

УДК 534.23

© Б. П. Шарфарец

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ДИАГРАММНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ПОЛЯ РАССЕЙНИЯ В ОДНОРОДНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

Рассмотрена задача о дифракции акустической волны на рассеивателе конечных размеров, находящемся в полупространстве или в однородном волноводе с идеальными плоскими границами. Метод решения основывается на использовании амплитуды рассеяния тела. Приведена формула, позволяющая получить амплитуду рассеяния, отвечающую произвольной падающей волне, по амплитуде рассеяния тела, отвечающей плоским падающим волнам. Приведен алгоритм решения задачи о работе акустически непрозрачного излучателя в полупространстве с границей, характеризующей произвольным коэффициентом отражения. В качестве примера решена задача об излучении низкочастотных колебаний сферой с акустически мягкой границей вблизи акустически жесткой или мягкой границы полупространства. Далее рассмотрена задача о поле сферического излучателя с учетом дифракции на нем в идеальном акустическом волноводе. При этом используются результаты о дифракции на сферическом излучателе в полупространстве с идеальными границами. Показано, что результирующее поле формируется бесконечной суммой некоторых излучателей. Получены погрешности, к которым приводит ограничение их количества при расчетах. Приведены результаты численных расчетов поля сферы в идеальном волноводе с учетом и без учета рассеяния.

ВВЕДЕНИЕ

Библиография по задачам рассеяния весьма обширна. Упомянем лишь некоторые работы, имеющие отношение к рассеянию звука в акустических волноводах [1–13]. В работах [1–7] применяются численные, либо асимптотические методы решения. В работе [8] рассматривалась задача о рассеянии на двух сферах применительно к электродинамике. При этом там рассчитывается итоговая диаграмма рассеяния двух сфер. В работах [9, 10] ищется поле рассеяния сферы с абсолютно жесткой поверхностью, находящейся в однородном полупространстве. Рассеяние вызывается падением плоской волны. В работе [11] решается плоская задача рассеяния, сформулированная в виде регулярных интегральных уравнений. В работе [12] также исследуется двухмерная задача рассеяния на произвольном теле, находящемся вблизи импедансной границы. Задача решается методом граничных элементов. В работе [13] получено трехмерное решение задачи рассеяния на упругих телах, находящихся вблизи границы двух однородных полупространств, одно из которых жидкое, другое — упругое. Задача решается с применением метода Т-матриц, который, несмотря на свою громоздкость, все же носит приближенный характер.

В настоящей работе для решения задач рассеяния в ограниченных средах используется метод диаграммных функций, изложенный, например, в работах [14–16]. Приведен алгоритм решения за-

дачи о работе акустически непрозрачного излучателя в полупространстве с границей, характеризующей произвольным коэффициентом отражения. Далее на основе решения задачи в полупространстве решена задача о суммарном поле в однородном волноводе, ограниченном поверхностью и дном. В качестве примера решена задача об излучении низкочастотных колебаний сферой с акустически мягкой поверхностью вблизи акустически жесткой или мягкой границы полупространства, а также в волноводе.

РАССЕИВАТЕЛЬ В БЕЗГРАНИЧНОМ ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Вначале рассмотрим задачи о стационарном рассеянии на объемном и поверхностном рассеивателях в R^3 . Пусть задана ограниченная область $E \subset R^3$ с границей $\partial E = S$. Объемный рассеиватель определяется возмущением показателя преломления внутри области E (для упрощения изложения полагаем, что плотность среды в E постоянна и совпадает с плотностью среды окружающего однородного пространства R^3). Поверхностный рассеиватель будем характеризовать граничными условиями на S .

Полное поле U представим в виде суммы падающего U_0 и рассеянного U_S полей. Источником падающего поля может служить либо излучатель, сосредоточенный в области B , не совпадающей в общем случае с областью E , либо плоская

волна, приходящая из бесконечности [17, 18]. Например, в случае объемного рассеивателя, когда источником падающего поля служит излучатель с объемной плотностью F , $\text{supp}(F) = B$, справедливо следующее выражение (когда $F = 0$, источником падающего поля служит приходящая из бесконечности плоская волна):

$$\Delta U + k^2 U = -V(\mathbf{x})U + F, \quad \mathbf{x} \in R^3, \quad \text{supp}(V) = E, \quad \text{supp}(F) = B, \quad (1)$$

$$U_S(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad \frac{\partial U_S}{\partial |\mathbf{x}|} - jkU_S = o(|\mathbf{x}|^{-1}) \quad \text{при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Здесь $V(\mathbf{x}) = k^2(n^2 - 1)$, где n — показатель преломления в области E ; в области $R^3 \setminus E$ $n(\mathbf{x}) \equiv 1$; k — волновое число.

Падающее поле U_0 может условию (2) и не удовлетворять (например, плоская волна). Аналогично для поверхностного рассеивателя, когда источником падающего поля служит плоская волна, приходящая из бесконечности, имеем:

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad \mathbf{x} \in R^3 \setminus E, \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} = \alpha(\mathbf{x}); \quad U(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad (4)$$

причем U_S вновь удовлетворяет (2). Здесь функции $\alpha(\mathbf{x})$ и $\beta(\mathbf{x})$ связаны интегральным уравнением, следующим из формулы Кирхгофа [17]

$$\beta(\mathbf{x}) = \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \alpha(\mathbf{y}) - \beta(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} dS(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S,$$

где G определено ниже.

Решение задачи (1)–(2) при $F \equiv 0$ может быть представлено (с помощью формулы Грина) в виде [17]

$$U(\mathbf{x}) = U_0(\mathbf{x}) + \int_E V(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) U(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in R^3. \quad (5)$$

Решение задачи (2)–(4) допускает представление в виде (см. [17])

$$U(\mathbf{x}) = U_0(\mathbf{x}) + \int_S \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial U(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} - U(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \right] dS(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \notin E. \quad (6)$$

В (5), (6) $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\exp(jk|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$, \mathbf{n} — внутрен-

няя нормаль к S . Выражения (5), (6) представляют собой интегральные уравнения для нахождения результирующего поля $U(\mathbf{x})$. Из (5), (6), используя технику, изложенную в [14], можно выразить поле рассеяния через функцию T_i :

$$U_S^i(\mathbf{x}) = \frac{j}{2\pi} \int_{R^2} \frac{T_i(\boldsymbol{\xi})}{\alpha(\boldsymbol{\xi})} \exp(j\mathbf{k}_i \mathbf{x}) d\boldsymbol{\xi}, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Здесь $i = 1$ для верхнего и $i = 2$ для нижнего полупространств, $\boldsymbol{\xi} = (k_x, k_y) \in R^2$, $\mathbf{k}_i = (k_x, k_y, (-1)^i \alpha(k_x, k_y))$; $d\boldsymbol{\xi} = dk_x, dk_y$, $\alpha(k_x, k_y) = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$, причем рассматривается та ветвь корня, для которой $\text{Re}(\alpha) \geq 0$.

T_i можно определить с помощью формул:

$$T_i(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi} \int_E V(\mathbf{x}) U(\mathbf{x}) \exp(-j\mathbf{k}_i \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (8)$$

$$T_i(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{\partial U(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} + j(\mathbf{k}_i \mathbf{n}) U(\mathbf{y}) \right] \times \exp(-j(\mathbf{k}_i \mathbf{y})) dS(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in S \quad (9)$$

— соответственно для объемного рассеивателя и для поверхностного.

В теории рассеяния функцию T_i , определенную в области $|\boldsymbol{\xi}| \in [0, k]$ (так называемая область видимости, когда угол падения $\theta \in [0, \pi]$), называют амплитудой рассеяния, либо диаграммой рассеяния (см., например, [17, 18]). Функцию T_i , определенную в области $|\boldsymbol{\xi}| \in [0, \infty)$ (угол падения $\theta \in [0, \frac{\pi}{2} - j\infty)$) также будем называть амплитудой рассеяния (ар).

Необходимость расширения области определения функции следует из (7). Расширение области определения ар рассеивателя до $|\boldsymbol{\xi}| \in [0, \infty)$, что эквивалентно $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} - j\infty\right]$ ($\varphi \in [0, 2\pi]$ в полярной системе координат), необходимо для корректного описания поля рассеяния (7). Естественно, T_i зависит от падающей волны. В этом смысле особый интерес представляет ар, отвечающая плоской падающей волне, так как ар рассеивателя, отвечающая произвольной падающей волне, может быть выражена через диаграммную функцию (ДФ) падающей волны и ар рассеивателя, отвечающие плоским падающим волнам. Чтобы показать это, рассмотрим в качестве падающей волну $U_0 = \exp(j(\mathbf{k}_{pm} \mathbf{x}))$ (это амплитуда плоской волны, фронт которой нормален к вектору \mathbf{k}_{pm}). Здесь индекс p отмечает то, что это па-

дающая волна, индекс m соответствует направлению распространения этой волны по отношению к оси Oz : если плоская волна распространяется в сторону увеличения z , то $m = 1$, если в сторону уменьшения, то $m = 2$. Ясно, что $\mathbf{k}_{p1} = (\boldsymbol{\xi}_p, \alpha_p)$, $\mathbf{k}_{p2} = (\boldsymbol{\xi}_p, -\alpha_p)$. Таким образом, волна U_0 , характеризующаяся вектором \mathbf{k}_{p1} , падает на рассеиватель сверху вниз (ось Oz направлена вниз), а вектором \mathbf{k}_{p2} — снизу вверх.

Ар, отвечающую волне U_0 , обозначим $T_i^m(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_s)$ (аналогичную функцию в квантовой механике называют матрицей рассеяния [19, с. 893]). Таким образом, $T_i^m(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_s)$ есть ар в случае, когда падающая волна характеризуется вектором \mathbf{k}_{pm} , а рассеянная волна рассматривается в полупространстве, лежащем выше ($i = 1$), либо ниже ($i = 2$) рассеивателя в R^3 .

Рассеянные плоские волны характеризуются векторами $\mathbf{k}_{s1} = (\boldsymbol{\xi}_s, -\alpha_s)$, $\mathbf{k}_{s2} = (\boldsymbol{\xi}_s, \alpha_s)$ соответственно для верхнего и нижнего полупространств в R^3 относительно рассеивателя (отметим, что в (8) фигурируют именно эти векторы). С физической точки зрения смысл функции T_i^m таков: когда на вход системы поступает волна с вектором \mathbf{k}_p , на выходе образуется сумма плоских волн с векторами \mathbf{k}_s .

Представим произвольное падающее поле источника, находящегося в начале координат, через дф источника D_m [14]:

$$U_{0m}(\mathbf{x}) = \frac{j}{2\pi} \int_{R^2} \frac{D_m(\boldsymbol{\xi})}{\alpha(\boldsymbol{\xi})} \exp(j(\mathbf{k}_m \mathbf{x})) d\boldsymbol{\xi}, \quad m = 1, 2. \quad (10)$$

Введем операторы:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^v U &= \int_E V(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) U(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \\ \mathbf{A}^s U &= \int_S \left[\frac{\partial U(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - U(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} \right] ds(\mathbf{y}), \\ \mathbf{B}_i^v U &= \frac{1}{4\pi} \int_E V(\mathbf{y}) U(\mathbf{y}) \exp(-j(\mathbf{k}_i \mathbf{y})) d\mathbf{y}, \\ \mathbf{B}_i^s U &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{\partial U(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} j(\mathbf{k}_i \mathbf{n}(\mathbf{y})) U(\mathbf{y}) \right] \exp(-j(\mathbf{k}_i \mathbf{y})) ds(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Верхние индексы v и s указывают на рассматриваемый тип рассеяния — объемное или поверхностное соответственно. Из (5)–(6) имеем (индексы v, s опускаем): $(\mathbf{I} - \mathbf{A})U = U_0$, тогда $U = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} U_0$, причем оператор $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ является интегральным, и свойства его ядра допускают последующие операции. Здесь \mathbf{I} единичный

оператор. Из (8)–(9) следует, что

$$T_i = \mathbf{B}_i U = \mathbf{B}_i (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} U_0. \quad (11)$$

Теперь, воспользовавшись представлением (10) для U_0 , получим:

$$T_i(\boldsymbol{\xi}_s) = \frac{j}{2\pi} \int_{R^2} \frac{D_m(\boldsymbol{\xi}_p)}{\alpha(\boldsymbol{\xi}_p)} \mathbf{B}_i (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \exp(j\mathbf{k}_{pm} \mathbf{x}) d\boldsymbol{\xi}_p,$$

но из (11) следует, что $T_p^m(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_s) = \mathbf{B}_i (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \exp(j\mathbf{k}_{pm} \mathbf{x})$, значит:

$$T_i(\boldsymbol{\xi}_s) = \frac{j}{2\pi} \int_{R^2} \frac{D_m(\boldsymbol{\xi}_p)}{\alpha(\boldsymbol{\xi}_p)} T_i^m(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_s) d\boldsymbol{\xi}_p, \quad i, m = 1, 2. \quad (12)$$

Отсюда видно, что матрица рассеяния имеет в теории рассеяния то же значение, что и функция Грина в теории линейных краевых задач. Если функция Грина есть поле точечных источников и по ней можно восстановить поле произвольного источника, то матрица рассеяния есть ар рассеивателя, отвечающая плоским падающим волнам, и по ней можно определить ар рассеяния произвольной падающей волны.

После того как ар рассеивателя, отвечающая данной падающей волне, найдена, поле рассеяния может быть получено из (7), но проще воспользоваться разложением поля по степеням $1/(kR)$ (см. [15]):

$$U_s(\mathbf{x}) = \frac{\exp(jkR)}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n'(\vartheta, \varphi)}{(kR)^n}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} T_0'(\pi - \vartheta, \varphi) &= T_1(\boldsymbol{\xi}), \\ T_0'(\vartheta, \varphi) &= T_2(\boldsymbol{\xi}), \\ \boldsymbol{\xi} &= (k \sin \vartheta \cos \varphi, k \sin \vartheta \sin \varphi), \\ \vartheta &\in [0, \pi/2 - j\infty], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \end{aligned} \quad (14)$$

(R, ϑ, φ) — полярные координаты точки \mathbf{x} .

T_n' для $n > 0$ получаются из T_0' с помощью рекуррентного соотношения (см. [15]).

ПОЛЕ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Применим рассмотренную технику для решения задачи рассеяния в полупространстве. Пусть в однородное полупространство помещен акустически непрозрачный излучатель, заданный областью E , диаграммной функцией $D_i(\boldsymbol{\xi})$ и матрицей рассеяния $T_i^m(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_s)$. Отражающая грани-

ца $z = 0$ характеризуется коэффициентом отражения $V(\boldsymbol{\xi})$. Источник E излучает волну U_0 . Обозначим U_0^i сужение U_0 на Ω_i , $i = 1, 2$, ($\Omega_1 = \{(x, y) \in R^2, z \leq z_0\}$, ($\Omega_2 = \{(x, y) \in R^2, z \geq z_0\}$, z_0 — ордината центра сферы.

U_0^i могут быть выражены через $D_i(\boldsymbol{\xi})$ (см. [17]):

$$U_0^i(\mathbf{x}) = \frac{j}{2\pi} \int_{R^2} \frac{D_i(\boldsymbol{\xi}) \exp(j(-1)^i \alpha(\boldsymbol{\xi})(z - z_0))}{\alpha(\boldsymbol{\xi})} \exp(j\boldsymbol{\xi}\mathbf{r}) d\boldsymbol{\xi}, \quad i=1, 2. \quad (15)$$

Здесь $\mathbf{x} = (z, \mathbf{r})$; $\mathbf{r} = (r, \varphi)$.

Фазовая добавка $\exp(j(-1)^i \alpha(\boldsymbol{\xi})(z - z_0))$ обусловлена тем, что D_i рассчитана для положения излучателя с началом координат в $\mathbf{x}_0 = (0, 0, z_0)$ [14]. Прямая волна U_0^2 не вызовет рассеянной волны, так как она сразу уходит от источника в нижнее полупространство Ω_2 . Другое дело — волна U_0^1 . Дойдя до границы $z = 0$, она отражается и идет вниз в Ω_2 , вызвав попутно рассеянные на E волны, идущие вверх (в Ω_1) и вниз (в Ω_2). Первичная рассеянная вверх волна отражается от границы $z = 0$, идет вниз, вызывая вторичное рассеяние вверх и вниз, и так далее. Для того чтобы найти поле в Ω_i , $i = 1, 2$, необходимо просуммировать все многократно рассеявшиеся на E и отразившиеся от границы волны.

Введем операторы

$$A_2^i[D_1](\boldsymbol{\xi}_s) = \int_{R^2} T_2^i(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_s) \times \exp(2j\alpha(\boldsymbol{\xi}_p)z_0)V(\boldsymbol{\xi}_p) \frac{D_1(\boldsymbol{\xi}_p)}{\alpha(\boldsymbol{\xi}_p)} d\boldsymbol{\xi}_p. \quad (16)$$

Здесь $T_2^i(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_s)$ — матрица рассеяния излучателя E в случае, когда плоская волна падает сверху вниз на E и рассеивается вверх ($i = 1$) либо вниз ($i = 2$). Суммируя все многократно рассеянные волны, нетрудно получить результирующее поле в Ω_i в виде:

$$U^1(\mathbf{x}) = \frac{j}{2\pi} \int_{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} (A_2^1)^n [D_1](\boldsymbol{\xi}_s) [\exp(-j(z - z_0)\alpha(\boldsymbol{\xi}_s)) + V(\boldsymbol{\xi}_s) \exp(j(z + z_0)\alpha(\boldsymbol{\xi}_s))] \frac{\exp(j\boldsymbol{\xi}_s\mathbf{r})}{\alpha(\boldsymbol{\xi}_s)} d\boldsymbol{\xi}_s, \quad (17)$$

$\mathbf{x} \in \Omega_1.$

$$U^2(\mathbf{x}) = \frac{j}{2\pi} \int_{R^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (A_2^2)^n [D_1](\boldsymbol{\xi}_s) V(\boldsymbol{\xi}_s) \times \exp(j(z + z_0)\alpha(\boldsymbol{\xi}_s)) + \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_2^2 (A_2^1)^n [D_1](\boldsymbol{\xi}_s) + D_2(\boldsymbol{\xi}_s) \right] \times \exp(j(z - z_0)\alpha(\boldsymbol{\xi}_s)) \right\} \frac{\exp(j\boldsymbol{\xi}_s\mathbf{r})}{\alpha(\boldsymbol{\xi}_s)} d\boldsymbol{\xi}_s, \quad (18)$$

$\mathbf{x} \in \Omega_2.$

Операторные ряды в (17), (18) сходятся, если норма оператора A_2^1 меньше единицы, что всегда имеет место при наличии сколь угодно малого затухания.

Введем обозначения:

$$\tilde{T}_1(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_2^1)^n [D_1](\boldsymbol{\xi}), \quad \tilde{T}_2(\boldsymbol{\xi}) = A_2^2 [\tilde{T}_1](\boldsymbol{\xi}). \quad (19)$$

Сворачивая операторный ряд Неймана в (19), имеем

$$\tilde{T}_1(\boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{I} - A_2^1)^{-1} [D_1](\boldsymbol{\xi}). \quad (20)$$

Обращая (20), получим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$(\mathbf{I} - A_2^1)[\tilde{T}_1](\boldsymbol{\xi}) = D_1(\boldsymbol{\xi}), \quad (21)$$

которое может быть разрешено стандартными средствами. С учетом (19) перепишем (17), (18) в более компактном виде:

$$U^1(\mathbf{x}) = \frac{j}{2\pi} \int_{R^2} \tilde{T}_1(\boldsymbol{\xi}_s) [\exp(-j(z - z_0)\alpha(\boldsymbol{\xi}_s)) + V(\boldsymbol{\xi}_s) \exp(j(z + z_0)\alpha(\boldsymbol{\xi}_s))] \frac{\exp(j\boldsymbol{\xi}_s\mathbf{r})}{\alpha(\boldsymbol{\xi}_s)} d\boldsymbol{\xi}_s, \quad (22)$$

$$U^2(\mathbf{x}) = \frac{j}{2\pi} \int_{R^2} [\tilde{T}_1(\boldsymbol{\xi}_s) V(\boldsymbol{\xi}_s) \exp(j(z + z_0)\alpha(\boldsymbol{\xi}_s)) + (\tilde{T}_2(\boldsymbol{\xi}_s) + D_2(\boldsymbol{\xi}_s)) \exp(j(z - z_0)\alpha(\boldsymbol{\xi}_s))] \times \frac{\exp(j\boldsymbol{\xi}_s\mathbf{r})}{\alpha(\boldsymbol{\xi}_s)} d\boldsymbol{\xi}_s. \quad (23)$$

Как видно из (22), (23), введенные функции T_i можно трактовать как дф некоторого эквивалентного данному прозрачного излучателя. По структуре (22), (23) видно, что поле формируется действительным и мнимым источниками. Совпадение с классическим видом будет полным, если в част-

ном случае принять $D_1 \equiv D_2$, $\mathbf{A}_2^2 = \mathbf{A}_2^1$. Тогда, как видно из (18), предэкспонента при $\exp(j(z - z_0)\alpha)$ превратится в T_1 . Если теперь применить метод построения рядов типа (13), изложенный в [15], то получим поле в рассматриваемом полупространстве в виде

$$U_s(\mathbf{x}) = \frac{\exp(jkR)}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{1,n}(\vartheta, \varphi)}{(kR)^n} + \frac{\exp(jkR')}{R'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{2,n}(\vartheta', \varphi')}{(kR')^n}. \quad (24)$$

Здесь

$$D_{1,0}(\pi - \vartheta, \varphi) = \tilde{T}_1(\boldsymbol{\xi}),$$

$$D_{1,0}(\vartheta, \varphi) = \tilde{T}_2(\boldsymbol{\xi}) + D_2(\boldsymbol{\xi}),$$

$$D_{2,0}(\vartheta, \varphi) = \tilde{T}_1(\boldsymbol{\xi})V(\boldsymbol{\xi}),$$

$$\vartheta, \vartheta' \in [0, \frac{\pi}{2} - j'\infty], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Старшие члены определяются из рекуррентного соотношения

$$D_{1,n+1}(\vartheta, \varphi) = \frac{\Delta_{\vartheta, \varphi} + n(n+1)}{2j(n+1)} D_{1,n}(\vartheta, \varphi),$$

$$\Delta_{\vartheta, \varphi} = \frac{1}{\sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right] + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right).$$

Координаты (R, ϑ, φ) и $(R', \vartheta', \varphi')$ характеризуют положение \mathbf{x} относительно действительного и мнимого источников.

Вычислим поле в следующем простом случае. В однородном полупространстве с плоской границей, характеризующейся коэффициентом отражения $V(\boldsymbol{\xi}) \equiv 1$ (жесткая) либо $V(\boldsymbol{\xi}) \equiv -1$ (мягкая), находится сфера радиуса R_0 с центром в точке $\mathbf{x}_0 = (0, 0, z_0)$, на поверхности которой выполняется однородное условие Дирихле. Кроме того, плотность источников звука, равномерно распределенных на поверхности сферы, такова, что $D_1 = D_2 \equiv 1$. Матрица рассеяния такой сферы в низкочастотном приближении (с точностью до $O(k^3)$) в полярных координатах выглядит следующим образом [17, с. 86]:

$$T(\vartheta, \varphi, \vartheta_0, \varphi_0) = A + B(\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)), \quad (25)$$

$$A = R_0 + \frac{2}{3}k^2 R_0^3 + jkR_0^2, \quad B = -k^2 R_0^3.$$

Подставляя (16) в (21) и переходя к сферической системе координат, приходим к следующему интегральному уравнению:

$$-\tilde{T}_1(\vartheta, \varphi) \pm \pm k \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2} - j'\infty} [A + B(-\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0) \times \times \cos(\varphi - \varphi_0)] \times \exp(j2k \cos \vartheta_0 z_0) \times \times \sin \vartheta_0 \tilde{T}_1(\vartheta_0, \varphi_0) d\vartheta_0 d\varphi_0 = -1. \quad (26)$$

Здесь знаком минус перед $\cos \vartheta$ учитывается тот факт, что рассматривается матрица рассеяния T_2^1 ; знаки перед интегралом соответствуют жесткому (верхний знак) и мягкому (нижний знак) дну. Отметим, что (26) есть интегральное уравнение с вырожденным ядром. Следовательно, решения необходимо искать в виде [18]:

$$\tilde{T}_1(\vartheta, \varphi) = 1 + a_1 + a_2 \cos \vartheta + a_3 \sin \vartheta \cos \varphi + a_4 \sin \vartheta \sin \varphi, \quad (27)$$

$$\tilde{T}_1(\vartheta, \varphi) = 1 - c_1 - c_2 \cos \vartheta - c_3 \sin \vartheta \cos \varphi - c_4 \sin \vartheta \sin \varphi. \quad (27')$$

Здесь a_i характеризуют жесткую, а c_i мягкую границы соответственно. Коэффициенты a_i , c_i , $i = 1, \dots, 4$, находятся из системы линейных алгебраических уравнений, получаемой из (26) стандартным образом. Окончательное решение имеет вид

$$a_1 = \left(2\pi k A \frac{e^\alpha}{\alpha} + \frac{(2\pi k)^2}{\alpha^4} A B e^{2\alpha} \right) / Z_a, \\ c_1 = \left(2\pi k A \frac{e^\alpha}{\alpha} - \frac{(2\pi k)^2}{\alpha^4} A B e^{2\alpha} \right) / Z_c, \\ a_2 = \frac{2\pi k}{\alpha^2} B e^\alpha (1 - \alpha) / Z_a, \\ c_2 = \frac{2\pi k}{\alpha^2} B e^\alpha (1 - \alpha) / Z_c, \\ Z_a = 1 - \frac{2\pi k}{\alpha} A e^\alpha + \frac{2\pi k B}{\alpha^3} e^\alpha (\alpha^2 - 2\alpha + 2) - \frac{(2\pi k)^2}{\alpha^4} A B e^{2\alpha}, \\ Z_c = 1 + \frac{2\pi k}{\alpha} A e^\alpha - \frac{2\pi k B}{\alpha^3} e^\alpha (\alpha^2 - 2\alpha + 2) - \frac{(2\pi k)^2}{\alpha^4} A B e^{2\alpha}, \\ a_3 = c_3 = a_4 = c_4 = 0, \quad \alpha = 2jkz_0. \quad (28)$$

Коэффициенты a_3, c_3, a_4, c_4 обращаются в нуль точно, что является следствием азимутальной симметрии задачи. Подставляя выражения для a_1, a_2, c_1, c_2 в (27) получаем низкочастотное приближение для ар \tilde{T}_1 ; функция \tilde{T}_2 может быть вычислена из (19) через \tilde{T}_1 следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_2(\vartheta) = & \\ & \frac{\pi}{2} - j\infty \\ & 2\pi k \int_0^{\frac{\pi}{2} - j\infty} (A + B \cos \vartheta \cos \vartheta_0) \exp(\alpha \cos \vartheta_0) \times \\ & \times \sin \vartheta_0 \tilde{T}_1(\vartheta_0) d\vartheta_0. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь все члены, содержащие угол φ , как и выше, равны нулю вследствие азимутальной симметрии задачи. Вычисление (29) дает

$$\begin{aligned} \tilde{T}_2(\vartheta) &= a_1 - a_2 \cos(\vartheta) \text{ (жесткое дно),} \\ \tilde{T}_2(\vartheta) &= -c_1 + c_2 \cos(\vartheta) \text{ (мягкое дно).} \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляя (27) и (30) с учетом (28) в (24), получим полное поле. При этом следует учесть, что:

$$\begin{aligned} D_{1,0}(\pi - \vartheta) &= \tilde{T}_1(\vartheta), \\ D_{1,0}(\vartheta) &= \tilde{T}_2(\vartheta) + 1, \\ D_{2,0}(\vartheta) &= \tilde{T}_1(\vartheta) V(\vartheta), \\ \vartheta &\in [0, \pi/2]. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь $V(\vartheta) \equiv 1$ либо $V(\vartheta) \equiv -1$ соответственно для абсолютно жесткой и мягкой границ.

Полученные выше результаты можно интерпретировать следующим образом. Эффект рассеяния на излучателе вследствие наличия границы полупространства можно свести к ситуации, когда рассеяния нет, но есть некий источник, совмещенный с исходным, в точности определяющий вне исходного излучателя поле рассеяния. Таким образом, реальный источник, вызывающий прямое и рассеянное поля, заменяется двумя источниками, рассеяние на которых отсутствует, но поле, ими созданное вне исходного излучателя, в точности описывает реальное поле. Источники эти будем характеризовать дф в свободном пространстве $D^0(\vartheta)$ для источника первичных волн и ар $D^1(\vartheta)$ для фиктивного источника рассеянных волн. Тогда результирующее поле вне излучателя-рассеивателя полностью описывается эквивалентным источником с дф $D(\vartheta) = D^0(\vartheta) + D^1(\vartheta)$. Для рассмотренного случая из (27), (30) имеем: $D^0(\vartheta) \equiv 1$, а $D^1(\vartheta)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} D_0^1(\vartheta) &= \begin{cases} -c_1 - c_2 \cos(\pi - \vartheta), \\ -c_1 + c_2 \cos(\vartheta), \end{cases} \\ \vartheta &\in [0, \pi/2 - j\infty) \\ &\text{(мягкая граница),} \\ D_1^1(\vartheta) &= \begin{cases} a_1 + a_2 \cos(\pi - \vartheta), \\ a_1 - a_2 \cos(\vartheta), \end{cases} \\ \vartheta &\in [0, \pi/2 - j\infty) \\ &\text{(жесткая граница).} \end{aligned} \quad (32)$$

ПОЛЕ В ИДЕАЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ С ГРАНИЦАМИ

Рассмотрим далее задачу о суммарном поле описанной выше сферы в идеальном акустическом волноводе глубины H с идеально мягкой поверхностью и жестким дном. В точной постановке такая задача может решаться, аналогично тому как решалась для полупространства, — необходимо просуммировать все многократно отраженные от границ и рассеянные на сфере плоские волны. Однако в настоящей работе решение будет получено несколько иначе.

Влияние только одной, допустим верхней, границы сводится к образованию эквивалентного источника рассеянных волн с ар $D_0^1(\vartheta)$. Аналогично нижняя граница приводит к возникновению еще одного эквивалентного источника с амплитудой рассеяния $D_1^1(\vartheta)$, которая также может быть получена по описанной выше методике. Здесь и далее нижние индексы 0 и 1 характеризуют происхождение функции D — вследствие влияния поверхности (0) либо дна (1). Поле в волноводе теперь будет описывать результирующий излучатель с дф $D(\vartheta) = D^0(\vartheta) + D_0^1(\vartheta) + D_1^1(\vartheta) = D^0 + D^1$. Но далее возникает цепная реакция. Источники с ар D_0^1 и D_1^1 сами теперь следует рассматривать как источники первичных волн, которые также вызовут рассеяние на исходном (реальном) излучателе. D_0^1 создаст источники D_{00}^2 и D_{01}^2 , а источник D_1^1 — соответственно D_{10}^2 и D_{11}^2 . Верхний индекс (в данном случае 2) равен количеству участков границ в формировании данной ар начиная с первичного поля. В свою очередь, $D_{00}^2, D_{01}^2, D_{10}^2$ и D_{11}^2 создадут источники соответственно D_{000}^3 и D_{001}^3, D_{010}^3 и D_{011}^3, D_{100}^3 и D_{101}^3, D_{110}^3 и D_{111}^3 . И так далее, на каждой итерации количество источников будет нарастать. Дф суммарного источника, таким образом, определяется рядом (аргументы опущены)

$$D = D^0 + D_0^1 + D_1^1 + D_{00}^2 + D_{01}^2 + D_{10}^2 + D_{11}^2 + D_{000}^3 + D_{001}^3 + D_{010}^3 + D_{011}^3 + D_{100}^3 + D_{101}^3 + D_{110}^3 + D_{111}^3 + \dots = D^0 + D^1 + D^2 + D^3 + \dots \quad (33)$$

Из физических соображений ясно, что ряд (33) должен сходиться. Остается выяснить лишь скорость его сходимости в каждом конкретном случае, после чего ограничиться конечной суммой ряда (33). Далее поле в волноводе с учетом рассеяния может быть рассчитано с помощью техники, описанной в работах [14, 20]. При этом в качестве дф источника должна фигурировать функция $D(\vartheta)$ из (33). Применительно к случаю рассматриваемого идеального волновода с учетом азимутальной симметрии задачи рассеяния выражение для поля направленного излучателя имеет вид [14, 20]

$$U(\mathbf{r}, z) \approx \frac{1}{H} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_1(\theta_n) e^{j\frac{2n-1}{2H}\pi z_0} - D_2(\theta_n) e^{-j\frac{2n-1}{2H}\pi z_0}}{\sqrt{\zeta_n}} \times \sin\left(\frac{2n-1}{2H}\pi z\right) e^{j\left(\zeta_n r - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (34)$$

Здесь H — глубина волновода, ζ_n — собственные значения поперечной краевой задачи, $\theta_n = \arctg\left(\zeta_n / \frac{2n-1}{2H}\pi\right)$ — характеристические углы падения нормальных волн, $D_1(\theta) = D(\pi - \theta)$, $D_2(\theta) = D(\theta)$, $\theta \in [0, \pi/2 - j\infty)$, $D(\theta)$ определяется из (33). Отметим, что область определения функции $D(\theta)$ равна [14]: $\theta \in [0, \pi/2 - j\infty)$ и $\theta \in (\pi/2 + j\infty, \pi]$; z, z_0 — глубина приемника и источника соответственно.

Итак, пусть в идеальном волноводе на глубине z_0 находится излучатель с дф $D^0 \equiv 1$ в виде описанной выше сферы. Тогда, согласно полученным выше результатам, имеем

$$D_0^1(\theta) = \begin{cases} -c_1 - c_2 \cos(\pi - \theta), \\ -c_1 + c_2 \cos(\theta), \end{cases} \quad (35)$$

$\theta \in [0, \pi/2 - j\infty)$
(влияние поверхности);

$$D_1^1(\theta) = \begin{cases} a_1 - a_2 \cos(\pi - \theta), \\ a_1 + a_2 \cos(\theta), \end{cases} \quad (36)$$

$\theta \in [0, \pi/2 - j\infty)$
(влияние дна).

Здесь константы определяются из (28), где c_1, c_2 вычисляются при $\alpha = 2jkz_0$, а a_1, a_2 вычисляются

при $\alpha = 2jk(H - z_0)$. Тогда для суммарной дф $D_0^1 + D_1^1$ имеем

$$D^1(\theta) = D_0^1(\theta) + D_1^1(\theta) = \begin{cases} (a_1 - c_1) - (a_2 + c_2) \cos(\pi - \theta), \\ (a_1 - c_1) + (a_2 + c_2) \cos \theta, \end{cases} \quad (37)$$

$\theta \in [0, \pi/2 - j\infty)$.

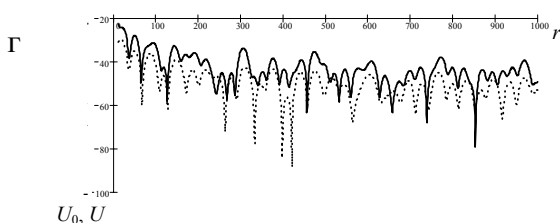
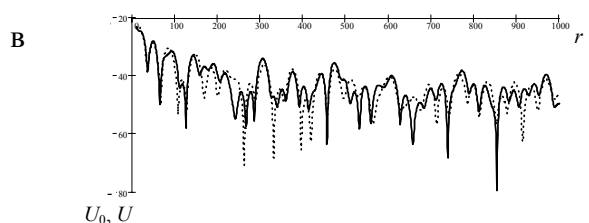
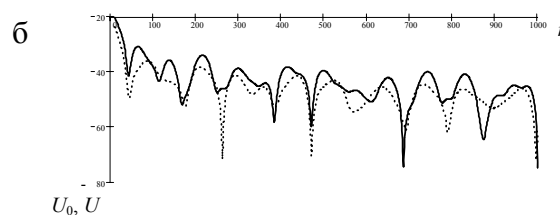
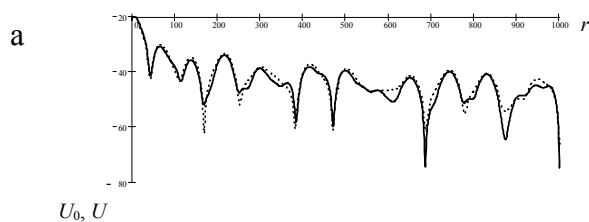
Как видно из (37), дф источника вторичных волн D^1 состоит из константы и \cos -составляющей с коэффициентом $a_2 + c_2$. Для нахождения дф источника $D^2 = D_{00}^2 + D_{01}^2 + D_{10}^2 + D_{11}^2$ необходимо подставлять составляющие выражения (37) вместо единицы в правую часть интегрального уравнения (26). Например, для нахождения D_{00}^2 в правую часть этого интегрального уравнения необходимо подставить $-c_1 - c_2 \cos(\theta)$. При этом D_{00}^2 будет иметь такую же структуру $D_{00}^2 = -c'_1 - c'_2 \cos(\theta)$, но порядок малости этих констант возрастет: $c'_i = O(|c_i|^2)$. Совершенно аналогично складывается ситуация и с остальными составляющими D^2 . Отметим, что анализ спада коэффициентов (28) с ростом расстояния от отражающей границы показывает их одинаковую асимптотику при возрастании этого расстояния. Для составляющих D^3 структура дф остается прежней и равна сумме некоторой константы и произведения другой константы на функцию $\cos(\theta)$, однако порядок малости этих констант возрастет еще на единицу и т.д., например, у составляющих дф D^n порядок малости коэффициентов будет равен n по отношению к исходным коэффициентам a_i и c_i , $i = 1, 2$. Таким образом, ряд (33) мажорируется рядом $D = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$, где $q = 4|\max(a_i, c_i)|$, а a_i, c_i фигурируют в (37). Следовательно, если в ряде (33) ограничиться конечной суммой $D \approx D^0 + D^1$, где $D^0 = 1$, а D^1 определяется из (37), то ошибка будет заведомо меньше $\varepsilon = q^2/(1 - q)$. Тогда если известна величина q и она приемлема, то в ряде (33) можно ограничиться конечной суммой $D \approx D^0 + D^1$.

Для анализа величины q были рассчитаны коэффициенты (28) для различных значений частоты, радиуса сферы и расстояний от центра сферы до границы. Результаты расчетов для случая, когда $q \leq 0.4$ (т.е. коэффициенты a_i, c_i в (37) не превышают 0.1) сведены в таблицу.

В ячейках таблицы фигурируют величины расстояния в метрах от центра сферы до границ, после которых все коэффициенты a_i, c_i уже не превышают по модулю величины 0.1. В этом случае погрешность вычисления дф $D \approx D^0 + D^1$ не превышает 26.6%.

Результаты расчета минимальных расстояний (м), на которых погрешность замены ряда (33) двучленом D^0+D^1 становится не более 26.6%, в функции от частоты излучения F и радиуса излучателя R_0

$F, \text{ Гц}$ $R_0, \text{ м}$	10	25	50	75	100
10	250	285	750	1000	2000
5	120	125	130	300	400
4	90	100	110	180	300
2.5	60	70	75	100	105
2	45	60	63	80	82
1	28	30	32	48	51



Графики зависимостей $U_0(r)$ — и $U(r)$ — при:

а — $F = 50$ Гц и $R_0 = 4$ м, б — $F = 50$ Гц и $R_0 = 8$ м,

в — $F = 90$ Гц и $R_0 = 4$ м, г — $F = 90$ Гц и $R_0 = 6$ м

На рисунке (а, б, в, г) представлены расчеты, выполненные по выражению (34), где $D_1(\theta) = 1 + (a_1 - c_1) - (a_2 + c_2)\cos\theta$, $D_2(\theta) = 1 + (a_1 - c_1) + (a_2 + c_2)\cos\theta$, для различных частот F и радиусов сферы R_0 . Для сравнения на тех же рисунках представлены зависимости $U_0(r)$ для случая, когда рассеяние на источнике не учитывается вовсе, т.е. $D_1(\theta) = D_2(\theta) = 1$ (отметим, что в этом случае погрешность вычисления дф $D \approx D^0$ составляет $\varepsilon = q/(1-q)$). Во всех расчетах приняты неизменными следующие параметры: $H = 100$ м, $z = 45$ м, $z_0 = 50$ м. Из сравнения графиков на каждом рисунке

можно составить представление о степени возмущения поля вследствие наличия рассеяния. Рисунки показывают, что возмущения, как правило, меньше ожидаемых вследствие завышенной оценки величины q , фактические ошибки оказываются меньше.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что предложенная техника может быть использована для получения вырежений как для других рассеивателей, так и вол-

новодов. Кроме того, полученные в работе результаты можно чисто качественно интерпретировать для близких к рассмотренным рассеивателям и волноводов, справедливо предполагая, что возмущения окажутся небольшими.

Отметим, кроме того, что при получении результатов настоящей работы оказался существенным тот факт, что выражение (34) позволяет рассчитывать поле излучателя, дф которого представимо в виде (37), т.е. для углов θ больших и меньших $\pi/2$. Скажем, выражения для поля протяженного источника, полученные в [21] методом функции Грина, оказались бы в данном случае непригодными.

Все полученные результаты для излучателя, который сам является рассеивателем, легко распространяются на случай пассивного рассеивателя, который сам не является источником первичного поля. Расчеты при этом даже упрощаются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Клещев А.А.* Рассеяние звука сфероидальными телами, находящимися у границы раздела сред // Акуст. журн. 1977. Т. 23, № 3. С. 404–410.
2. *Красильников Е.А.* Дифракция акустической волны на пластинке, расположенной вблизи плоскости // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263, № 3. С. 556–571.
3. *Немцова В.Н., Федорюк М.В.* Дифракция звуковых волн на тонком теле вращения в двухслойной жидкости // Акуст. журн. 1986. Т. 32, № 1. С. 47–51.
4. *Кравцов Ю.А., Кузькин В.М., Петников В.Г.* Дифракция волн на регулярных рассеивателях в многомодовых волноводах // Акуст. журн. 1984. Т. 30, № 3. С. 339–343.
5. *Карновский А.М., Лейко А.Г., Супрун А.Д.* К определению звукового поля акустического источника конечных размеров в присутствии границы раздела // Акуст. журн. 1990. Т. 36, № 5. С. 880–886.
6. *Белов В.Е., Горский С.М., Зиновьев А.Ю., Хилько А.И.* Применение метода интегральных уравнений к задаче о дифракции акустических волн на упругих телах в слое жидкости // Акуст. журн. 1994. Т. 40, № 4. С. 548–560.
7. *Елисеевнин В.А., Тужилкин Ю.И.* Дифракция звукового поля на плоском прямоугольном вертикальном экране в волноводе // Акуст. журн. 1995. Т. 4, № 2. С. 249–253.
8. *Иванов Е.А.* Дифракция на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
9. *Gaunaurd J.C., Huang H.* Acoustic scattering by a spherical body a plane boundary // JASA. 1994. V. 96, N. 4. P. 2526–2536.
10. *Gaunaurd J.C., Huang H.* Sound scattering by a spherical object near a hard Flat Bottom // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency control. 1996. V. 43, N. 4. P. 690–700.
11. *Yang S.A.* A boundary integral equation method for two-dimensional acoustic scattering problems // JASA. 1999. V. 105, N. 1. P. 93–105.
12. *Martin Ochmann.* The full-field equations for acoustic radiation and scattering // JASA. 1999. V. 105, N. 5. P. 2557–2564.
13. *Bishop G.C.* Scattering from rigid and soft targets near a planar boundary: Numerical results // JASA. 1999. V. 105, N. 1. P. 130–143.
14. *Шарфарец Б.П.* Поле направленного излучателя в слоисто-неоднородном волноводе // Акуст. журн. 1985. Т. 31, № 1. С. 119–125.
15. *Шарфарец Б.П.* Геометрооптическое представление поля направленного излучателя в неоднородных средах // Акуст. журн. 1989. Т. 35, № 4. С. 738–742.
16. *Косырев Б.А., Шарфарец Б.П.* Поле протяженного источника в нерегулярных океанических волноводах. Владивосток: ТОИ ДВО АН СССР, препринт, 1991. 46 с.
17. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики, т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 860 с.
18. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики, изд. 4-е. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. литературы, 1981. 512 с.
19. Математическая энциклопедия, т. 4. М.: Советская энциклопедия, 1984. 1216 с.
20. *Шарфарец Б.П.* Поле протяженного направленного излучателя в регулярном океаническом волноводе // Акуст. журн. 1989. Т. 35, № 1. С. 132–137.
21. *Шарфарец Б.П.* Поле протяженного источника в регулярном океаническом волноводе // Акуст. журн. 1991. Т. 37, № 4. С. 794–799.

Санкт-Петербург

Материал поступил в редакцию 08.06.2001.

CALCULATION OF THE SCATTERING FIELD IN HOMOGENEOUS ACOUSTIC WAVEGUIDES BY A DIAGRAM FUNCTION METHOD

B. P. Sharfarets

Saint-Petersburg

The problem of acoustic wave diffraction on a finite body in half-space or in a homogeneous waveguide with ideally plane boundaries is treated. The decision method is based on the scattering diagram (amplitude of scattering, in particular). A formula to calculate the scattering amplitude for an arbitrary incident wave by the scattering amplitude for plane incident waves is given. An algorithm to solve the problem of acoustic wave radiation by an acoustically opaque source in half-space with an arbitrary reflection factor is proposed. As an example, the problem of low-frequency acoustic wave radiation by a sphere with acoustically soft boundaries near the acoustically hard or soft boundary of half-space is solved. The problem of the field of a spherical source with the account of diffraction on it in an ideal acoustic waveguide is next considered. The results of scattering on a sphere in half-space with ideal boundaries are used. It is shown that the resulting field is formed by an infinite sum of sources. The errors caused by restriction of their quantity are defined. The results of numerical calculations of the field of a sphere in the ideal waveguide with and without account of scattering are given.