

УДК 629.12.073.249

© Д. Г. Грязин

## МОДЕЛИРОВАНИЕ КАЧКИ ВОЛНОМЕРНОГО БУЯ

Приводятся результаты теоретических и экспериментальных исследований качки волномерного буйа. Предложена нелинейная математическая модель его качки. Для выполнения расчетов использованы экспериментально полученные гидродинамические коэффициенты. Результаты расчета сопоставлены с характеристиками, полученными экспериментально при испытаниях буйа в опытовом бассейне.

### ВВЕДЕНИЕ

Волномерные буйа (ВБ) являются наиболее распространенным прибором, используемым для измерения характеристик морского волнения. В зависимости от назначения эти приборы позволяют определять статистические и спектральные характеристики волн, параметры одномерного и двумерного спектров трехмерного волнения, а также выполняют экспресс-анализ записанной реализации. Методы измерения, используемые в этих приборах, обычно основаны на применении датчиков давления и акселерометров для измерения ординат возвышения волн, а также различных датчиков углов для измерения углов волнового склона.

При колебаниях на поверхности волны буй совершает сложные пространственные движения, обусловленные влиянием волновых и ветровых возмущений. Очевидно, что погрешность измерений характеристик волнения непосредственно зависит от того, насколько точно буй отслеживает профиль волны. В общем случае погрешности измерения ординат волн, обусловленные гидродинамическими свойствами буйа, можно разделить на три группы. Первую и вторую группы составляют погрешности, обусловленные линейными и угловыми перемещениями буйа относительно поверхности волны, третью — погрешности, обусловленные линейными смещениями буйа относительно географической точки измерений. Указанные погрешности напрямую зависят от массо-габаритных характеристик прибора, выбор которых при проектировании ВБ необходимо производить с учетом минимизации этих погрешностей.

### СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ПРИНЯТЫЕ ДОПУЩЕНИЯ

Рассмотрим подробнее пространственные движения цилиндрического буйа. Определим систему координат, связанную с буйом, как  $X, Y, Z$  и систему координат взволнованной поверхности моря как  $\xi, \eta, \zeta$ , причем оси  $\zeta$  и  $Z$  направлены вниз (рис.1).

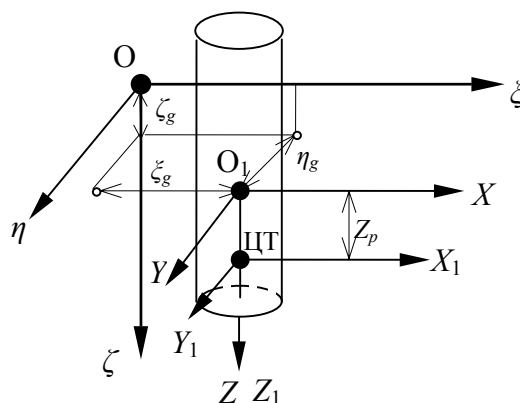


Рис. 1. Системы координат

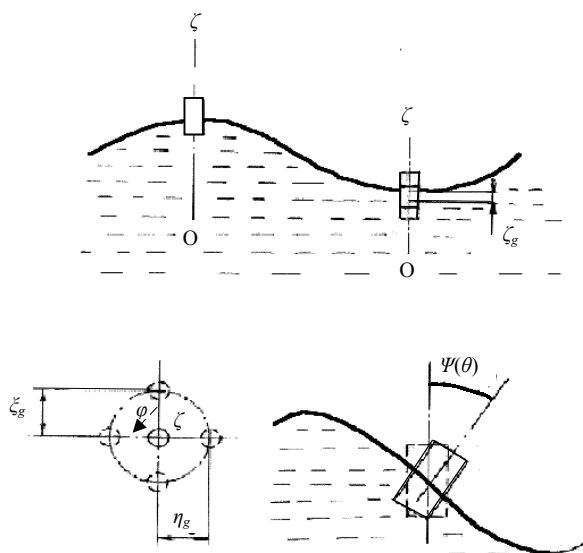


Рис. 2. Пространственные движения буйа под воздействием волн

$Z_p$  — координата центра тяжести (ЦТ),  $\xi_g, \zeta_g, \eta_g$  — перемещение связанной с телом системы координат ( $XYZ$ ) относительно неподвижной ( $\xi\zeta\eta$ ).

При подъеме и спуске буя со склонов волн он, как любое плавающее тело с шестью степенями свободы, совершает угловые колебания  $\theta$  относительно оси  $O\xi$  в плоскости  $O\eta\zeta$  (рис.2), угловые колебания  $\psi$  в плоскости  $O\xi\zeta$  относительно оси  $O\eta$ , колебания по углу  $\varphi$  в плоскости  $O\eta\xi$  относительно оси  $O\zeta$ , имеет вертикальную качку  $\zeta_g$ , а также совершает линейные продольные  $\eta_g$  и поперечные  $\xi_g$  колебания в горизонтальной плоскости.

В связи с тем что корпуса буюв, как правило, симметричны относительно оси  $O_1Z$ , в дальнейшем будем рассматривать лишь углы  $\theta$  и колебания  $\eta_g$ , т.к. рассуждения относительно углов  $\psi$  и колебаний  $\xi_g$  будут аналогичными. Составим дифференциальные уравнения движения буюв, используя гидродинамическую теорию качки судна.

Для этого примем следующие допущения.

1. Движение жидкости считается потенциальным, что позволяет определить скорость движения любой частицы воды через производные по направлению, т.е.

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial X}, \quad V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial Y}, \quad V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial Z},$$

где  $\Phi$  — потенциал скорости.

2. Движение буюв в воде считается безвихревым.

3. Жидкость считается тяжелой и несжимаемой.

4. При определении гидродинамических коэффициентов используется гипотеза плоского обтекания, а трехмерность обтекания учитывается путем введения поправок.

5. Гидромеханические силы разделяются на ряд составляющих.

К составляющим гидромеханических сил относятся следующие.

— Инерционные силы, возникающие вследствие изменения кинетической энергии жидкости, вызываемого качающимся буюм на тихой воде. Эти силы пропорциональны ускорениям качки буюв в первой степени. В выражениях этих сил или их моментов множители при соответствующих ускорениях называются присоединенными массами и имеют размерность масс, размерность моментов инерции масс и размерность статических моментов масс.

— Восстанавливающие, или гидростатические, силы, возникающие как реакция воды на перемещение буюв и стремящиеся вернуть буюв в положение, совпадающее с положением его на тихой воде. Эти силы распределены по смоченной поверхности буюв.

— Силы сопротивления, или демпфирующие, силы, возникающие вследствие непрерывного рассеивания энергии качающегося буюв. Эти силы, в

свою очередь, можно подразделить на силы волновой и силы вязкостной природы. Первые обусловлены гравитационными свойствами воды и определяются непрерывным расходом энергии на поддержание системы волн, распространяющихся во все стороны от качающегося буюв. Силы волнового сопротивления при качке пропорциональны первой степени скорости колебаний. Эти силы, так же как и инерционные гидродинамические силы, обусловлены теми возмущениями, которые вносятся в спокойную жидкость вынужденной качкой буюв. Вторые обусловлены вязкостью воды и определяются как сумма сопротивления трения и сопротивления формы, связанного с вихреобразованием.

— Возмущающие силы, возникающие вследствие непрерывной передачи буюв части энергии волнующейся жидкости. Возмущающие силы делятся на две части: главную и дополнительную — дифракционную. Главная часть возмущающих сил представляет собой результирующую гидродинамических давлений, которые распределены по смоченной в данный момент поверхности буюв. Эта часть сил есть следствие изменения набегающей волной формы погруженной части буюв по сравнению с формой, соответствующей тихой воде, и отличия поля давлений в неискаженной буюм волне от поля гидростатических давлений. Дополнительная, или как ее называют дифракционная, часть возмущающих сил представляет собой результирующую гидродинамических давлений, обусловленных возникновением отраженных волн.

Инерционные и восстанавливающие силы относятся к числу консервативных сил, и, следовательно, работа за период каждой из них порознь равна нулю.

Силы сопротивления относятся к числу диссипативных сил, и их работа (по отношению к буюв) всегда отрицательна.

Возмущающие силы всегда явно зависят от времени и от элементов набегающих волн.

Восстанавливающие силы и главная часть возмущающих сил характеризуют прямое воздействие на буюв окружающей его воды без учета движения жидкости, вызванного движением буюв.

Инерционные, демпфирующие силы и дифракционная часть возмущающих сил являются следствием тех изменений в движении жидкости, которые обусловлены присутствием в ней качающегося буюв. Таким образом, эти силы учитывают вторичное явление, т.е. обратное воздействие буюв на жидкость.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КАЧКИ

Давление в жидкости при неустановившемся ее движении определяется интегралом Лагранжа—

Коши:

$$P - P_0 = \gamma \xi + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho V^2, \quad (1)$$

где  $P - P_0$  — избыточное давление,  $P_0$  — атмосферное давление,  $P$  — давление жидкости,  $\rho$  — плотность воды,  $V$  — скорость абсолютного движения жидкости,  $\gamma = \rho g$ ,  $\Phi$  — потенциал скорости, причем  $\Phi = \Phi_W + \Phi_D + \Phi_{ид}$ . Здесь  $\Phi_W$  — потенциал скорости, обусловленный свободными набегающими волнами,  $\Phi_D$  — потенциал скорости, обусловленный присутствием неподвижного буйа в жидкости,  $\Phi_{ид}$  — потенциал скорости, который возникает от качки буйа на тихой воде.

Первый член правой части уравнения (1) определяет гидростатическое давление, второй и третий члены учитывают давление, обусловленное набегающей и дифрагированной волнами. С помощью интеграла Лагранжа—Коши можно определить давление на элементарном участке поверхности погруженной части буйа. Для определения силы, действующей на корпус буйа, следует проинтегрировать элементарные давления по всей смоченной поверхности:

$$F = \int_{S_i} (P - P_0) dS,$$

где  $S_i$  — мгновенная площадь смоченной поверхности буйа, которая изменяется во времени.

Силы и моменты сил, действующие на движущийся буй при его движении в плоскости  $\xi O \zeta$ , можно описать системой трех уравнений

$$\begin{cases} F_\xi = \int_{S_i} (P - P_0) dS \cos(\hat{n}\hat{\xi}), \\ F_\zeta = \int_{S_i} (P - P_0) dS \cos(\hat{n}\hat{\zeta}), \\ M_\eta = \int_{S_i} (P - P_0) (X \cos(\hat{n}\hat{Z}) - Z \cos(\hat{n}\hat{X})) dS. \end{cases}$$

Здесь обозначениям  $\hat{n}\hat{\zeta}$ ,  $\hat{n}\hat{\eta}$ ,  $\hat{n}\hat{\xi}$ ,  $\hat{n}\hat{Z}$ ,  $\hat{n}\hat{X}$  соответствуют углы между нормалью к элементарному участку смоченной поверхности корпуса буйа (на рис. 3 показан в форме конуса) и соответствующими осями координат, а отрицательный знак перед слагаемым  $Z \cos(\hat{n}\hat{X})$  в третьем уравнении системы вызван тем, что положительный момент соответствует движению по часовой стрелке.

В соответствии с принципом Д'Аламбера пространственное движение буйа может быть описано системой уравнений

$$\begin{cases} (m + \lambda_\zeta) \ddot{\zeta} = F_\zeta, \\ (m + \lambda_\xi) \ddot{\xi} = F_\xi, \\ (J_Y + \lambda_\eta) \ddot{\theta} = M_Y, \end{cases} \quad (2)$$

где  $m$  — масса буйа;  $\lambda_\zeta$ ,  $\lambda_\xi$  — присоединенные массы при колебаниях буйа по соответствующим осям;  $\lambda_\eta$  — присоединенный момент инерции;  $\theta$  — угол колебаний (рис. 3);  $J_Y$  — момент инерции относительно оси  $O_i Y$ .

Для удобства вычислений разделим гидродинамические силы  $F_\xi$  и  $F_\zeta$ , а также момент  $M_Y$  на ряд составляющих, как было указано ранее:

$$F_{\xi(\zeta)}(M_\eta) = F_1 + F_2 + F_3 + F_4,$$

где  $F_1$  — гидростатическая сила (или момент), которая определяется путем интегрирования гидростатического давления по смоченной поверхности;  $F_2$  — главная часть возмущающих сил, определяемая интегрированием волнового давления по смоченной поверхности при условии, что буй не вносит искажений в волновое поле;  $F_3$  — дифракционная составляющая волнового поля, обусловленная искажениями волнового поля от присутствия буйа;  $F_4$  — демпфирующая составляющая, обусловленная силой сопротивления при качке на тихой воде.

Для выполнения расчетов по выражению (2) необходимо иметь значения присоединенных масс и момента инерции буйа. Значения присоединенного момента инерции при угловых колебаниях буйа могут быть получены из выражения

$$\omega_0^2 = \frac{Dh}{\lambda_\eta + J_Y}, \quad (3)$$

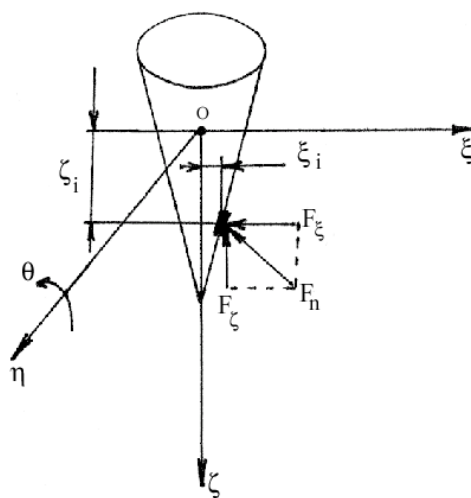


Рис. 3. Силы, действующие на буй

где  $h$  — метацентрическая высота,  $D = mg$  — вес буя  $\left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}\right)$ .

В том случае, если масса буя равномерно распределена по его объему, а угловые колебания буя в воде происходят относительно точки  $O$  (рис. 4), лежащей в центре сечения ватерлинии ВЛ, то может быть получено выражение для момента инерции цилиндрического буя. Для этого разобьем его корпус на элементарные объемы, каждый из которых лежит между сечениями, параллельными плоскости ватерлинии, и имеет высоту  $dZ$ . Тогда выражение для элементарной массы, соответствующей этому объему, будет  $\rho\pi R^2 dZ = dm$ , а элементарный момент инерции определится как  $dJ_y = dmZ^2$ .

Момент инерции буя в целом определится из выражения

$$J_y = \int_{h_0}^{T_0} dJ_y = \rho\pi R^2 \frac{1}{3} (T_0^3 - h_0^3).$$

Заметим, что значение  $h_0$  необходимо брать с учетом знака. В связи с тем что ось  $Z$  направлена вниз (рис. 4), значение  $h_0$  всегда будет отрицательным. Для определения метацентрической высоты необходимо рассчитать момент  $M$  восстанавливающих сил на тихой воде. На рис. 5 представлен буй в наклоненном состоянии. При его отклонении от вертикали на угол  $\theta$  объем  $V_1$  входит в воду, а объем  $V_2$  выходит из нее. Выделим элементарный объем  $dV$  из  $V_1$ . Толщину этого объема по оси  $X$  обозначим  $dX$ , высота  $Z_i = X_i \text{tg}\theta$ . Для определения  $Y_i$  используем уравнение окружности радиуса  $R$  с центром в начале координат:  $X_i^2 + Y_i^2 = R^2$ . Откуда получим  $Y_i = \sqrt{R^2 - X_i^2}$ . Тогда выражение для элементарного объема будет иметь вид:

$$dV = 2\sqrt{R^2 - X_i^2} X_i \text{tg}\theta dX_i. \quad (4)$$

Момент от этого элементарного объема равен

$$dM = \rho g X_i dV. \quad (5)$$

Подставляя (4) в (5), получим выражение для момента, обусловленного объемом  $V_1$ :

$$M_{V_1} = \rho g \int_0^R 2\sqrt{R^2 - X_i^2} X_i^2 \text{tg}\theta dX_i. \quad (6)$$

Решение интеграла определится как

$$M_{V_1} = \frac{1}{8} \rho g \pi R^4 \text{tg}\theta. \quad (7)$$

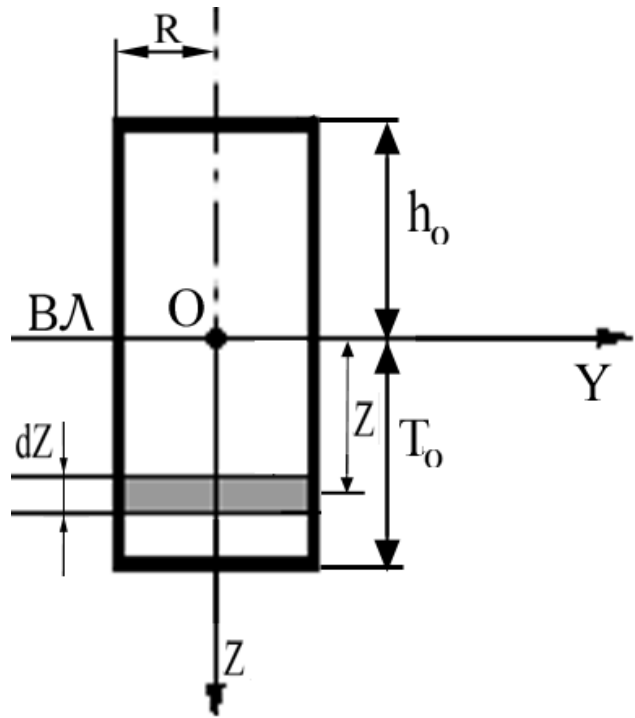


Рис. 4. Разбиение цилиндрического буя на элементарные отсеки. ВЛ — ватерлиния.

При определении момента, возникающего при наклонении буя, следует рассматривать не только объем  $V_1$ , но и объем  $V_2$  (рис. 5). В связи с тем что  $V_2 = V_1$ , значение выражения (7) следует удвоить, кроме того, учитывая малость углов  $\theta$ , следует принять  $\text{tg}\theta \approx \theta$ , тогда выражение для момента примет вид:

$$M = \frac{1}{4} \rho g \pi R^4 \theta. \quad (8)$$

Значение метацентрической высоты можно определить из формулы:

$$h = \frac{M}{D\theta}. \quad (9)$$

Подставляя выражения (8) и (9) в (3), получим:

$$\omega_0^2 = \frac{0.785 \rho g R^4}{\lambda_\eta + J_y}.$$

Окончательно выражение для присоединенного момента инерции примет вид:

$$\lambda_\eta = \frac{0.785 \rho g R^4}{\omega_0^2} - J_y. \quad (10)$$

Таким образом, зная частоту свободных колебаний буя в воде и его геометрические размеры

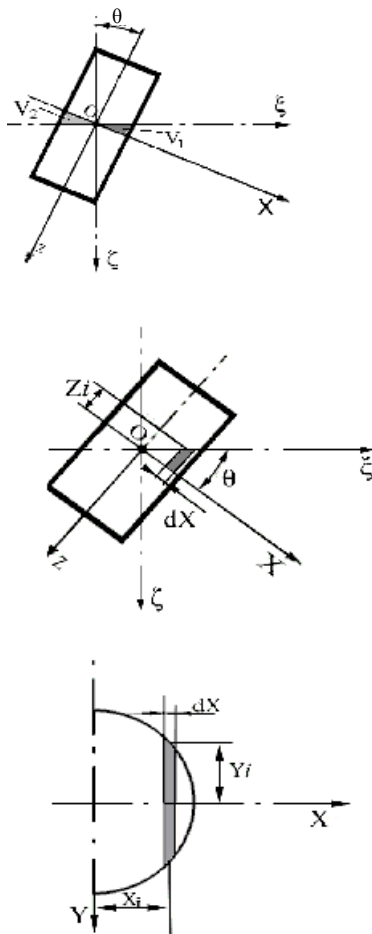


Рис. 5. Определение элементарных объемов для расчета момента восстанавливающих сил

можно рассчитать значения присоединенного момента инерции. В том случае если масса буя неравномерно распределена по его поверхности, то для определения  $J_y$  можно воспользоваться записями его собственных колебаний в воздухе. При этом расчет момента инерции буя в воздухе следует производить на основе выражения:

$$J_y = Ma \left[ \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2 - \frac{a}{g} \right]. \quad (11)$$

Здесь  $M$  — масса буя (кг),  $T$  — период собственных колебаний буя в воздухе (с),  $a$  — расстояние точки подвеса буя от центра масс (плечо подвеса) (м).

Значение  $a$  можно определить из выражения

$$a = \frac{57.3 \sum \delta m \delta \theta}{M \sum \delta \theta^2}, \quad (12)$$

где  $\delta m = \delta M \cdot l$  — приращение момента инерции буя, соответствующее увеличению угла его отклонения  $\delta \theta$  от вертикали;  $\delta M$  — приращение массы;  $l$  — расстояние между осью качания буя и местом установки массы; коэффициент 57.3 учитывает перевод угла в радианы.

С целью определения значений  $a$  и  $J_y$  по формулам (11) и (12) был произведен эксперимент по определению значений  $\delta m$ ,  $\delta \theta$  и  $T$ . Для этого на корпусе буя с помощью хомута была закреплена штанга с ножевыми опорами 1 (рис. 6) и площадкой 2 для установки грузов. Грузы массой 0.1 и 0.2 кг попеременно устанавливались в точки  $a$ ,  $b$ ,  $v$ ,  $z$ , расположенные друг относительно друга на расстоянии 0.1 м. При этом точки  $b$  и  $v$  отстояли от оси качания также на 0.1 м. Угол наклона буя определялся с помощью оптического квадранта. Для буя массой 27 кг и диаметром 0.34 м значение времени  $T$  составило 2.1 с, а  $J_y = 0.64 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ .

Для определения значения присоединенного момента инерции и коэффициента сопротивления был выполнен эксперимент по записи свободных угловых колебаний указанного буя в опытовом бассейне на тихой воде. Запись угловых колебаний производилась с помощью индикаторной гировертикали ДК-14. Частота собственных колебаний составила  $3.59 \text{ с}^{-1}$ . Значение  $\lambda_\eta$  было рассчитано по формуле (10) и оказалось равным  $0.356 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ , что составило 55% от значения момента инерции в воздухе. Значение  $\lambda_\xi$  определялось по методике, изложенной в [1], и составило 5.23 кг.

Для определения коэффициента сопротивления  $W_B$  при квадратичном законе демпфирования для бортовых колебаний была использована методика, приведенная в [2]. Значение коэффициента сопротивления рассчитывалось из выражения:

$$W_B = 0.85 \omega_c r K_W,$$

где  $K_W$  — квадратичный коэффициент сопротивления,  $\omega_c$  — частота собственных колебаний,  $r$  — амплитуда качки.

Выражение для  $K_W$  имеет вид:

$$K_W = C_W (J_y + \lambda_\eta).$$

Здесь  $J_y$  — момент инерции буя в воздухе,  $\lambda_\eta$  — присоединенный момент инерции,  $C_W$  — квадратичный коэффициент сопротивления (1/град.).

При этом  $C_W = \frac{3\Delta A_n}{4A_{ncc}^2}$ ,  $\Delta A_n = A_{ncp} - A_{n+1cp}$  — уменьшение средней амплитуды за два периода ( $n$  и  $n+1$ ),  $\bar{A}_{ncc} = \frac{A_{ncp} + A_{n+1cp}}{2}$  — средняя для двух периодов амплитуда.

Зависимость коэффициента сопротивления от угловой скорости колебаний представлена на рис. 7.

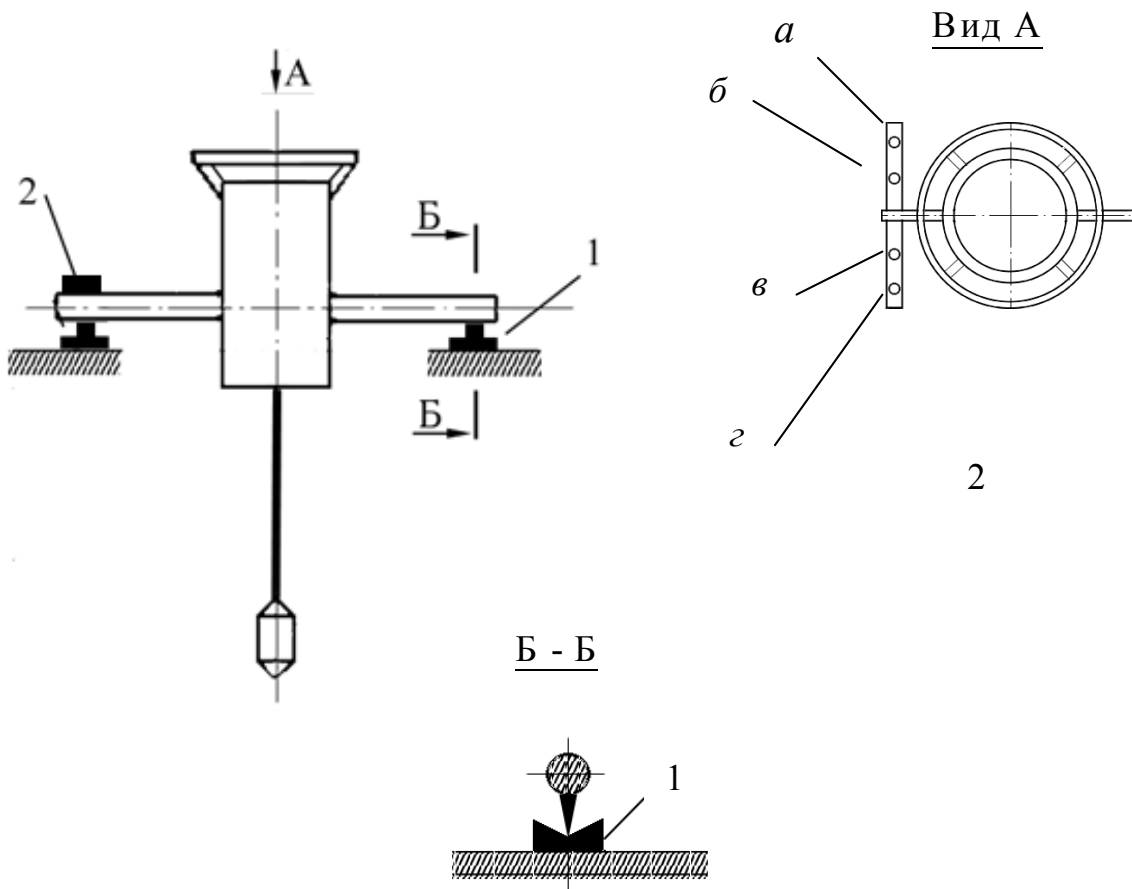


Рис. 6. Схема эксперимента по определению значений  $\delta t$ ,  $\delta\theta$  и  $T$

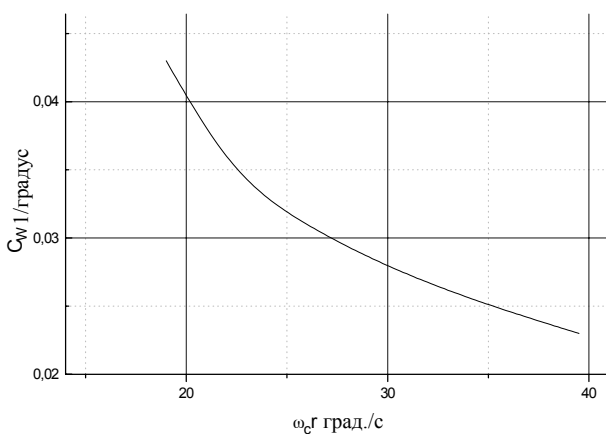


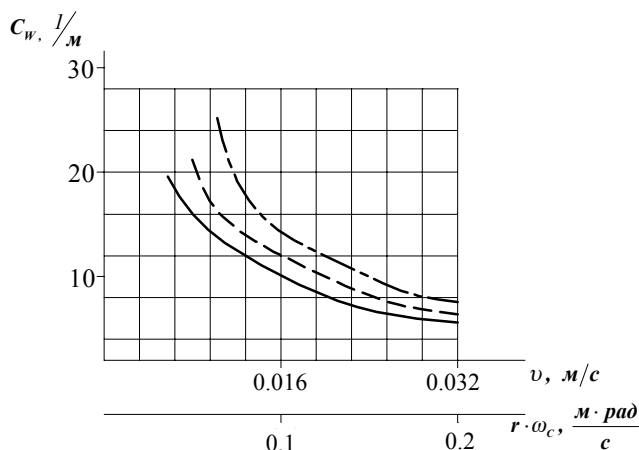
Рис. 7. Зависимость коэффициента сопротивления от скорости угловых колебаний буя диаметром 0.34 м и массой 27 кг

Аналогичным образом были получены коэффициенты сопротивления для вертикальных колебаний указанного буя, которые представлены на рис. 8, и коэффициент присоединенной массы  $\lambda_\zeta = 13.8$  кг.

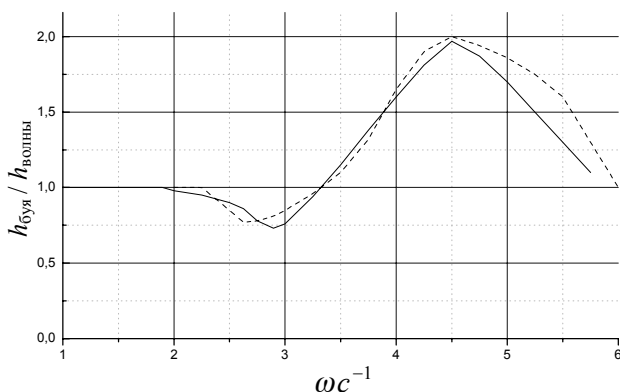
На основе предложенной математической модели были произведены расчеты качки буя с указанными ранее характеристиками. Для выполнения расчетов разработана программа, позволяющая решать систему дифференциальных уравнений методом Рунге—Кутты.

Результаты расчета АЧХ качки представлены на рис. 9 и 10.

С целью сравнения результатов расчета с экспериментальными данными в опытовом бассейне ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова был произведен эксперимент по определению АЧХ вертикальной и угловой качек буюв. С помощью волнопродуктора задавалась волна с необходимой высотой и периодом, характеристики которой контролировались по струнному волнографу, закрепленному на



**Рис. 8.** Экспериментальная зависимость квадратичного коэффициента сопротивления от скорости колебаний буя  $\varnothing$  0.34 м при массе буя 27 кг (—), 29 кг (---), 36 кг (-·-·-·-).

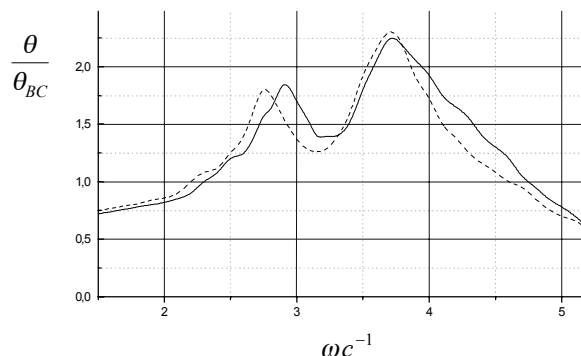


**Рис. 9.** Сравнение расчетной АЧХ вертикальной качки буя  $\varnothing$  0.34 м массой 27 кг (—) с экспериментальной характеристикой (---). Характеристики даны при крутизне волны 1/40

буксировочной тележке. Струнный волнограф был установлен в непосредственной близости от свободно плавающего буя. Измерения вертикальных перемещений производились с помощью установки, подробно описанной в [1], а угловых — с помощью гировертикали ДК-14.

**ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ**

Результаты экспериментальных исследований имеют достаточное совпадение с теоретически



**Рис. 10.** Сравнение экспериментально полученной АЧХ бортовых колебаний буя 0.34 м и массой 27 кг (---) с характеристикой, рассчитанной на основе численного решения уравнений (—). Характеристики даны при крутизне волны 1/40

рассчитанными кривыми (рис. 9, 10), что позволяет говорить о хорошем качестве разработанной математической модели. На рис. 10  $\theta_{BC}$  обозначает угол волнового склона. Заметим, что диапазон измеренных характеристик ограничивался возможностями опытового бассейна. Следует отметить и то, что расчет угловых колебаний производился для цилиндрического буя со значительной осадкой, который недостаточно хорошо отслеживает углы волнового склона и предназначен для измерения только ординат профиля волн.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Грязин Д.Г. Определение значений присоединенных масс воды при вертикальных колебаниях волномерных буюв // Научное приборостроение. 2000. Т. 10, № 2. С. 72–75.
2. Благовещенский С.Н., Холодилин А.Н. Справочник по статике и динамике корабля. Л.: Судостроение, 1975. Т. 2. 174 с.

*Санкт-Петербургский Государственный институт точной механики и оптики (Технический Университет)*

Материал поступил в редакцию 21.11.2000.

**MODELING OF THE WAVEMETERING BUOY TOSSING****D. G. Griazin***Saint-Petersburg State Institute of Fine Mechanics and Optics (Technical University)*

The results from theoretical and experimental studies of the wavemetering buoy tossing are described. The nonlinear mathematical model of tossing is offered. The calculations were based on the experimentally obtained hydrodynamic factors. The results of calculations are compared to the characteristics defined experimentally at testing the buoy in the development pool.