1 - \frac{b_2}{m} \cdot U_2 + \frac{a_3}{m} \cdot Y_{21}^2 - \frac{b_3}{m} \cdot Y_{22}^2 + \frac{F_{\text{вн}}}{m}; \\ \dot{Y}_{21} &= -K \cdot Y_{21} - \alpha_1 \cdot \dot{U}_1 - \beta_1 \cdot \dot{T}_1; \\ \dot{Y}_{22} &= -K \cdot Y_{22} - \alpha_2 \cdot \dot{U}_2 - \beta_2 \cdot \dot{T}_2, \end{aligned}$$

где α_1 и α_2 , β_1 и β_2 определяются выражениями (5). Причем отличие α_1 от α_2 и β_1 от β_2 будет обусловлено величиной начальной фазы для каждого из плеч дифференциальной схемы в момент приложения соответствующего возмущения; $U_1 = \text{const}$; $U_2 = \text{const}$; $F_{\text{вн}}$ — величина внешней силы.

Таким образом, построена математическая модель дифференциального электромагнитного преобразователя силы на переменном токе при изменении амплитуды и величины периода напряжения питания.

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАБОЧИМ ЗАЗОРОМ ПО ПЕРИОДУ ПИТАЮЩЕГО НАПРЯЖЕНИЯ

Задача синтеза оптимального управления на основе метода аналитического конструирования оптимальных регуляторов [3] предполагает, что объект описывается системой линейных дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{U} + \mathbf{D}(t) \cdot \mathbf{M}, \quad (10)$$

где \mathbf{X} — вектор фазовых координат, \mathbf{U} — вектор управлений, \mathbf{M} — вектор возмущений, $\mathbf{A}(t)$ — матрица динамических свойств системы, $\mathbf{B}(t)$ — матрица влияния управляющих воздействий, $\mathbf{D}(t)$ — матрица влияния возмущающих воздействий.

Интегральный квадратичный критерий имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} = \int_0^T & \left[\mathbf{X}^T(\tau) \cdot \mathbf{F}(\tau) \cdot \mathbf{X}(\tau) + \right. \\ & \left. + \mathbf{U}^T(\tau) \cdot \mathbf{Y}(\tau) \cdot \mathbf{U}(\tau) \right] d\tau + \\ & + \mathbf{X}^T(T) \cdot \mathbf{F}_1(T) \cdot \mathbf{X}(T), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\mathbf{F}(\tau)$, $\mathbf{F}_1(T)$ — неотрицательно определенные, а $\mathbf{Y}(T)$ — положительно определенная матрицы.

Оптимальное управление, минимизирующее критерий качества (11), можно найти по формуле:

$$\mathbf{U}_0 = -\mathbf{Y}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) [\mathbf{K}(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{G}(t)], \quad (12)$$

где матрица $\mathbf{K}(t)$ есть решение дифференциального уравнения Риккати

$$\begin{aligned} -\dot{\mathbf{K}} = & \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t) \cdot \mathbf{K} + \mathbf{F}(t) - \\ & - \mathbf{K} \cdot \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{Y}^{-1}(t) \cdot \mathbf{B}^T(t) \cdot \mathbf{K}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}(T) = \mathbf{F}(T);$$

\mathbf{G} — вектор решения линейного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{G}} = & [\mathbf{K}(t) \cdot \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{Y}^{-1}(t) \cdot \mathbf{B}^T(t) - \mathbf{A}^T(t)] \cdot \mathbf{G}(t) - \\ & - \mathbf{K}(t) \cdot \mathbf{D}(t) \cdot \mathbf{M}(t); \\ \mathbf{G}(T) = & 0. \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение оптимальной системы имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} = & [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{Y}^{-1}(t) \cdot \mathbf{B}^T(t) \cdot \mathbf{K}(t)] \cdot \mathbf{X} + \\ & + \mathbf{D}(t) \cdot \mathbf{M}(t) - \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{Y}^{-1}(t) \cdot \mathbf{B}^T(t) \cdot \mathbf{G}(t) = \\ = & \mathbf{A}_0(t) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{D}(t) \cdot \mathbf{M}(t) - \mathbf{D}(t) \cdot \mathbf{G}(t). \end{aligned}$$

Итеративный метод решения задачи состоит из ряда этапов.

1. Вычисляется матрица начального приближения $\mathbf{V}_{\text{нач}} = \mathbf{K}(0)$ путем решения дифференциального уравнения Риккати

$$-\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{K} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{K} + \mathbf{F},$$

где $\mathbf{K}(0)$ и $\mathbf{K}(T)$ — начальное ($t = 0$) и конечное ($t = T$) значения; $\mathbf{K}(T) = 0$.

1.1. Формируется расширенная матрица

$$\mathbf{A}_p = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{F} & -\mathbf{A}^T \end{vmatrix}.$$

1.2. Вычисляется матрица

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = \exp(\mathbf{A}_p \cdot H) \cong & \left(\mathbf{E} - \frac{H}{2} \cdot \mathbf{A}_p - \frac{H^2}{12} \cdot \mathbf{A}_p^2 \right)^{-1} \times \\ & \times \left(\mathbf{E} + \frac{H}{2} \cdot \mathbf{A}_p + \frac{H^2}{12} \cdot \mathbf{A}_p^2 \right), \end{aligned}$$

где шаг решения $H = \frac{T}{2^k}$, k — целое, выбирается в пределах $k = 5-20$.

1.3. Последовательно вычисляются:

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{A}_p 2H) = & \mathbf{C} \mathbf{C} = \mathbf{C}^2; \\ \exp(\mathbf{A}_p 2^2H) = & \mathbf{C}^2 \mathbf{C}^2 = \mathbf{C}^4; \\ \dots & \dots \\ \exp(\mathbf{A}_p 2^kH) = & \exp(\mathbf{A}_p T) = \mathbf{C}^{2^n}. \end{aligned}$$

1.4. Матрица $\exp(\mathbf{A}_p T)$ разбивается на четыре блока

$$\exp(\mathbf{A}_p T) = \mathbf{C}^{2^n} = \begin{vmatrix} \mathbf{P}_{11}(T) & \mathbf{P}_{12}(T) \\ \mathbf{P}_{21}(T) & \mathbf{P}_{22}(T) \end{vmatrix}.$$

1.5. Вычисляется матрица

$$\mathbf{K}(0) = -\mathbf{P}_{22}^{-1}(T) \cdot \mathbf{P}_{21}(T).$$

2. Вычисляются

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{V}_{\text{нач}}, \quad \mathbf{A}_0 = \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{L}_0.$$

При этом \mathbf{L}_0 выбирается так, чтобы матрица

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{L}_0$$

имела собственные значения с отрицательной действительной частью.

3. Решается линейное алгебраическое уравнение относительно \mathbf{V}_0 :

$$\mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{A}_0 = -\mathbf{C}_1,$$

где $\mathbf{C}_1 = \mathbf{L}_0^T \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{L}_0 + \mathbf{F}$ — положительно полуопределенная матрица.

Так как $\mathbf{V}_{\text{нач}} = \mathbf{K}(0)$, это уравнение является уравнением Ляпунова. Для его решения используем итеративный алгоритм [4], имеющий линейную сходимость. Можно показать, что $\mathbf{V}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{V}_{0k}$,

где

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{0(k+1)} = & (\mathbf{D}^T)^{2^k} \mathbf{V}_{0k} \cdot \mathbf{D}^{2^k} + \mathbf{V}_{0k}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \\ \mathbf{V}_{00} = & H \cdot \mathbf{C}_1; \end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = \left(\mathbf{E} - \frac{H}{2} \cdot \mathbf{A}_0 - \frac{H^2}{12} \cdot \mathbf{A}_0^2 \right)^{-1} \times \\ \times \left(\mathbf{E} + \frac{H}{2} \cdot \mathbf{A}_0 + \frac{H^2}{12} \cdot \mathbf{A}_0^2 \right).$$

Определение величины \mathbf{V}_0 производится аналогично первому этапу.

4. Зная величину \mathbf{V}_0 , по формулам

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{Y}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{V}_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots), \\ \mathbf{A}_k = \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

определяем $\mathbf{L}_1, \mathbf{A}_1$. Далее, используя формулы 3-го этапа, вычисляем \mathbf{V}_1 . Аналогично определяем $\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \dots, \mathbf{V}_k$. Вычисления прекращаем по достижении требуемой точности.

Поскольку возмущения, действующие на электромагнитный подвес, являются случайными и заранее их невозможно описать, будем проводить синтез без учета действия на систему внешних моментов. В этом случае функция $\mathbf{G}(t)$ в уравнении (12) равна нулю.

В функционале качества (11) выберем весовые матрицы \mathbf{F} и \mathbf{Y} стационарными и диагональными с коэффициентами

$$F_{ii} = \frac{1}{t_{\text{пер}} \cdot X_{i\text{max}}^2}, \quad Y_{jj} = \frac{1}{t_{\text{пер}} \cdot U_{j\text{max}}^2},$$

где $X_{i\text{max}}$ — максимальное допустимое отклонение i -й фазовой координаты от заданного положения, $U_{j\text{max}}$ — максимальное допустимое отклонение для j -го управления, $t_{\text{пер}}$ — среднее время регулирования.

Подставляя значения параметров исследуемого активного электромагнитного подвеса в выражения для элементов матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F}, \mathbf{Y}$ и производя необходимое масштабирование переменных, получим следующие выражения для этих матриц.

Согласно (12), оптимальный регулятор должен работать по закону $\mathbf{U}_0 = -\mathbf{Y}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{X}$, где матрица \mathbf{K} — решение матричного алгебраического уравнения Риккати

$$\mathbf{K}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{K} + \mathbf{F} - \mathbf{B} \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K} = 0.$$

Решение этого уравнения может быть осуществлено с помощью итерационного алгоритма.

Расширенная матрица \mathbf{A}_p , необходимая для вычисления начального приближения $\mathbf{K}(0)$, имеет вид

$$\mathbf{A}_p = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \cdot \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{B}^T \\ -\mathbf{F} & -\mathbf{A}^T \end{vmatrix}.$$

Обозначив $\mathbf{L} = -\mathbf{Y}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}$, где $\mathbf{L} = (\ell_{ij})$ — матрица коэффициентов усиления регулятора по цепям обратных связей, получим уравнение регулятора

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{L} \mathbf{X}. \quad (13)$$

Таким образом, оптимальное по квадратичному критерию управление предусматривает введение линейных обратных связей с коэффициентами (13) по всем фазовым координатам.

Расчеты, выполненные для конкретной системы управления, показали, что линейное управление для нелинейного объекта дает значительно худший результат, чем оптимальное линейное управление без учета нелинейности объекта. Из полученных результатов можно сделать вывод о том, что для достижения заданного качества регулирования и приближения качественных показателей нелинейной системы к качественным показателям линейной системы необходимо введение нелинейной коррекции закона (13). Задача синтеза в этом случае сводится к решению дифференциального уравнения в частных производных, для которого не существует общего решения. Однако можно искать пути приближенного решения этого уравнения.

— Для этого вначале необходимо решить задачу аналитического конструирования оптимального регулятора для линеаризованной модели электромагнитного подвеса:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U},$$

т.е. найти первое (линейное) приближение квазиоптимального управления

$$\mathbf{U}_n(t) = \mathbf{Y}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{K}(t) \cdot \mathbf{X}.$$

— Выполнить синтез оптимального линейного регулятора, вычисляя матрицу линейных обратных связей размером (1×3)

$$\mathbf{L} = -\mathbf{Y}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}.$$

— Затем уточнить оптимальное управление

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_n(t) + \mathbf{U}_h(t).$$

— После этого решается задача нахождения нелинейной составляющей

$$\mathbf{U}_h(t) = -\mathbf{Y}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{R} \times \\ \times \left\{ \mathbf{f}[\mathbf{X}(t)] - \frac{\partial \mathbf{f}[\mathbf{X}(t_0)]}{\partial \mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}(t) \right\}. \quad (14)$$

$$\mathbf{U}(t_0) = -\mathbf{Y}^{-1}(t_0) \cdot \mathbf{B}^T(t_0) \times \\ \times \left\{ \mathbf{K}[\mathbf{X}(t_0), t_0] \cdot \mathbf{X}(t_0) + \mathbf{e}[\mathbf{X}(t_0), t_0] \right\}$$

$$\varepsilon[\mathbf{X}(t_0)] = \mathbf{R} \cdot \left\{ \mathbf{f}[\mathbf{X}(t_0)] - \frac{\partial \mathbf{f}[\mathbf{X}(t_0)]}{\partial \mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}(t_0) \right\},$$

где t_0 — текущий момент времени; $\mathbf{X}(t_0)$ — измененные значения вектора состояния системы; \mathbf{R} — матрица размером $m \times n$.

Для получения решения $U_n(t)$ необходимо вычислить матрицу

$$\mathbf{R} = -(\mathbf{A}^T - \mathbf{K} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T)^{-1} \cdot \mathbf{K}$$

и сформировать матрицу нелинейных обратных связей размером (1×3)

$$\mathbf{N} = -\mathbf{Y}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{R}. \quad (15)$$

Для упрощения реализации получаемого регулятора в выражении (14) положим $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}} = 0$.

Нелинейная вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ для исследуемого активного электромагнитного подвеса с регулированием рабочего зазора по величине периода напряжения питания имеет вид

$$\mathbf{f}^T(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 0 & 284.3 \cdot X_3^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Матрица \mathbf{N} для определения нелинейных обратных связей (7) имеет вид:

$$\mathbf{N}^T = \begin{vmatrix} 2.95 \cdot 10^5 & 1.84 \cdot 10^2 & 0.122 \end{vmatrix}.$$

В этом случае для нелинейной коррекции линейного оптимального закона получаем выражение

$$U_n = -5.23 \cdot 10^4 \cdot X_3^2.$$

По результатам численного моделирования, выполненного для исследуемого подвеса, можно сделать вывод о том, что нелинейная квазиоптимальная коррекция позволяет приблизить качественные показатели нелинейной системы к качественным показателям линейной оптимальной системы при различных значениях начальных данных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В активном электромагнитном подвесе с регулированием рабочего зазора по величине периода напряжения питания информационной величиной является время, а в измерительном импульсном подвесе с регулированием рабочего зазора по частоте следования управляющих импульсов — частота. Это позволяет строить на базе таких подвесов высокоточные датчики первичной информации, легко согласующиеся с цифровым управляющим информационно-вычислительным комплексом. Разработанные в ГУАП информационные электромагнитные подвесы могут быть рекомендованы для использования в гравиметрах, гравитационных градиентометрах, гироскопах, прецизионных компенсационных датчиках давления и в других измерительных приборах в различных областях народного хозяйства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сапожников Г.А. Повышение эффективности гашения механических колебаний в электромагнитных подвесах // Датчики систем контроля и управления технологическими процессами. Ярославль: Ярославский политехнический институт, 1984. С. 64-68.
2. Богословский С.В. Теория и практика аэромагнитного моделирования (монография). СПб.: ГУАП, 1998. 140 с.
3. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов // Автоматика и телемеханика. 1969. Т. 21, № 4. С. 436-441; № 5. С. 561-568.
4. Колесников А.А. Принципы построения высококачественных систем квазиоптимального управления // В сб. "Методы построения алгоритмических моделей сложных систем": Вып. 1. Таганрог: ТРТИ, 1976. С. 166-167.

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Материал поступил в редакцию 24.04.2001.

OPTIMIZATION OF CONTROL OF MAGNETIC LEVITATION IN SENSORS

G. A. Sapozhnikov, S.V. Bogoslovsky

Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation

The results of development of sensors based on magnetic levitation are briefly described. The mathematical model of control of the power supply voltage period to change the operating clearance in a magnetic suspension is considered. To optimize control of a magnetically-suspended element the method of analytical design of regulators is utilized.