ISSN 0868–5886 *НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2000, том 10, № 4, с. 48–59*

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК 629.7.054: 533.6

© **С. В. Богословский**

ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ АЭРОМАГНИТНЫХ КОМПЛЕКСОВ

В работе рассматриваются математические векторно-матричные модели как всего аэромагнитного комплекса, так и его составных частей, обсуждаются методы определения оптимальных равновесных состояний аэромагнитных исследовательских комплексов. Предложен метод оптимизации параметров систем управления с учетом инерционности намагничивания ферромагнитных элементов.

ВВЕДЕНИЕ

В предыдущем номере НП рассмотрены структурные схемы и основные соотношения, позволяющие выполнить эскизное проектирование динамических аэромагнитных исследовательских комплексов (АМК). Данная публикация посвящена рассмотрению методов решения основных проблем, возникающих при проектировании систем управления АМК.

При разработке магнитного подвеса одной из первых задач является определение необходимых параметров равновесного состояния системы. Эта задача сводится к решению системы нескольких (по числу координат) нелинейных уравнений второго порядка с числом неизвестных, равным числу токов. При решении подобных задач используют известные методы исключения неизвестных [1]. Однако большое число уравнений и их квадратичный характер требуют специального рассмотрения особенностей решения этой задачи применительно к АМК.

Следующая задача проектировщика заключается в разработке законов управления АМК как многомерным объектом. Эта задача также может быть решена известными методами; для этого рассматриваются условия приведения матрично-векторной математической модели к виду, допускающему применение указанных методов.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И НЕСУЩЕГО ОСНОВАНИЯ МОДЕЛИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Силовое взаимодействие несущего ферромагнитного основания модели летательного аппарата (ЛА) и аэромагнитного комплекса определяется известными соотношениями [2, 3]

$$\mathbf{M}_m = \int_{V_m} \mathbf{M}\times\mathbf{B}\cdot \mathrm{d}V,\qquad \mathbf{F}_m = \int_{V_m} (\mathbf{M}\cdot\nabla)\mathbf{B}\cdot \mathrm{d}V. \quad (1)$$

Здесь $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \end{pmatrix}$ — вектор градиента; $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ — единичные орты декартовой системы координат; $\mathbf{M}$ — намагниченность основания модели ЛА; $\mathbf{B} = \mu_a \cdot \mathbf{H}_h$ — индукция поля, создаваемого соленоидами аэромагнитного комплекса; μ_a — абсолютная магнитная проницаемость; $\mathbf{H}_h$ — напряженность магнитного поля; V_m — объем основания; $\mathbf{F}_m$, $\mathbf{M}_m$ — главные векторы сил и моментов взаимодействия магнитного поля и основания модели ЛА.

Будем считать, что размеры модели ЛА существенно меньше диаметра рабочей части аэродинамической трубы (АДТ) (диаметр миделя модели не превышает 10% диаметра рабочей части), магнитная проницаемость не зависит от напряженности магнитного поля, а напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ вне модели ЛА не зависит от магнитных свойств основания модели ЛА и определяется соотношением [4]

$$\mathbf{H}_h = \mathbf{H}_\mathrm{I} \cdot \mathbf{I}\,, \quad (2)$$

где $\mathbf{H}_\mathrm{I}$ — матрица коэффициентов, зависящих от координат точки (*x*, *y*, *z*); $\mathbf{I}^\mathrm{T} = \begin{pmatrix} I_1 & \cdots & I_\ell \end{pmatrix}$ — вектор токов, протекающих в соленоидах аэромагнитного комплекса; ℓ — количество соленоидов аэромагнитного комплекса.

Для различных типов основания модели ЛА математические модели взаимодействия могут быть конкретизированы.

Ферромагнитное основание

Стационарный случай

Известно, что для тел простейшей формы (эллипсоид вращения, цилиндр) средняя намагниченность определяется соотношением

$$\mathbf{M}_{\text{ср}} = (\mathbf{Q}_{hm})^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q}_{hm} \cdot \mathbf{H}_h , \qquad (3)$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{diag}(D_a, D_b, D_c)$ — размагничивающий фактор; $\mathbf{M}_{\text{ср}} = \frac{1}{V_m}\int\limits_{V_m} \mathbf{M}\mathrm{d}V$ — средняя намагниченность относительно главных магнитных осей; $\mathbf{Q}_{hm}$ — матрица перехода от инерциальной системы координат к системе координат, связанной с главными магнитными осями.

Будем рассматривать только такие магнитные основания моделей сложной формы, которые можно представить в виде системы простейших форм, к которым применимо соотношение (1). Главный вектор и главный момент системы сил, действующих на рассматриваемую систему простейших форм, определяется методами теоретической механики.

Для некоторых экспериментальных установок АМК (относительные магнитные проницаемости 100–1000; отсутствие замкнутых или почти замкнутых по потоку магнитных полей) оказалось возможным ограничиться рассмотрением линейных зависимостей напряженностей магнитных полей от токов в соленоидах АМК [2]. При условии справедливости формулы (2) из соотношений (1), (2), (3) следует, что сила и момент, действующие на модель ЛА со стороны АМК, являются квадратичными функциями токов, протекающих в соленоидах АМК:

$$\mathbf{Q}_m = (\mathbf{F}_m, \mathbf{M}_m)^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\,\mathbf{I}. \qquad (4)$$

Здесь $\mathbf{Q}_m = (Q_{m_j})$ — обобщенный вектор магнитных сил или вектор билинейных форм; $\mathbf{A}$ — трехмерная матрица размерностью $\ell \times \ell \times n$, зависящая от расположения соленоидов, формы и координат ферромагнитного основания; $Q_{m_j} = \mathbf{I}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_j\mathbf{I}$; $\mathbf{A}_j$ — матрицы размерностью $\ell \times \ell$, $j = \overline{1,n}$; $\mathbf{I}$ — вектор токов размерностью ℓ. При $n = 6$ $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{Fx}, \mathbf{A}_{Fy}, \mathbf{A}_{Fz}, \mathbf{A}_{Mx}, \mathbf{A}_{My}, \mathbf{A}_{Mz})$, $\mathbf{F}_m^{\mathrm{T}} = (F_{mx}, F_{my}, F_{mz})$, $\mathbf{M}_m^{\mathrm{T}} = (M_{mx}, M_{my}, M_{mz})$, $F_{mx} = \mathbf{I}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{Fx}\mathbf{I}$, $F_{my} = \mathbf{I}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{Fy}\mathbf{I}$, $F_{mz} = \mathbf{I}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{Fz}\mathbf{I}$, $M_{mx} = \mathbf{I}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{Mx}\mathbf{I}$, $M_{my} = \mathbf{I}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{My}\mathbf{I}$, $M_{mz} = \mathbf{I}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{Mz}\mathbf{I}$, $\mathbf{A}_{Fx}, \mathbf{A}_{Fy}, \mathbf{A}_{Fz}$, $\mathbf{A}_{Mx}, \mathbf{A}_{My}$, $\mathbf{A}_{Mz}$ — матрицы размерами $(\ell \times \ell)$. В большинстве практически важных задач матрицы $\mathbf{A}_F$ и $\mathbf{A}_M$ определяются численными методами.

Схему АМК будем называть дифференциальной, если все квадратичные формы (4) — знакопеременные, и недифференциальной, если какие-либо из квадратичных форм являются знакоопределенными [5]. При дифференциальной схеме для пары соответствующих токовых катушек $I_S = I_S^* + \Delta_S$, $I_{S+1} = I_S^* - \Delta_S$, где I_S^* — некоторые начальные, установочные значения токов при $\mathbf{Q}^* = 0$, значения которых могут выбираться из соображений оптимизации схемы по каким-либо критериям; Δ_S — отклонения токов при $\mathbf{Q}^* \neq 0$.

В теории управления и идентификации аэромагнитных комплексов к настоящему времени ограничивались рассмотрением только стационарного взаимодействия ферромагнитного основания модели и электромагнитного поля, поэтому рассмотрим один из возможных вариантов математического описания движения физической модели ЛА в нестационарном магнитном поле.

Нестационарный случай

Обобщая результаты моделирования, приведенные в работе [6] для одномерной магнитной системы, можно предложить следующую векторно-матричную модель магнитной системы многокатушечного АМК:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}\left[\mathbf{M} - (\mathbf{Q}_{hm})^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q}_{hm}\mathbf{H}_h\right]}{\mathrm{d}t} = \\ &= \mathbf{A}_\tau\left[\mathbf{M} - (\mathbf{Q}_{hm})^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{K}_\xi)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q}_{hm}\mathbf{H}_h\right], \end{aligned} \qquad (5)$$

где $\mathbf{A}_\tau$ — экспериментально определяемая матрица размером (3 × 3); $\mathbf{E}$ — единичная матрица; $\mathbf{K}_\xi$ — матричный коэффициент, учитывающий изменение намагниченности.

Для условий, при которых выполняются соотношения (2) и (4), в работе введены в рассмотрение фиктивные токи $\mathbf{I}_H$, при протекании которых по соленоидам АМК могут создаваться напряженности, эквивалентные напряженностям магнитных полей намагниченных ферромагнитных объектов. В соответствии с формулой (5), вводя вектор $\mathbf{I}_H$, обеспечивающий выполнение равенства $\mathbf{M} = \mathbf{K}_m\mathbf{I}_H$, для указанного типа АМК инерционность намагничивания ферромагнитных объектов можно учесть следующей формулой:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{\xi 1}\mathbf{I}_H)}{\mathrm{d}t} + \\ &+ \mathbf{A}_\xi \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{\xi 2}\mathbf{I}_H) = 0, \end{aligned} \qquad (6)$$

где $\mathbf{A}_\xi$, $\mathbf{K}_{\xi 1}$, $\mathbf{K}_{\xi 2}$ — матричные, в общем случае переменные коэффициенты, характеризующие инерционность намагничивания, относительный вклад ферромагнитных элементов в создание напряженности и последействие намагничивания магнитного поля; эти коэффициенты определяются численными методами при решении уравнений электромагнитодинамики [2].

При этом в статике выполняется необходимое условие $\mathbf{I}_H = \mathbf{I}$. Тогда формула (4) может быть представлена в виде

$$\mathbf{Q}_m = (\mathbf{F}_m, \mathbf{M}_m)^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}_H^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_m \mathbf{I}, \qquad (7)$$

где $\mathbf{A}_m$ — трехмерная матрица коэффициентов.

Сверхпроводящее основание модели ЛА и основание из постоянных магнитов

Для короткозамкнутого сверхпроводящего витка справедливо соотношение:

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{A}_{Fc} \cdot \mathbf{I}, \quad \mathbf{M}_m = \mathbf{A}_{Mc} \cdot \mathbf{I}\ , \qquad (8)$$

где $\mathbf{A}_{Fc}$, $\mathbf{A}_{Mc}$ — матрицы размером $(\ell \times \ell)$.

Зависимость (8) справедлива и для постоянных магнитов в силу предположения о постоянстве вектора намагниченности, то есть силы и моменты являются линейными функциями токов.

Все матрицы $\mathbf{A}_F$ и $\mathbf{A}_M$ являются нелинейными функциями линейных и угловых координат модели ЛА (несущего основания). Аналитические выражения для коэффициентов матриц $\mathbf{A}_F$, $\mathbf{A}_M$ в формулах (4), (8) можно получить только для оснований простейшей формы (шар) и стандартных конфигураций магнитного подвеса. Для магнитных подвесов, представляющих практический интерес, указанные коэффициенты и их частные производные по координатам определяются численными методами [2].

2. ОБОБЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИСПЫТУЕМОГО ОБЪЕКТА И АЭРОМАГНИТНОГО КОМПЛЕКСА

Обобщенная математическая модель может быть записана в векторно-матричной форме следующим образом [5]:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}_a \cdot \mathbf{C}_a(\mathbf{X}) + \\ + \mathbf{B}_m \cdot \mathbf{P}_m(\mathbf{X}) + \mathbf{e}_5 \cdot \mathbf{g}\,. \qquad (9)$$

В (9) $\mathbf{X}$ — вектор состояния системы размерности $N_x = N_t + 2n + \ell + 3$:

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, \vartheta, \psi, \gamma, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \\ t, t_1, \cdots, t_{N_t}, I_1, \cdots, I_\ell, \mathbf{M}_D)\,;$$

$\mathbf{M}_D = \mathbf{M} - \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{H}_h$; t — текущее время; $n_{\max} = 6$; (x_0, y_0, z_0) — координаты точки в неподвижной трубной системе координат; n — количество управляемых координат модели ЛА; (x, y, z) — координаты точки в подвижной, связанной с моделью ЛА, системе координат; $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ — функциональная матрица с переменными коэффициентами, элементы которой не зависят от типа модели ЛА, при $n = n_{\max} = 6$ имеющая N_x строк и N_x столбцов; $\mathbf{C}_a^{\mathrm{T}} = (\mathbf{C}_F, \mathbf{C}_M, L_1, \cdots, L_{N_t})$; L_1=1=const; $N_{C_a} = n + N_t$; $\mathbf{C}_F = \mathbf{C}_F(\mathbf{X})$, $\mathbf{C}_M = \mathbf{C}_M(\mathbf{X})$ — аэродинамические коэффициенты в связанной системе координат; $\mathbf{e}_5$ — вектор длины N_x, пятый элемент которого равен единице, а остальные нулю.

Вектор наблюдаемых величин $\mathbf{Y}$ определяется соотношением

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_H \cdot \mathbf{X} + \Xi\,,$$

где $\mathbf{Y}^{\mathrm{T}} = (x_0, y_0, z_0, \vartheta, \psi, \gamma, t, t_1, \cdots, t_{N_t}, I_1, \cdots, I_\ell)$; $\Xi = (\xi_i)$ — вектор случайных величин размерностью $(n + \ell + 1)$, моделирующий погрешности измерений; $\mathbf{A}_H$ — матрица постоянных коэффициентов. Детальное описание коэффициентов, входящих в модель (9), приведено в работе [5].

Представление структуры математической модели в виде (9) обладает следующими преимуществами:

аддитивно выделены алгебраические нелинейности;

разделено влияние аэродинамических и магнитоэлектрических эффектов на поведение аэромагнитного комплекса;

выделены составляющие с полной и неполной априорной информацией.

Нелинейная и нестационарная модель (9) является основой для теоретического обобщения, развития методов идентификации и формирования законов управления. В зависимости от особенностей решаемой задачи с целью повышения эффективности исследований целесообразно использовать метод декомпозиции сложной иерархической модели (9).

Хорошо зарекомендовала себя следующая математическая модель движения испытуемого объекта в аэромагнитном поле:

$$\mathbf{B}\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{X}}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{d}t}, \mathbf{X}\right) = \mathbf{Q}_m + \mathbf{P}_B \cdot \mathbf{Q}_a + \mathbf{G}. \qquad (10)$$

$\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = (x_0, y_0, z_0, \vartheta, \psi, \gamma)$ — вектор координат модели ЛА; (x_0, y_0, z_0) — координаты центра масс модели ЛА в неподвижной (трубной) системе координат; в качестве осей (*x, y, z*) связанной системы координат выбраны главные центральные оси инерции модели ЛА; ϑ — угол тангажа, ψ — угол рыскания, γ — угол крена; $\mathbf{Q}_a$ — обобщенный вектор аэродинамических сил; $\mathbf{G} = m\,\mathbf{g}$ — вектор сил тяжести; m — масса модели ЛА; $\mathbf{g}$ — вектор ускорения свободного падения.

Разрешим уравнение (10) относительно высшей производной:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{X}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{B}_R\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{d}t}, \mathbf{X}\right) + \mathbf{P}_g^{-1}\mathbf{Q}_m + \\ + \mathbf{P}_g^{-1}\mathbf{P}_B \cdot \mathbf{Q}_a + \mathbf{P}_g^{-1}\mathbf{G}, \qquad (11)$$

где $\mathbf{B}_R\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{d}t}, \mathbf{X}\right), \mathbf{P}_g, \mathbf{Q}_m, \mathbf{P}_B, \mathbf{Q}_a, \mathbf{G}$ — функции координат и времени.

Уравнения движения центра масс в системе (11) записываются в проекциях на оси неподвижной системы координат, а уравнения углового движения — в проекциях на оси связанной системы координат.

3. МЕТОДЫ ВЫБОРА ПАРАМЕТРОВ РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО АЭРОМАГНИТНОГО КОМПЛЕКСА

Положение равновесия определяется по уравнению (11) из условия равенства нулю производных от искомых динамических координат управляемого комплекса.

Система уравнений равновесия может быть представлена в виде

$$\mathbf{I}_0^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_0 + \mathbf{Q}^* = 0, \qquad (12)$$

где $\mathbf{I}_0$ — вектор значений токов, обеспечивающих выполнение равенств (12),

$$\mathbf{Q}^* = \left(Q_1^*, \cdots, Q_n^*\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{G} + \mathbf{P}_B \cdot \mathbf{Q}_{a0}.$$

В случае использования ферромагнитного основания силы $\mathbf{Q}_m$ являются квадратичными функциями токов, то есть система уравнений (12) является системой n уравнений второго порядка для ℓ переменных, где n — число управляемых координат (минимум — 1, максимум — 6); ℓ — число соленоидов аэромагнитного комплекса (число токов). Решение уравнений равновесия (12) сводится к задаче решения системы n уравнений второго порядка с ℓ неизвестными $I_k, k = \overline{1,\ell}$. Как известно из алгебраической геометрии, количество линейно независимых решений системы n однородных уравнений второго порядка относительно n независимых переменных равно $N = 2^n$ [1].

При анализе равновесных состояний следует учитывать и возможную ситуацию, когда число управляющих токов I_k ($k = \overline{1,\ell}$) превышает число независимых обобщенных координат X_i ($i = \overline{1,n}$), т. е.

$$\ell > n. \qquad (13)$$

Условие (13) означает избыточность управляющих воздействий относительно управляемых обобщенных координат исследуемой модели. Система (12) в условиях (13) является недоопределенной. В соответствии с принципами построения многосвязных систем одним из возможных путей получения искомого решения является устранение избыточности, позволяющее сводить задачу к задаче с определенным решением.

Существует несколько подходов к решению проблемы снижения избыточности решений. Основная идея одного из таких подходов сводится к такому видоизменению задачи, при котором в уравнениях равновесия учитываются только те из токов I_k ($k = \overline{1,\ell}$), которые принимаются независимыми, а остальные $(\ell - n)$ токов исключены.

Пусть $\mathbf{I}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{01} \\ \mathbf{I}_{02} \end{pmatrix}$, где $\mathbf{I}_{01} = \left(I_{01,1}, \cdots, I_{01,n}\right)^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{I}_{02} = \left(I_{02,1}, \cdots, I_{02,(\ell-n)}\right)^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{I}$ — вектор токов, $\mathbf{I}_{01}$ — составляющая вектора $\mathbf{I}$, включающая токи, принятые в качестве независимых; $\mathbf{I}_{02}$ — составляющая вектора $\mathbf{I}$, включающая токи, подлежащие исключению при расчете равновесных значений.

Будем рассматривать вариант задачи, сводящийся к введению дополнительных условий — ограничений на значения токов $\mathbf{I}_{0k}$ ($k = \overline{1,\ell}$) линейного вида

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{01} & \mathbf{I}_{02} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \mathbf{b}, \qquad (14)$$

где $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ — некоторые заданные матрицы соответствующих размерностей, $\mathbf{b}$ — заданный вектор. Подход к выбору надлежащих $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ и $\mathbf{b}$ представляет собой самостоятельную задачу, решаемую с учетом дополнительных требований и особенностей схемы магнитного подвеса. В этих случаях соотношения (14) входят в число необходимых условий экстремума в качестве ограничений-равенств.

Для исключения вектора $\mathbf{I}_{02}$ из уравнений (12) и (14) представим матрицу $\mathbf{A}_i$ в блочном виде:

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{(i,1,1)} & \mathbf{A}_{(i,1,2)} \\ \underbrace{\mathbf{A}_{(i,2,1)}}_{n} & \underbrace{\mathbf{A}_{(i,2,2)}}_{\ell-n} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}n \\ \}\ell-n \end{matrix} .$$

Получим n уравнений равновесия, содержащих n управляющих токов:

$$\mathbf{I}_{01}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_i^{*}\mathbf{I}_{01} + \mathbf{C}_i\mathbf{I}_{01} + \mathbf{I}_{01}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_i + \mathbf{G}_i^{*} + \mathbf{Q}_i = 0 , \qquad (15)$$

где

$$i = \overline{1,n} ;$$

$$\mathbf{C}_i = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{B}_2^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}_{(i,2,1)} - \mathbf{A}_{(i,2,2)}\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{B}_1\right);$$

$$\mathbf{A}_i^{*} = \mathbf{A}_{(i,1,1)} - \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{B}_2^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{(i,2,1)} -$$

$$- \mathbf{A}_{(i,1,2)}\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{B}_2^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{(i,2,2)}\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{B}_1 ;$$

$$\mathbf{D}_i = \left[\mathbf{A}_{(i,1,2)} - \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{B}_2^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{(i,2,2)}\right]\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{b};$$

$$\mathbf{G}_i^{*} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{B}_2^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{(i,2,2)}\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{b}.$$

Полученные уравнения равновесия (15) в независимых токах $\mathbf{I}_{01}$ соответствуют вполне определенной задаче. Как видно, левые части этих уравнений уже не являются квадратичными функциями токов $\mathbf{I}_{0k}$ ($k = \overline{1,n}$). В связи с этим их решения не обладают свойством знаковой симметрии (при $\mathbf{b}\neq 0$). После определения решения ($\mathbf{I}_{01}$) системы (15) соответствующее значение $\mathbf{I}_{02}$ находится из соотношения (14). Векторы $\mathbf{I}_{01}$ и $\mathbf{I}_{02}$ полностью определяют вектор $\mathbf{I}_0$ равновесных токов.

Анализируя векторы решений $\mathbf{I}_0$, можно выделить такие координаты этого вектора, которые оказывают доминирующее влияние на уравновешивание нагрузки $\mathbf{b}$. Эти доминирующие токи и следует взять в качестве "независимых".

Рассмотрим также и другой подход, связанный с введением ограничений. Конструкция аэромагнитного комплекса, как правило, накладывает ограничения на допустимые значения токов в катушках электромагнитов

$$\left|I_j\right| < b_j ,\ j = \overline{1,\ell} . \qquad (16)$$

Прогнозируемое сочетание параметров позволяет задавать равновесные значения токов до 100 А (т. е. b_j = 100 А). Учет ограничений вида (16) сводит задачу к задаче решения системы нелинейных уравнений с ограничениями типа неравенств. Ограничения могут задаваться и в виде системы линейных уравнений

$$\mathbf{B}_I \cdot \mathbf{I} = \mathbf{b} . \qquad (17)$$

Этот подход наиболее эффективен при расчете сверхпроводящих элементов.

Ограничения на величины токов в катушках могут быть заданы также в виде квадратичных форм

$$\mathbf{I}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{I} = b_i , \qquad (18)$$

где $\mathbf{B}_i$ — матрица соответствующей квадратичной формы.

Учет ограничений в виде (18) также приводит к решению системы ℓ нелинейных уравнений относительно ℓ неизвестных.

Выбор той или иной формы ограничений на значения токов является важным этапом в разработке математической модели аэромагнитного комплекса. В качестве таких ограничений могут рассматриваться, например, требования к симметричности распределения некоторых токов (схемы дифференциального типа), к обеспечению автономности по начальным условиям, к обеспечению заданной статической устойчивости равновесных состояний [4].

Сокращение избыточности решений системы (12) аналитическими методами основывается на теории результантов и наибольших общих делителей.

Применение теории результантов для нахождения равновесных состояний аэромагнитного комплекса

Наряду с принципиальной возможностью прямого численного решения системы (12) целесообразно использование возможностей сокращения числа уравнений и неизвестных, т. е. исключения переменных до получения одного уравнения с одной неизвестной и последующими обратными подстановками.

В случае использования ферромагнитного основания силы $\mathbf{Q}_m$ являются квадратичными функциями токов, т.е. система уравнений (12) является системой n уравнений второго порядка для m переменных, где n — число управляемых координат (минимум — 1, максимум — 6); m — число соленоидов аэромагнитного комплекса (число токов). Левые части уравнений (12) равновесия АМК являются квадратическими функциями нескольких переменных (токов I_k в катушках соленоидов). Поэтому можно использовать теорию результантов [1] для нахождения дополнительных связей между переменными уравнений равновесия с целью сведения исходной системы полиномиальных уравнений к одному полиномиальному уравнению относительно одной переменной. Проблема же нахождения корней полиномиальных уравнений практически любой степени является хорошо изученной задачей.

Решение уравнений равновесия (12) сводится к задаче решения системы n уравнений второго порядка с m неизвестными I_k, $k=\overline{1,m}$. Основные черты реализуемого подхода рассмотрены в приложении на примере системы трех уравнений типа (12) с тремя неизвестными, т. е. случай $n=m=3$.

Предлагаемый подход сводится к нахождению дополнительных уравнений, которым должны удовлетворять решения исходной системы нелинейных уравнений. Как правило, дополнительные уравнения содержат меньше независимых переменных, что снижает сложность решения исходной задачи.

Однако не все формальные решения системы (12) дают решение исходной задачи. Более того, это решение должно быть единственным — оптимальным, удовлетворяющим конкретным условиям проектирования. Существенным обстоятельством, облегчающим поиск оптимального решения, является свойство знаковой симметрии решений системы (12). Особый интерес представляет такая конструкция аэромагнитного комплекса, в которой имеется больше катушек (управляющих токов), чем число управляемых координат. В этом случае число возможных равновесных значений токов бесконечно велико, поэтому имеется больше возможностей для выбора оптимального решения. В очень широких пределах изменять равновесные значения токов позволяет применение дифференциальных схем.

Можно предложить следующий алгоритм выбора равновесного значения:

определить все решения уравнения (12);

отбросить физически нереализуемые решения (комплексные решения; решения, выводящие за пределы конструкционных ограничений);

определить статические и динамические характеристики системы для каждого равновесного состояния, сформировать группы равноценных (относительно характеристик аэромагнитного комплекса) равновесных положений (области Парето);

выбрать оптимальное равновесное положение (например, обеспечивающее минимум потребляемой аэромагнитным комплексом мощности или максимальный размер области устойчивости).

При наличии современной вычислительной техники и разработанных автором алгоритмов нахождение оптимальных равновесных состояний АМК является вполне разрешимой технической задачей.

Статическая устойчивость равновесных состояний аэромагнитного комплекса

Влияние равновесных значений на величину области статической устойчивости можно оценить [5] по формуле

$$\Delta X_j = -2\sum_{k=1}^{n} d_{j,k}\cdot C_{k,j} \Big/ C^*_{j,j}\,, \tag{19}$$

где

$$j=\overline{1,n},\quad \mathbf{C}^* = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}_j\cdot\mathbf{C},$$

$$\mathbf{C}^*_{j,j} = \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{\ell} C_{k,j}\cdot A_{j,i,k}\cdot C_{k,j},$$

$$d_j = \mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{I}_0,\quad \mathbf{I}=\mathbf{I}_0+\mathbf{C}\cdot\Delta\mathbf{X},\quad \mathbf{I}_0 \text{ —}$$

равновесные значения токов; $Q_{m_j} = \mathbf{I}_0{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_j\cdot\mathbf{I}$; $\mathbf{C}$ — матрица коэффициентов закона управления.

При выборе равновесных значений токов следует максимизировать область (19) их статической устойчивости. Поскольку при уменьшении равновесных значений токов уменьшается и область статической устойчивости системы, более предпочтительными по критерию статической устойчивости являются дифференциальные схемы аэромагнитных комплексов.

4. СИНТЕЗ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ МАГНИТНЫМ ПОДВЕСОМ С УЧЕТОМ ИНЕРЦИОННОСТИ ТОКОВ И НАМАГНИЧИВАНИЯ

Учет инерционности токов

После линеаризации уравнения (11) в окрестности равновесного положения получим искомый вид системы уравнений движения модели ЛА:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{X}^*}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{B}_{R1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}^*}{\mathrm{d}t} + \mathbf{B}_{R0}\mathbf{X}^* + \mathbf{K}_X\mathbf{X}^* + \mathbf{K}_I\mathbf{I}^* + \mathbf{Q}^*, \tag{20}$$

где $\mathbf{I}$ — вектор токов в соленоидах АМК; $\mathbf{K}_X$ — матрица частных производных от обобщенных аэродинамических нагрузок по координатам; $\mathbf{K}_I$ — матрица частных производных от обобщенных магнитных нагрузок по токам; $\mathbf{Q}^* = \mathbf{P}_g^{-1}\mathbf{P}_B\,(\mathbf{Q}_a - \mathbf{Q}_{a0})$; $\mathbf{Q}_{a0}$ — значения аэродинамических нагрузок, соответствующие равновесному положению; $\mathbf{X}^* = \left(X_i^*\right)$, $i=\overline{1,6}$; * — означает, что измерение соответствующей переменной производится относительно ее значения в состоянии равновесия АМК.

Динамика токов $\mathbf{I}$ описывается векторно-матричным уравнением:

$$\mathbf{L}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{I}^*}{\mathrm{d}t} + \mathbf{R}\cdot\mathbf{I}^* = \mathbf{U}^*, \tag{21}$$

где $\mathbf{L}$ — матрица взаимной индукции соленоидов

АМК; $\mathbf{R} = \mathbf{diag}(R_1, \cdots, R_\ell)$ — матрица активных сопротивлений соленоидов АМК; ℓ — количество соленоидов; $\mathbf{U}$ — вектор управляющих напряжений, приложенных к соленоидам АМК. Матрицы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{R}$ определяются в ходе численных расчетов.

Для расширения возможностей системы можно использовать следующий обобщенный закон управления:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}^*}{\mathrm{d}t} + \mathbf{C}_U \cdot \mathbf{U}^* = \\ &= \mathbf{C}_X \cdot \mathbf{X}^* + \mathbf{C}_{X1} \cdot \dot{\mathbf{X}}^* + \\ &\quad + \mathbf{C}_{X2} \cdot \ddot{\mathbf{X}}^* + \mathbf{C}_I \cdot \mathbf{I}^* + \mathbf{C}_{I1} \cdot \dot{\mathbf{I}}^* + \\ &\quad + \mathbf{C}_{sX} \cdot \int_0^t \mathbf{X}^* \mathrm{d}t + \mathbf{C}_{sI} \cdot \int_0^t \mathbf{I}^* \mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{22}$$

где $\mathbf{C}_U, \mathbf{C}_X, \mathbf{C}_{X1}, \mathbf{C}_{X2}, \mathbf{C}_I, \mathbf{C}_{I1}, \mathbf{C}_{sX}, \mathbf{C}_{sI}$ — матрицы постоянных коэффициентов. Конкретная структура закона управления уточняется в зависимости от решаемой задачи.

Для упрощения последующего изложения используем преобразование Лапласа уравнений (20)–(22), составленных для отклонений от положения равновесия, в предположении, что в начальный момент времени первообразные всех переменных ($\mathbf{U}, \mathbf{X}, \mathbf{I}$) и их производные обращаются в нуль:

$$\mathrm{p}^2\mathbf{X} = \mathrm{p}\mathbf{B}_{R1} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}_{R0} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{K}_X \cdot \mathbf{X} + \mathbf{K}_I \cdot \mathbf{I} + \mathbf{Q};$$

$$(\mathrm{p}\mathbf{L} + \mathbf{R}) \cdot \mathbf{I} = \mathbf{U};$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{p}\mathbf{E} + \mathbf{C}_U) \cdot \mathbf{U} &= \mathbf{C}_X \cdot \mathbf{X} + \\ &+ \mathbf{C}_{X1} \cdot \mathrm{p}\mathbf{X} + \mathbf{C}_{X2} \cdot \mathrm{p}^2\mathbf{X} + \mathbf{C}_I \cdot \mathbf{I} + \\ &+ \mathbf{C}_{I1} \cdot \mathrm{p}\mathbf{I} + \mathbf{C}_{sX} \cdot \frac{\mathbf{X}}{\mathrm{p}} + \mathbf{C}_{sI} \cdot \frac{\mathbf{I}}{\mathrm{p}}.\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \mathbf{C}_X \cdot \mathbf{X} + \mathbf{C}_{X1} \cdot \mathrm{p}\mathbf{X} + \mathbf{C}_{X2} \cdot \mathrm{p}^2\mathbf{X} + \\ &+ \mathbf{C}_I \cdot \mathbf{I} + \mathbf{C}_{I1} \cdot \mathrm{p}\mathbf{I} + \mathbf{C}_{sX} \cdot \frac{\mathbf{X}}{\mathrm{p}} + \mathbf{C}_{sI} \cdot \frac{\mathbf{I}}{\mathrm{p}}.\end{aligned}$$

Тогда можно записать:

$$\begin{aligned}&\mathbf{U} = (\mathrm{p}\mathbf{E} + \mathbf{C}_U)^{-1} \cdot \mathbf{d}; \\ &(\mathrm{p}\mathbf{E} + \mathbf{C}_U)(\mathrm{p}\mathbf{L} + \mathbf{R}) \cdot \mathbf{I} = \mathbf{d},\end{aligned}$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица соответствующей размерности.

Перемножив последнее уравнение на p и перенеся все слагаемые с $\mathbf{I}$ влево, а с $\mathbf{X}$ вправо, получим:

$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{p}^3\mathbf{L} + \mathrm{p}^2(\mathbf{R} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}_U - \mathbf{C}_{I1}) + \right. \\ &\left. + \mathrm{p}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{C}_U - \mathbf{C}_I) - \mathbf{C}_{sI}\right) \cdot \mathbf{I} = \\ &= \left(\mathbf{C}_{sX} + \mathrm{p}\mathbf{C}_X + \mathrm{p}^2\mathbf{C}_{X1} + p^3\mathbf{C}_{X2}\right) \cdot \mathbf{X}.\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}\alpha = &\left(\mathrm{p}^3\mathbf{L} + \mathrm{p}^2(\mathbf{R} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}_U - \mathbf{C}_{I1}) + \right. \\ &\left. + \mathrm{p}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{C}_U - \mathbf{C}_I) - \mathbf{C}_{sI}\right);\end{aligned}$$

$$\beta = \left(\mathbf{C}_{sX} + \mathrm{p}\mathbf{C}_X + \mathrm{p}^2\mathbf{C}_{X1} + p^3\mathbf{C}_{X2}\right).$$

Подставив $\mathbf{I} = \alpha^{-1} \cdot \beta \cdot \mathbf{X}$ в первое уравнение системы, получим

$$\begin{aligned}\mathrm{p}^2\mathbf{X} &= p\mathbf{B}_{R1} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}_{R0} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{K}_X \cdot \mathbf{X} + \\ &+ \mathbf{K}_I \cdot \alpha^{-1} \cdot \beta \cdot \mathbf{X} + \mathbf{Q}.\end{aligned}$$

Помножим обе части полученного уравнения на $\alpha \cdot \mathbf{K}_I^{-1}$:

$$\begin{aligned}&\alpha \cdot \mathbf{K}_I^{-1} \cdot \mathrm{p}^2\mathbf{X} = \mathrm{p}\alpha \cdot \mathbf{K}_I^{-1} \cdot \mathbf{B}_{R1} \cdot \mathbf{X} + \\ &+ \alpha \cdot \mathbf{K}_I^{-1} \cdot (\mathbf{B}_{R0} + \mathbf{K}_X) \cdot \mathbf{X} + \\ &+ \beta \cdot \mathbf{X} + \alpha \cdot \mathbf{K}_I^{-1} \cdot \mathbf{Q}.\end{aligned}$$

Выполнив умножение и сгруппировав все слагаемые с одинаковыми степенями p, получим:

$$\begin{aligned}&\{\mathbf{L} \cdot \mathbf{K}_I^{-1}\mathrm{p}^5 + \\ &+ [(\mathbf{R} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}_U - \mathbf{C}_{I1}) \cdot \mathbf{K}_I^{-1} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{K}_I^{-1} \cdot \mathbf{B}_{R1}]\mathrm{p}^4 + \\ &+ [(\mathbf{R} \cdot \mathbf{C}_U - \mathbf{C}_I) \cdot \mathbf{K}_I^{-1} - \\ &- (\mathbf{R} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}_U - \mathbf{C}_{I1}) \cdot \mathbf{K}_I^{-1} \cdot \mathbf{B}_{R1} - \\ &- \mathbf{L} \cdot \mathbf{K}_I^{-1}(\mathbf{B}_{R0} + \mathbf{K}_X) - \mathbf{C}_{X2}]\mathrm{p}^3 + \\ &+ [-\mathbf{C}_{sI} \cdot \mathbf{K}_I^{-1} - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{C}_U - \mathbf{C}_I) \cdot \mathbf{K}_I^{-1} \cdot \mathbf{B}_{R1} - \\ &- (\mathbf{R} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}_U - \mathbf{C}_{I1}) \times \\ &\times \mathbf{K}_I^{-1}(\mathbf{B}_{R0} + \mathbf{K}_X) - \mathbf{C}_{X1}]\mathrm{p}^2 + \\ &+ [-\mathbf{C}_{sI} \cdot \mathbf{K}_I^{-1} \cdot \mathbf{B}_{R1} - \\ &- (\mathbf{R} \cdot \mathbf{C}_U - \mathbf{C}_I) \cdot \mathbf{K}_I^{-1}(\mathbf{B}_{R0} + \mathbf{K}_X) - \mathbf{C}_X]\mathrm{p} + \\ &+ [\mathbf{C}_{sI} \cdot \mathbf{K}_I^{-1}(\mathbf{B}_{R0} + \mathbf{K}_X) - \mathbf{C}_{sX}]\} \cdot \mathbf{X} = \\ &= \alpha \cdot \mathbf{K}_I^{-1} \cdot \mathbf{Q}.\end{aligned}$$

В результате матричное полиномиальное уравнение для определения $\mathbf{X}$ в зависимости от $\mathbf{Q}$ будет иметь вид:

$$\begin{aligned}&(\mathrm{p}^5 + \mathrm{p}^4\mathbf{K}_4 + \mathrm{p}^3\mathbf{K}_3 + \mathrm{p}^2\mathbf{K}_2 + \mathrm{p}\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_0) \cdot \mathbf{X} = \\ &= -\mathbf{D}_3(\mathrm{p}^3\mathbf{E} + \mathrm{p}^2\mathbf{D}_2 + \mathrm{p}\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_0) \cdot \mathbf{Q},\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{K}_4 = \mathbf{K}_I \cdot \mathbf{L}^{-1} \times \times\left[\left(\mathbf{R} + \mathbf{L}\cdot\mathbf{C}_U - \mathbf{C}_{I1}\right)\cdot\mathbf{K}_I^{-1} - \mathbf{L}\cdot\mathbf{K}_I^{-1}\cdot\mathbf{B}_{R1}\right];$$

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_I \cdot \mathbf{L}^{-1} \times \times\left[\left(\mathbf{R}\cdot\mathbf{C}_U - \mathbf{C}_I\right)\cdot\mathbf{K}_I^{-1} - -\left(\mathbf{R} + \mathbf{L}\cdot\mathbf{C}_U - \mathbf{C}_{I1}\right)\cdot\mathbf{K}_I^{-1}\cdot\mathbf{B}_{R1} - -\mathbf{L}\cdot\mathbf{K}_I^{-1}\left(\mathbf{B}_{R0} + \mathbf{K}_X\right) - \mathbf{C}_{X2}\right];$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_I \cdot \mathbf{L}^{-1} \times \times\left[-\mathbf{C}_{sI}\cdot\mathbf{K}_I^{-1} - \left(\mathbf{R}\cdot\mathbf{C}_U - \mathbf{C}_I\right)\cdot\mathbf{K}_I^{-1}\cdot\mathbf{B}_{R1} - -\left(\mathbf{R} + \mathbf{L}\cdot\mathbf{C}_U - \mathbf{C}_{I1}\right)\cdot\mathbf{K}_I^{-1}\left(\mathbf{B}_{R0} + \mathbf{K}_X\right) - \mathbf{C}_{X1}\right];$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_I \cdot \mathbf{L}^{-1} \cdot \left[-\mathbf{C}_{sI}\cdot\mathbf{K}_I^{-1}\cdot\mathbf{B}_{R1} - -\left(\mathbf{R}\cdot\mathbf{C}_U - \mathbf{C}_I\right)\cdot\mathbf{K}_I^{-1}\left(\mathbf{B}_{R0} + \mathbf{K}_X\right) - \mathbf{C}_X\right];$$

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_I \cdot \mathbf{L}^{-1} \cdot \left[\mathbf{C}_{sI}\cdot\mathbf{K}_I^{-1}\left(\mathbf{B}_{R0} + \mathbf{K}_X\right) - \mathbf{C}_{sX}\right];$$

$$\mathbf{D}_3 = \mathbf{K}_I \cdot \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{L}\cdot\mathbf{K}_I^{-1} = \mathbf{E};$$

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{K}_I \cdot \mathbf{L}^{-1} \cdot \left(\mathbf{R} + \mathbf{L}\cdot\mathbf{C}_U - \mathbf{C}_{I1}\right);$$

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{K}_I \cdot \mathbf{L}^{-1} \cdot \left(\mathbf{R}\cdot\mathbf{C}_U - \mathbf{C}_I\right);$$

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{K}_I \cdot \mathbf{L}^{-1}\mathbf{C}_{sI}\cdot\mathbf{K}_I^{-1}.$$

Учет инерционности намагничивания

При построении математической модели силового взаимодействия АМК и модели ЛА будем предполагать, что в статике выполняется соотношение (12).

Система операторных уравнений движения модели ЛА с учетом токов намагничивания примет вид:

$$\mathrm{p}^2\mathbf{X} = \mathrm{p}\mathbf{B}_{R1}\cdot\mathbf{X} + \mathbf{B}_{R0}\cdot\mathbf{X} + \mathbf{K}_X\cdot\mathbf{X} + +\mathbf{K}_I\cdot\mathbf{I} + \mathbf{K}_{IH}\cdot\mathbf{I}_H + \mathbf{Q},$$

$$(\mathrm{p}\mathbf{L} + \mathbf{R})\cdot\mathbf{I} = \mathbf{U},$$

$$\mathrm{p}\left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{\xi 1}\cdot\mathbf{I}_H\right) + \mathbf{A}_\xi\left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{\xi 2}\cdot\mathbf{I}_H\right) = 0,$$

$$\left(\mathrm{p}\mathbf{E} + \mathbf{C}_U\right)\cdot\mathbf{U} = \mathbf{C}_X\cdot\mathbf{X} + \mathbf{C}_{X1}\cdot\mathrm{p}\mathbf{X} + +\mathbf{C}_{X2}\cdot\mathrm{p}^2\mathbf{X} + \mathbf{C}_I\cdot\mathbf{I} + \mathbf{C}_{I1}\cdot\mathrm{p}\mathbf{I} + +\mathbf{C}_{sX}\cdot\frac{\mathbf{X}}{p} + \mathbf{C}_{sI}\cdot\frac{\mathbf{I}}{p},$$

где $\mathbf{I}_H$ — токи намагничивания (вектор фиктивных токов, соответствующих напряженности магнитного поля, создаваемой намагниченными ферромагнитными объектами); $\mathbf{K}_{IH}$ — матрица постоянных коэффициентов.

Выразим зависимость $\left(\mathbf{K}_I\cdot\mathbf{I} + \mathbf{K}_{IH}\cdot\mathbf{I}_H\right)$ от $\mathbf{X}$.

$$\mathbf{K}_I\cdot\mathbf{I} + \mathbf{K}_{IH}\cdot\mathbf{I}_H = \left[\mathbf{K}_I + \mathbf{K}_{IH}\cdot\left(\mathrm{p}\mathbf{K}_{\xi 1} + \mathbf{A}_\xi\cdot\mathbf{K}_{\xi 2}\right)^{-1}\left[\mathrm{p}\left(\mathbf{E} + \mathbf{K}_{\xi 1}\right) + \mathbf{A}_\xi\cdot\left(\mathbf{E} + \mathbf{K}_{\xi 2}\right)\right]\right]\cdot\mathbf{I} =$$

$$= \mathbf{K}_{IH}\cdot\left(\mathrm{p}\mathbf{K}_{\xi 1} + \mathbf{A}_\xi\cdot\mathbf{K}_{\xi 2}\right)^{-1}\left[\left(\mathrm{p}\mathbf{K}_{\xi 1} + \mathbf{A}_\xi\cdot\mathbf{K}_{\xi 2}\right)\cdot\mathbf{K}_{IH}^{-1}\cdot\mathbf{K}_I + \left[\mathrm{p}\left(\mathbf{E} + \mathbf{K}_{\xi 1}\right) + \mathbf{A}_\xi\cdot\left(\mathbf{E} + \mathbf{K}_{\xi 2}\right)\right]\right]\cdot\mathbf{I} =$$

$$= \mathbf{K}_{IH}\cdot\left(\mathrm{p}\mathbf{K}_{\xi 1} + \mathbf{A}_\xi\cdot\mathbf{K}_{\xi 2}\right)^{-1}\cdot\left\{\mathrm{p}\left[\mathbf{K}_{\xi 1}\cdot\mathbf{K}_{IH}^{-1}\cdot\mathbf{K}_I + \left(\mathbf{E} + \mathbf{K}_{\xi 1}\right)\right] + +\mathbf{A}_\xi\cdot\mathbf{K}_{\xi 2}\cdot\mathbf{K}_{IH}^{-1}\cdot\mathbf{K}_I + \mathbf{A}_\xi\cdot\left(\mathbf{E} + \mathbf{K}_{\xi 2}\right)\right\}\cdot\mathbf{I}.$$

Обозначим

$$\Pi = \mathbf{A}_\xi\cdot\mathbf{K}_{\xi 2}\cdot\mathbf{K}_{IH}^{-1}\cdot\mathbf{K}_I + \mathbf{A}_\xi\cdot\left(\mathbf{E} + \mathbf{K}_{\xi 2}\right),$$

$$\mathbf{T} = \left[\mathbf{A}_\xi\cdot\mathbf{K}_{\xi 2}\cdot\mathbf{K}_{IH}^{-1}\cdot\mathbf{K}_I + \mathbf{A}_\xi\cdot\left(\mathbf{E} + \mathbf{K}_{\xi 2}\right)\right]^{-1}\times\left[\mathbf{K}_{\xi 1}\cdot\mathbf{K}_{IH}^{-1}\cdot\mathbf{K}_I + \left(\mathbf{E} + \mathbf{K}_{\xi 1}\right)\right].$$

Тогда получим

$$\mathbf{K}_I\cdot\mathbf{I} + \mathbf{K}_{IH}\cdot\mathbf{I}_H = \mathbf{K}_{IH}\cdot\left(\mathrm{p}\mathbf{K}_{\xi 1} + \mathbf{A}_\xi\cdot\mathbf{K}_{\xi 2}\right)^{-1}\cdot\Pi\cdot(\mathbf{T}\mathrm{p} + \mathbf{E})\cdot\mathbf{I} =$$

$$= \mathbf{K}_{IH}\cdot\left(\mathrm{p}\mathbf{K}_{\xi 1} + \mathbf{A}_\xi\cdot\mathbf{K}_{\xi 2}\right)^{-1}\Pi\cdot(\mathbf{T}\mathrm{p} + \mathbf{E})\cdot\left(\mathrm{p}^3\mathbf{L} + \mathrm{p}^2\left(\mathbf{R} + \mathbf{L}\cdot\mathbf{C}_U - \mathbf{C}_{I1}\right) + \mathrm{p}\left(\mathbf{R}\cdot\mathbf{C}_U - \mathbf{C}_I\right) - \mathbf{C}_{sI}\right)^{-1}\times \times\left(\mathbf{C}_{sX} + \mathrm{p}\mathbf{C}_X + \mathrm{p}^2\mathbf{C}_{X1} + \mathrm{p}^3\mathbf{C}_{X2}\right)\cdot\mathbf{X}.$$

Полученное выражение является произведением дробно-рациональной матричной функции на вектор **X**. Наглядность последующих векторно-матричных преобразований сохранится в том и только в том случае, если матрицы

$$\left(\mathbf{T}\mathrm{p}+\mathbf{E}\right)$$

и

$$\left(\mathrm{p}^3\mathbf{L}+\mathrm{p}^2\left(\mathbf{R}+\mathbf{L}\cdot\mathbf{C}_U-\mathbf{C}_{I1}\right)+\right.$$
$$\left.+\mathrm{p}\left(\mathbf{R}\cdot\mathbf{C}_U-\mathbf{C}_I\right)-\mathbf{C}_{sI}\right)^{-1}$$

— коммутирующие.

В частности, если **T** — диагональная матрица с одинаковыми коэффициентами, то можно воспользоваться свойством коммутируемости единичных матриц в матричном произведении:

$$\mathbf{K}_I\cdot\mathbf{I}+\mathbf{K}_{IH}\cdot\mathbf{I}_H=$$
$$=\mathbf{K}_{IH}\cdot\left(\mathrm{p}\mathbf{K}_{\xi1}+\mathbf{A}_\xi\cdot\mathbf{K}_{\xi2}\right)^{-1}\cdot\Pi\cdot\left(\mathbf{T}\mathrm{p}+\mathbf{E}\right)\cdot\mathbf{I}=$$
$$=\mathbf{K}_{IH}\cdot\left(\mathrm{p}\mathbf{K}_{\xi1}+\mathbf{A}_\xi\cdot\mathbf{K}_{\xi2}\right)^{-1}\times$$
$$\times\Pi\cdot\left(\mathrm{p}^3\mathbf{L}+\mathrm{p}^2\left(\mathbf{R}+\mathbf{L}\cdot\mathbf{C}_U-\mathbf{C}_{I1}\right)+\right.$$
$$\left.+\mathrm{p}\left(\mathbf{R}\cdot\mathbf{C}_U-\mathbf{C}_I\right)-\mathbf{C}_{sI}\right)^{-1}\times$$
$$\times\left(\mathbf{T}\mathrm{p}+\mathbf{E}\right)\times$$
$$\times\left(\mathbf{C}_{sX}+\mathrm{p}\mathbf{C}_X+\mathrm{p}^2\mathbf{C}_{X1}+\mathrm{p}^3\mathbf{C}_{X2}\right)\cdot\mathbf{X}=$$
$$=\left(\mathrm{p}^4\mathbf{D}_4+\mathrm{p}^3\mathbf{D}_3+\mathrm{p}^2\mathbf{D}_2+\mathrm{p}^1\mathbf{D}_1+\mathbf{D}_0\right)^{-1}\times$$
$$\times\left(\mathrm{p}^4\mathbf{P}_4+\mathrm{p}^3\mathbf{P}_3+\mathrm{p}^2\mathbf{P}_2+\mathrm{p}^1\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_0\right)\cdot\mathbf{X}.$$

В результате получим матричное уравнение для определения **X** в зависимости от **Q**:

$$\left(\mathrm{p}^6\mathbf{K}_6+\mathrm{p}^5\mathbf{K}_5+\mathrm{p}^4\mathbf{K}_4+\mathrm{p}^3\mathbf{K}_3+\right.$$
$$\left.+\mathrm{p}^2\mathbf{K}_2+\mathrm{p}\mathbf{K}_1+\mathbf{K}_0\right)\cdot\mathbf{X}= \qquad (23)$$
$$=-\left(\mathrm{p}^4\mathbf{D}_4+\mathrm{p}^3\mathbf{D}_3+\mathrm{p}^2\mathbf{D}_2+\mathrm{p}\mathbf{D}_1+\mathbf{D}_0\right)\cdot\mathbf{Q},$$

где

$$\mathbf{K}_6=\mathbf{D}_4,\ \mathbf{K}_5=\left(\mathbf{D}_3-\mathbf{D}_4\cdot\mathbf{B}_{R1}\right),$$
$$\mathbf{K}_4=\left[\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_4\cdot\left(\mathbf{B}_{R0}+\mathbf{K}_x\right)-\mathbf{D}_3\cdot\mathbf{B}_{R1}\right]-\mathbf{P}_4,$$
$$\mathbf{K}_3=\left[\mathbf{D}_1-\mathbf{D}_3\cdot\left(\mathbf{B}_{R0}+\mathbf{K}_x\right)-\mathbf{D}_2\cdot\mathbf{B}_{R1}\right]-\mathbf{P}_3,$$
$$\mathbf{K}_2=\left[\mathbf{D}_0-\mathbf{D}_2\cdot\left(\mathbf{B}_{R0}+\mathbf{K}_x\right)-\mathbf{D}_1\cdot\mathbf{B}_{R1}\right]-\mathbf{P}_2,$$
$$\mathbf{K}_1=-\left[\mathbf{D}_1\cdot\left(\mathbf{B}_{R0}+\mathbf{K}_x\right)+\mathbf{D}_0\cdot\mathbf{B}_{R1}\right]-\mathbf{P}_1,$$
$$\mathbf{K}_0=-\mathbf{D}_0\cdot\left(\mathbf{B}_{R0}+\mathbf{K}_x\right)-\mathbf{P}_0,$$
$$\mathbf{P}_4=\mathbf{T}\cdot\mathbf{C}_{X2},\ \mathbf{P}_3=\mathbf{T}\cdot\mathbf{C}_{X1}+\mathbf{C}_{X2},$$
$$\mathbf{P}_2=\mathbf{T}\cdot\mathbf{C}_X+\mathbf{C}_{X1},$$
$$\mathbf{P}_1=\mathbf{T}\cdot\mathbf{C}_{sX}+\mathbf{C}_X;\mathbf{P}_0=\mathbf{C}_{sX},$$
$$\mathbf{D}_4=\mathbf{L}\cdot\Pi^{-1}\mathbf{K}_{\xi1}\cdot\mathbf{K}_{IH}^{-1},$$
$$\mathbf{D}_3=\left(\mathbf{R}+\mathbf{L}\cdot\mathbf{C}_U-\mathbf{C}_{I1}\right)\cdot\Pi^{-1}\mathbf{K}_{\xi1}\cdot\mathbf{K}_{IH}^{-1}+$$
$$+\mathbf{L}\cdot\Pi^{-1}\mathbf{A}_\xi\cdot\mathbf{K}_{\xi2}\cdot\mathbf{K}_{IH}^{-1},$$
$$\mathbf{D}_2=\left(\mathbf{R}\cdot\mathbf{C}_U-\mathbf{C}_I\right)\cdot\Pi^{-1}\mathbf{A}_\xi\cdot\mathbf{K}_{\xi2}\cdot\mathbf{K}_{IH}^{-1}+$$
$$+\left(\mathbf{R}\cdot\mathbf{C}_U-\mathbf{C}_I\right)\cdot\Pi^{-1}\mathbf{K}_{\xi1}\cdot\mathbf{K}_{IH}^{-1},$$
$$\mathbf{D}_1=\left(\mathbf{R}\cdot\mathbf{C}_U-\mathbf{C}_I\right)\cdot\Pi^{-1}\mathbf{A}_\xi\cdot\mathbf{K}_{\xi2}\cdot\mathbf{K}_{IH}^{-1}-$$
$$-\mathbf{C}_{sI}\cdot\Pi^{-1}\mathbf{K}_{\xi1}\cdot\mathbf{K}_{IH}^{-1},$$
$$\mathbf{D}_0=-\mathbf{C}_{sI}\cdot\Pi^{-1}\mathbf{A}_\xi\cdot\mathbf{K}_{\xi2}\cdot\mathbf{K}_{IH}^{-1}.$$

Как следует из анализа структуры коэффициентов $\mathbf{K}_6,\mathbf{K}_5,\mathbf{K}_4,\mathbf{K}_3,\mathbf{K}_2,\mathbf{K}_1,\mathbf{K}_0,\mathbf{D}_4,\mathbf{D}_3,\mathbf{D}_2,\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_0$, число независимых управляемых матричных параметров равно семи: $\left(\mathbf{R}+\mathbf{L}\cdot\mathbf{C}_U-\mathbf{C}_{I1}\right)$, $\left(\mathbf{R}\cdot\mathbf{C}_U-\mathbf{C}_I\right)$, $\mathbf{C}_{sI},\mathbf{C}_{X2},\mathbf{C}_{X1},\mathbf{C}_X,\mathbf{C}_{sX}$. Синтез закона управления можно произвести, исходя из желаемого поведения вектора **X*** координат АМК. Для этого необходимо решить задачу нахождения оптимальных значений семи матричных коэффициентов, характеризующих динамику системы, например $\left(\mathbf{P}_3,\mathbf{P}_2,\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_0,\mathbf{D}_2,\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_0\right)$, при ограничениях на значения остальных коэффициентов, входящих в уравнение (23) и полностью характеризующих динамику системы. Указанные ограничения должны отражать прежде всего условия управляемости, наблюдаемости и устойчивости, а также требования к качеству переходных процессов.

Так, для обеспечения астатизма первого порядка достаточно положить $\mathbf{D}_0=0$; тогда необходимо выбрать значения $\mathbf{C}_{sX}\neq0$, $\mathbf{C}_{sI}=0$.

Полученные соотношения позволяют проектировать систему управления АМК с учетом инерционности намагничивания.

Автономность по начальным условиям

Одним из важнейших требований к аэромагнитным комплексам является обеспечение автономности по управляемым координатам.

Для обеспечения автономности АМК по Баксенбому–Гуду [8] должны быть выполнены два условия: 1) диагональность матриц $\mathbf{K}_i$, 2) автономность по начальным условиям.

Пусть при $t=0$ координаты равны $\mathbf{X}(t=0)=\mathbf{X}_0;\mathbf{I}(t=0)=\mathbf{I}_0;\dot{\mathbf{X}}(t=0)=\dot{\mathbf{X}}_0$.

Если $\mathbf{I}_0$ представимо в виде: $\mathbf{I}_0=\mathbf{P}_0\cdot\mathbf{X}_0+\mathbf{P}_1\cdot\dot{\mathbf{X}}_0$, то для обеспечения автономности необходимо, чтобы матрицы

$\left(\mathbf{B}_{R1}+\mathbf{K}_I\cdot\mathbf{P}_1\right)$ и $\left(\mathbf{B}_{R0}+\mathbf{K}_X+\mathbf{K}_I\cdot\mathbf{P}_0\right)$ были диагональны или равны нулю. В противном случае должно выполняться одно из следующих условий:
или $\mathbf{K}_I\cdot\mathbf{I}_0=0$ и $\mathbf{B}_{R1}$, $\left(\mathbf{B}_{R0}+\mathbf{K}_X\right)$ диагональны,
или $\mathbf{B}_{R1}\cdot\dot{\mathbf{X}}_0+\left(\mathbf{B}_{R0}+\mathbf{K}_X\right)\cdot\mathbf{X}_0+\mathbf{K}_I\cdot\mathbf{I}_0=0$,
или $\mathbf{B}_{R1}$ — диагональна
и $\left(\mathbf{B}_{R0}+\mathbf{K}_X\right)\cdot\mathbf{X}_0+\mathbf{K}_I\cdot\mathbf{I}_0=0$,
или $\left(\mathbf{B}_{R0}+\mathbf{K}_X\right)$ — диагональна
и $\mathbf{B}_{R1}\cdot\dot{\mathbf{X}}_0+\mathbf{K}_I\cdot\mathbf{I}_0=0$.

Приведенные условия являются дополнительными ограничениями, которые необходимо использовать при определении допустимых равновесных состояний, выборе конфигурации АМК и проектировании системы управления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработаны методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений второго порядка, пригодные для определения оптимальных равновесных состояний АМК.

Впервые предложена векторно-матричная математическая модель учета инерционности намагничивания ферромагнитных элементов, которая может быть использована при решении задачи оптимизации законов управления АМК. Приведено обобщенное операторное векторно-матричное уравнение для определения реакции АМК на входные воздействия. В качестве примера рассмотрены условия реализации астатического закона управления.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Обозначим:

$$I_1=x, I_2=y, I_3=z.$$

Систему (12) приведем к стандартному виду, предполагающему исключение на первом этапе переменной I_1.

$$\begin{aligned} f_1&=x^2+a_1x+a_2=0,\\ f_2&=x^2+b_1x+b_2=0,\\ f_3&=x^2+c_1x+c_2=0.\end{aligned}\qquad(24)$$

При этом a_1,b_1,c_1 линейны по y, z; a_2,b_2,c_2 содержат члены нулевого и второго порядков по y, z.

Необходимым и достаточным условиями наличия хотя бы одного общего решения первых двух уравнений является равенство нулю их результанта [7]:

$$R(f_1,f_2)=\begin{bmatrix}1&a_1&a_2&0\\0&1&a_1&a_2\\0&1&b_1&b_2\\1&b_1&b_2&0\end{bmatrix}=\qquad.\qquad(25)$$
$$=-\begin{bmatrix}(b_2-a_2)^2+\\+(b_1-a_1)\cdot(b_1\cdot a_2-b_2a_1)\end{bmatrix}=0.$$

Левая часть уравнения (25) представляет собой полином четвертого порядка по совокупности переменных y, z.

При выполнении (25) наибольший общий делитель (НОД) f_1 и f_2 есть

$$\text{НОД}(f_1,f_2)=(b_1-a_1)\cdot x+(b_2-a_2).$$

Далее возможны различные варианты решения задачи.

Вариант 1: $(b_1-a_1)\neq 0;\ (b_2-a_2)\neq 0$.

Тогда $\text{НОД}(f_1,f_2)$ имеет первый порядок по x и система $(f_1=0, f_2=0)$ имеет одну пару x_1,x_2 совпадающих корней вида

$$x_1=x_2=\frac{(a_2-b_2)}{(b_1-a_1)}.$$

Следующим шагом является определение $\text{НОД}(f_1,f_2,f_3)$. Так как $R(f_1,f_2,f_3)=$ $=R((f_1,f_2),f_3)$, условием наличия корня у исходной системы (24) является наличие корня у системы

$$\begin{aligned}&\text{НОД}(f_1,f_2)=(b_1-a_1)\cdot x+(b_2-a_2)=0,\\ &f_3=x^2+c_1x+c_2=0.\end{aligned}\qquad(26)$$

Необходимым и достаточным условиями наличия корня у системы (26) является равенство нулю соответствующего результанта:

$$\begin{aligned}&R((f_1,f_2),f_3)=\\ &=\begin{bmatrix}b_1-a_1&b_2-a_2&0\\0&b_1-a_1&b_2-a_2\\1&c_1&c_2\end{bmatrix}=\\ &=c_2(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2-\\ &\quad-c_1(b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)=0.\end{aligned}\qquad(27)$$

Правая часть формулы (27) — полином четвертой степени по y и z, так как c_2 содержит члены второго порядка, а a_1, b_1 — члены первого порядка относительно y, z.

В результате, необходимыми и достаточными условиями существования общего корня (тройки равных корней) $x_1 = x_2 = x_3$ уравнений исходной системы (24) являются равенства (25) и (27). Они образуют систему двух уравнений относительно *y* и *z*:

$$\begin{aligned} \varphi_1(y,z) &= (b_2 - a_2)^2 + \\ &\quad + (b_1 - a_1)\cdot(b_1 a_2 - b_2 a_1) = 0, \\ \varphi_2(y,z) &= c_2(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 - \\ &\quad - c_1(b_1 - a_1)\cdot(b_2 - a_2) = 0. \end{aligned} \qquad (28)$$

Решение (или несколько решений) системы (28) определяет искомые значения *y, z*. Далее возможно прямое численное решение этой системы или дальнейшее исключение одной из переменных по предыдущей схеме.

Вариант 2: $(b_1 - a_1) \neq 0; (b_2 - a_2) = 0$.

Из (25) следует требование $a_2 = 0$, а затем из (21) — $b_2 = 0$. При этом первые два уравнения (24) принимают вид:

$$f_1 = x^2 + a_1 x = 0,$$
$$f_2 = x^2 + b_1 x = 0$$

и имеют общий корень (одну пару совпадающих корней) $x_1 = x_2 = 0$. Другие корни f_1 и f_2 различны в силу $a_1 \neq b_1$. Из второго условия (27) получаем $c_2 = 0$, что является очевидным условием наличия и у f_3 нулевого корня. Таким образом, в варианте 2 существуют корни $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ при условиях выполнения равенств:

$$a_2(y,z) = b_2(y,z) = c_2(y,z) = 0.$$

Как функции двух аргументов эти три равенства в общем случае несовместны и не имеют общего решения (*y, z*), если только одно из равенств не является следствием двух других.

Вариант 3: $(b_1 - a_1) = 0; (b_2 - a_2) \neq 0$.
В этом случае условие (20) не может быть выполнено и, следовательно, общих решений *x* у f_1 и f_2 не существует.

Вариант 4: $(b_1 - a_1) = 0; (b_2 - a_2) = 0$.

Т.е. имеем систему:

$$f_1 = f_2 = x^2 + a_1 x + a_2 = 0,$$
$$f_3 = x^2 + c_1 x + c_2 = 0.$$

При $c_1 = a_1$, $c_2 = a_2$ имеет место совпадение двух корней каждого из уравнений. Соответствующая система четырех условий для функции двух переменных несовместна, если два из четырех неравенств не являются следствиями двух других.

При $c_1 \neq a_1, c_2 \neq a_2$ условием существования одного общего корня является $(c_2 - a_2)^2 + (c_1 - a_1)\cdot(c_1 a_2 - c_2 a_1) = 0$, что в сочетании с $(b_1 - a_1) = 0$, $(b_2 - a_2) = 0$ опять дает систему трех уравнений для функций двух переменных.

В результате процедура сведения системы (24) к системе (28) после нахождения каждого ее решения (*y, z*) требует проверки выполнения условий вариантов 1–4. Особенно критичным является вариант 3: $(b_1 - a_1) = 0$, $(b_2 - a_2) \neq 0$, при выполнении которого для данной пары (*y, z*) из условия (25) не следует существования общего корня *x* и, следовательно, решения (*x, y, z*) для исходной системы (24).

Более сложной является задача исключения одной из переменных в образовавшейся системе (28). Теперь НОД может иметь более высокую степень, более высокими оказываются показатели степеней полиномов, число и сложность условий существования общих корней.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шафаревич И.Р.* Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1972. 350 с.
2. *Важнов С.А., Калимов А.Г., Кошурников Е.К., Сведенцов М.Л.* Выбор конфигурации и расчет магнитного поля магнитной системы электродинамического подвеса // Задачи и методы экспериментальной аэродинамики: Сб. науч. тр. / Под ред. В.А. Коробкова. СПб.: ГААП, 1994. С. 26–33.
3. *Groom Nelson J.* Simplified Analytical Model of a Six-Degree-of-Freedom Large-Gap Magnetic Suspension System // NASA Technical Memorandum 112868. Hampton, Virginia: Langley Research Center. National Aeronautics and Space Administration, June 1997.
4. *Богословский С.В., Понырко С.А.* Построение линейного закона управления для магнитного подвеса // Научное издание "Задачи и методы экспериментальной аэродинамики" / Сб. научн. трудов; Под ред. В.А. Коробкова. СПб.: ГААП, 1994.С. 33–44.
5. *Богословский С.В.* Теория и практика аэромагнитного моделирования. СПб.: ГУАП, 1998. 140 с.
6. *Тикадзуми С.* Физика ферромагнетизма. Магнитные характеристики и практические применения; Пер. с японского. М.: Мир, 1987. 419 с.
7. Математическая энциклопедия / Гл. редактор *И.М. Виноградов*. М.: Советская энциклопедия, т. 4. Ок – Сло, 1984. 1216 с.

8. *Мееров М.В.* Исследование и оптимизация многосвязных систем управления. М.: Наука, 1986. 236 с.

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Материал поступил в редакцию 14.09.2000.

FEATURES OF MATHEMATICAL SIMULATION OF DYNAMICS OF THE AEROMAGNETIC COMPLEXES

S. V. Bogoslovsky

Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation

Mathematical vector-matrix models of the aeromagnetic complex and modules of the control are developed, methods of finding an optimum equilibrium condition of aeromagnetic complexes are considered. A method for optimization of parameters of control systems with magnetic hysteresis of ferromagnetic components is offered.