ISSN 0868–5886 НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 1999 том 9, № 4 с. 88–94

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК 517.968: 517.955.4

© В. Я. Иванов, С. И. Шевченко

О РАСЧЕТЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ПРИБОРАХ, ИМЕЮЩИХ ОБЛАСТИ, ЗАПОЛНЕННЫЕ ОБЪЕМНЫМ ЗАРЯДОМ

Задача Коши для уравнения Пуассона решается методом коллокации для соответствующего граничного интегрального уравнения. Вклад от облака объемного заряда в потенциал в любой точке пространства находится как сумма вкладов от прямоугольных ячеек сетки, вычисляемых аналитическим интегрированием соответствующих интегралов, в которых функция плотности объемного заряда интерполирована билинейным распределением.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в случае наличия в пространстве некоторого облака объемного заряда потенциал электростатического поля φ удовлетворяет уравнению Пуассона [1]:

$$\Delta\varphi = -\frac{Q}{\varepsilon_0}, \tag{1}$$

где $\varepsilon_o = 8{,}8542\cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная, Q — функция плотности объемного заряда (ПОЗ).

В ряде предшествующих работ [2–4], посвященных решению уравнения Лапласа, была показана высокая эффективность решения уравнения Лапласа методом граничных интегральных уравнений (высокая точность, широкий спектр сложных геометрий и т.д.). Поэтому решение уравнения Пуассона мы также попытались осуществить методом граничных интегральных уравнений.

Известно, что по аналогии с уравнением Лапласа уравнение Пуассона в "дифференциальной форме" (1) имеет эквивалентное ему интегральное уравнение [3]:

$$\varphi = \int\limits_{(S)} \sigma G\, dS + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int\limits_{(V)} Q G\, dV, \tag{2}$$

где первый интеграл берется по площади поверхности всех электродов (границы), а второй — по объему, занимаемому объемным зарядом (ОЗ), коэффициент $1/4\pi\varepsilon_o$, который должен быть перед первым членом, включен в функцию σ.

В большинстве работ решение уравнения Пуассона осуществляется следующим образом: полный потенциал φ разбивается на две части: вклад от ОЗ φ_2 и некоторый потенциал φ_1.

Если вклад φ_2 от ОЗ, удовлетворяющий уравнению Пуассона (1), представить в виде

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int\limits_{(V)} Q G\, dV, \tag{3}$$

то для оставшейся части потенциала φ_1 получается уравнение (граничная задача)

$$\begin{aligned} &\Delta\varphi_1 = 0, \\ &\varphi_1\big|_{S_i} = U_i - \varphi_2\big|_{S_i}, \end{aligned} \tag{4}$$

где второе уравнение (граничное условие) записывается для всех электродов (элементов границы), S_i — поверхность электрода номер i, U_i — значение потенциала на этом электроде, $\varphi_2\big|_{S_i}$ — значение функции φ_2 на поверхности этого электрода.

Т.о., задача нахождения потенциала или компонент электростатического поля разбивается на две:

1. По формуле (3) находится вклад φ_2 от ОЗ в точках коллокации задачи (4) и, подставив этот вклад во второе равенство (граничное условие) (4), находится функция плотности поверхностного заряда (ППЗ) $\sigma(\vec{y})$.

2. Известная функция ППЗ $\sigma(\vec{r})$ подставляется в (2) и, проводя интегрирование в первом и втором интегралах, находится значение потенциала в любой точке пространства (точке наблюдения (ТН)).

Особенности, которые появлялись в первом интеграле, были ранее рассмотрены в работах [3, 4]. В данной работе рассмотрим особенности второго интеграла в (2), т.е. интеграла (3).

В случае рассматриваемой в данной работе плоской геометрии второй интеграл переходит в интеграл по площади. Чтобы не проводить сразу интегрирование по всей площади, занимаемой ОЗ, эту площадь покрывают некоторой прямоугольной сеткой (возможно неравномерной). Тогда интеграл в (3) сводится к совокупности интегралов по каждой отдельной ячейке:

$$\varphi_2(x_o, y_o) = \sum_{i_x=1}^{N_x} \sum_{i_y=1}^{N_y} \varphi_p(i_x, i_y), \tag{5}$$

где i_x, i_y — номера ячеек (номер левой нижней вершины) вдоль направления X и Y, соответственно, N_x, N_y — числа ячеек сетки в направлении X и Y, соответственно, $\varphi_p(i_x, i_y)$ — вклад от одной ячейки сетки, содержащей пространственный заряд:

$$\varphi_p(i_x, i_y) = \\ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_{x_n}^{x_k} dx \int_{y_n}^{y_k} dy\, Q(x,y)\, G(x,y,x_o,y_o), \tag{6}$$

где x_n, x_k — левый и правый, а y_n, y_k — нижний и верхний пределы рассматриваемой ячейки, x_o, y_o — координаты точки наблюдения.

Вполне очевидно, что простейшим способом взятия двойного интеграла в (6) является повторное численное интегрирование. Если, например, применить повторное численное интегрирование методом Гаусса [5], то получаем формулу

$$\varphi_p(i_x, i_y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \delta_x\, \delta_y \times \\ \times \sum_{i=1}^{N_g} A_i \sum_{j=1}^{N_g} A_j\, Q(x_i, y_j)\, G(x_i, y_j, x_o, y_o), \tag{7}$$

где $Q(x_i, y_j)$ — значения плотности объемного заряда в узлах интегрирования (x_i, y_j), $\delta_x = x_k - x_n$ — длина (протяженность) рассматриваемой ячейки в направлении X, $\delta_y = y_k - y_n$ — длина (протяженность) рассматриваемой ячейки в направлении Y, A_i, A_j — коэффициенты квадратурной формулы Гаусса.

Причем, если в некоторой области пространства наблюдается пик пространственного заряда, то, очевидно, в данной области следует применить сгущение сетки. О методах построения сгущения сетки можно найти в [6].

Если плотность пространственного заряда является довольно гладкой и может быть в пределах каждой ячейки сетки аппроксимирована билинейным распределением, тогда интегрирование в (3) можно для каждой прямоугольной ячейки провести аналитически.

2. ФУНКЦИЯ ПЛОТНОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

В известных нам работах [3, 7] в пределах каждой ячейки функцию ПОЗ считали константой. Очевидно, что такая аппроксимация не может быть удовлетворительной для неоднородных функций распределения ПОЗ.

Мы будем считать, что в каждой ячейке эта функция представима билинейным распределением

$$\begin{aligned} Q(x,y) = (&[Q(i_x, i_y+1)(x_k - x_o) + \\ &+ Q(i_x+1, i_y+1)(x_o - x_n)](y_o - y_n) + \\ &+ [Q(i_x, i_y)(x_k - x_o) + \\ &+ Q(i_x+1, i_y+1)(x_o - x_n)](y_k - y_o))/\delta_x\, \delta_y, \end{aligned} \tag{8}$$

где $Q(i_x, i_y)$ — значение плотности объемного заряда в узле сетки (вершине ячейки) (i_x, i_y).

В этой формуле удобно от "мировых" координат (x,y) перейти к координатам, привязанным к точке наблюдения $(x_1 = x - x_o,\ \ y_1 = y - y_o)$. Ниже мы везде будем пользоваться координатами, привязанными к ТН, поэтому индекс "1" везде ниже будем опускать. Т.е. везде ниже будем "мировые" координаты обозначать (x_1, y_1), а координаты, привязанные к ТН $(x = x_1 - x_o,\ y = y_1 - y_o)$.

После подстановки этих новых координат в формулу (8) и несложных преобразований, получаем

$$Q(x,y) = q_{0,0} + q_{1,0}\, x + q_{0,1}\, y + q_{1,1}\, x\, y, \tag{9}$$

где коэффициенты $q_{i,j}$ имеют вид

$$q_{0,0} = C_{0,0}(i_x, i_y) + C_{1,0}(i_x, i_y)\, x_o + \\ + C_{0,1}(i_x, i_y) y_o + C_{1,1}(i_x, i_y)\, x_o\, y_o,$$

$$q_{1,0} = C_{1,0}(i_x, i_y) + C_{1,1}(i_x, i_y)\, y_o,$$

$$q_{0,1} = C_{0,1}(i_x, i_y) + C_{1,1}(i_x, i_y) \cdot x_0,$$

$$q_{1,1} = C_{1,1}(i_x, i_y).$$

$$C_{0,0}(i_x, i_y) = [A(F_y(i_y+1) - y_o) - \\ - B(y_o - F_y(i_y))]/ds,$$

$$C_{1,0}(i_x,i_y)=[C(F_y(i_y+1)-y_o)-\\ -D(y_o-F_y(i_y))]/ds,$$

$$C_{0,1}(i_x,i_y)=[-A+B]/ds,$$

$$C_{1,1}(i_x,i_y)=[-C+D]/ds.$$

Здесь $F_y(i_y)$ — линия сетки вдоль направления Y, имеющая номер i_y, $ds=\delta_x\,\delta_y$.

$$A=Q(i_x,i_y)[F_x(i_x+1)-x_o]-\\ -Q(i_x+1,i_y)[x_o-F_x(i_x)],$$

$$B=Q(i_x,i_y+1)[F_x(i_x+1)-x_o]-\\ -Q(i_x+1,i_y+1)[x_o-F_x(i_x)],$$

$$C=-Q(i_x,i_y)+Q(i_x+1,i_y),$$

$$D=-Q(i_x,i_y+1)+Q(i_x+1,i_y+1),$$

где $F_x(i_x)$ — линия сетки вдоль направления X, имеющая номер i_x.

Т.о., в координатах, привязанных к ТН, билинейное распределение ПОЗ (8) принимает вид (9).

3. НАХОЖДЕНИЕ ВКЛАДА В ПОТЕНЦИАЛ ОТ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ЯЧЕЙКИ, ЗАПОЛНЕННОЙ ОБЪЕМНЫМ ЗАРЯДОМ

Из предыдущего материала следует, что рассматриваемый вклад в потенциал от прямоугольной ячейки имеет вид

$$\varphi_p=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\times\\ \times\int_{(S)}[q_{0,0}+q_{1,0}\,x+q_{0,1}\,y+q_{1,1}\,x\,y]\,G\,dx\,dy, \qquad (10)$$

где ядро G в случае рассматриваемой в данной работе плоской геометрии имеет вид

$$G=-0{,}5\log(x^2+y^2). \qquad (11)$$

Видно, что интеграл в (10) разбивается на четыре более простых интеграла по площади ячейки:

$$\varphi_p=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}[C_{0,0}\int_{(S)}G\,dS+\\ +C_{1,0}\int_{(S)}x\,G\,dS+\\ +C_{0,1}\int_{(S)}y\,G\,dS+\\ +C_{1,1}\int_{(S)}x\,y\,G\,dS].$$

Рассмотрим особенности взятия этих двойных интегралов:

$$I_{0,0}\equiv\int_{x_n}^{x_k}dx\int_{y_n}^{y_k}\log(x^2+y^2)\,dy=\\ =\int_{x_n}^{x_k}dx\Big[y_k\log(x^2+y_k{}^2)-\\ -y_n\log(x^2+y_n^2)-2\delta_y+\\ +2x\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y_k}{x}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{y_n}{x}\right)\right)\Big]. \qquad (12)$$

Взятие интегралов от первых трех членов, стоящих в квадратных скобках, осуществляется просто:

$$x_k\,y_k\log(x_k{}^2+y_k{}^2)-x_n\,y_k\log(x_n{}^2+y_k{}^2)+\\ +x_k\,y_n\log(x_k{}^2+y_n{}^2)-x_n\,y_n\log(x_n{}^2+y_n{}^2)+\\ +2y_k^2\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x_k}{y_k}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{x_n}{y_k}\right)\right]+\\ +2y_n^2\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x_k}{y_n}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)\right]-\\ -2y_k\,\delta_x+2y_k^2-2y_n\,\delta_x-2\delta_x\,\delta_y.$$

Взятие последнего четвертого интеграла, задаваемого выражением

$$2\int_{x_n}^{x_k}x\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y_k}{x}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{y_n}{x}\right)\right]dx, \qquad (13)$$

также не представляет труда. При проведении интегрирования, учитывается, что случай, когда ТН приближается к одной из сторон рассматриваемой ячейки, соответствует одному из пределов $y_n\to 0,\ y\to 0,\ x_n\to 0,\ x_k\to 0$, и получающиеся при проведении интегрирования в (13) члены, содержащие функцию arctg, ведут себя следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right)=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\left(x^2\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right)\neq 0,\quad (x\neq 0),$$

$$\lim_{y\to 0}\left(y^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right)=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\left(y^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right)=0, \quad (y\neq 0).$$

Видно, что для всех получаемых членов, содержащих функцию arctg, лучше иметь вид $x^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ или $y^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$, т.к. члены этого вида имеют определенные значения как в пределе $x\to 0$, так и в пределе $y\to 0$. Чтобы получить такие выражения, мы воспользовались известным равенством [8]

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)=-\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\left(\frac{x}{y}\right), \tag{14}$$

где $\operatorname{sign}(x)$ — функция, возвращающая знак своего аргумента.

В результате, для интеграла $I_{0,0}$ получаем выражение

$$\begin{aligned}I_{0,0} = &-3\delta_x\delta_y + x_k y_k \log(x_k^2+y_k^2) - \\ &- x_n y_k \log(x_n^2+y_k^2) - x_k y_n \log(x_k^2+y_n^2) + \\ &+ x_n y_n \log(x_n^2+y_n^2) + \\ &+ x_k^2\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y_k}{x_k}\right) - -\operatorname{arctg}\left(\frac{y_n}{x_k}\right)\right] - \\ &- x_n^2\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y_k}{x_n}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y_n}{x_n}\right)\right] + \\ &+ y_k^2\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x_k}{y_k}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x_n}{y_k}\right)\right] - \\ &- y_n^2\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x_k}{y_n}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)\right].\end{aligned} \tag{15}$$

Вычисление следующих интегралов не несет в себе новых сложностей, поэтому сразу выпишем для них окончательные выражения:

$$\begin{aligned}I_{1,0} = &-7\delta_y\,(x_k^2 - x_n^2)/6 + \frac{y_k}{2}\left(x_k^2+\frac{y_k^2}{3}\right)\log(x_k^2+y_k^2) - \frac{y_n}{2}\left(x_k^2+\frac{y_n^2}{3}\right)\log(x_k^2+y_n^2) - \\ &-\frac{y_k}{2}\left(x_n^2+\frac{y_k^2}{3}\right)\log(x_n^2+y_k^2) + \frac{y_n}{2}\left(x_n^2+\frac{y_n^2}{3}\right)\log(x_n^2+y_n^2) + \\ &+\frac{2}{3}x_k^3\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y_k}{x_k}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{y_n}{x_k}\right)\right] - \frac{2}{3}x_n^3\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y_k}{x_n}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{y_n}{x_n}\right)\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{0,1} = &-7\delta_x\,(y_k^2 - y_n^2)/6 + \frac{x_k}{2}\left(y_k^2+\frac{x_k^2}{3}\right)\log(x_k^2+y_k^2) - \frac{x_k}{2}\left(y_n^2+\frac{x_n^2}{3}\right)\log(x_k^2+y_n^2) - \\ &-\frac{x_n}{2}\left(y_k^2+\frac{x_n^2}{3}\right)\log(x_n^2+y_k^2) + \frac{x_n}{2}\left(y_n^2+\frac{x_n^2}{3}\right)\log(x_n^2+y_n^2) + \\ &+\frac{2}{3}y_k^3\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x_k}{y_k}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{x_n}{y_k}\right)\right] - \frac{2}{3}y_n^3\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x_k}{y_n}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{1,1} = &-3(x_k^2-x_n^2)(y_k^2-y_n^2)/8 + \frac{(x_k^2+y_k^2)^2}{8}\log(x_k^2+y_k^2) - \frac{(x_k^2+y_n^2)^2}{8}\log(x_k^2+y_n^2) - \\ &-\frac{(x_n^2+y_k^2)^2}{8}\log(x_n^2+y_k^2) + \frac{(x_n^2+y_n^2)^2}{8}\log(x_n^2+y_n^2).\end{aligned}$$

Отметим, что во всех формулах с функцией $\log(x)$ следует пользоваться (иметь в виду) предел

$$\lim_{x\to 0}(x\log(x))=0\,. \tag{16}$$

4. НАХОЖДЕНИЕ ВКЛАДА В КОМПОНЕНТУ $E^{(x)}$ ОТ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ЯЧЕЙКИ, ЗАПОЛНЕННОЙ ОБЪЕМНЫМ ЗАРЯДОМ

Вклад в компоненту $E^{(x)}$ от прямоугольной ячейки, заполненной объемным зарядом, определяется выражением:

$$E_p^{(x)}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\times \\ \times\int_{(S)}[q_{0,0}+q_{1,0}\,x+ \\ +q_{0,1}\,y+q_{1,1}\,x\,y]G^{(x)}\,dx\,dy, \tag{17}$$

где ядро $G^{(x)}$ для компоненты $E^{(x)}$ имеет вид [3]:

$$G^{(x)}=\frac{x}{x^2+y^2}\,.$$

Входящие в (17) интегралы не доставляют особых проблем, кроме тех, которые уже были рассмотрены выше:

$$I_{0,0}=[y_k\log(x_k^2+y_k^2)-y_k\log(x_n^2+y_k^2)-y_n\log(x_k^2+y_n^2)+y_n\log(x_n^2+y_n^2)]/2+ \\ +x_k\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y_k}{x_k}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{y_n}{x_k}\right)\right]-x_n\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y_k}{x_n}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{y_n}{x_n}\right)\right],$$

$$I_{1,0}=\delta_x\delta_y/2+\left\{x_k^2\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y_k}{x_k}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{y_n}{x_k}\right)\right]-x_n^2\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y_k}{x_n}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{y_n}{x_n}\right)\right]-\right. \\ \left.-y_k^2\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x_k}{y_k}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{x_n}{y_k}\right)\right]+y_n^2\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x_k}{y_n}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)\right]\right\}/2,$$

$$I_{0,1}=\left[\left(x_k^2+y_k^2\right)\cdot\log\left(x_k^2+y_k^2\right)-\left(x_k^2+y_n^2\right)\cdot\log\left(x_k^2+y_n^2\right)-\right. \\ \left.-\left(x_n^2+y_k^2\right)\cdot\log\left(x_n^2+y_k^2\right)+\left(x_n^2+y_n^2\right)\cdot\log\left(x_n^2+y_n^2\right)\right]/4,$$

$$I_{1,1}=\left\{x_k^3\log\frac{x_k^2+y_k^2}{x_k^2+y_n^2}-x_n^3\log\frac{x_n^2+y_k^2}{x_n^2+y_n^2}+2\delta_x\,(y_k^2-y_n^2)-\right. \\ \left.-2y_k^3\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x_k}{y_k}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{x_n}{y_k}\right)\right]+2y_n^3\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x_k}{y_n}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)\right]\right\}/6.$$

5. НАХОЖДЕНИЕ ВКЛАДА В КОМПОНЕНТУ $E^{(y)}$ ОТ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ЯЧЕЙКИ, ЗАПОЛНЕННОЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ЗАРЯДОМ

Вклад в компоненту $E^{(y)}$ от прямоугольной ячейки, заполненной пространственным зарядом, определяется выражением:

$$E_p^{(y)}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\times \\ \times\int_{(S)}[q_{0,0}+q_{1,0}\,x+q_{0,1}\,y+q_{1,1}\,x\,y]G^{(y)}\,dx\,dy, \tag{18}$$

где ядро $G^{(y)}$ для компоненты $E^{(y)}$ имеет вид [3]:

$$G^{(y)}=\frac{y}{x^2+y^2}\,.$$

Входящие в (18) интегралы берутся весьма легко:

$$I_{0,0} = [x_k \log(x_k^2 + y_k^2) - x_n \log(x_n^2 + y_k^2) - x_k \log(x_k^2 + y_n^2) + x_n \log(x_n^2 + y_n^2)]/2 +$$
$$+ y_k \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x_k}{y_k}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x_n}{y_k}\right)\right] - y_n \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x_k}{y_n}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)\right],$$

$$I_{1,0} = [(x_k^2 + y_k^2)\log(x_k^2 + y_k^2) - (x_k^2 + y_n^2)\log(x_k^2 + y_n^2) -$$
$$-(x_n^2 + y_k^2)\log(x_n^2 + y_k^2) + (x_n^2 + y_n^2)\log(x_n^2 + y_n^2)]/4,$$

$$I_{0,1} = \delta_x \delta_y / 2 + \left\{ -x_k^2 \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y_k}{x_k}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y_n}{x_k}\right)\right] + x_n^2 \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y_k}{x_n}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y_n}{x_n}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + y_k^2 \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x_k}{y_k}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x_n}{y_k}\right)\right] - y_n^2 \left[\operatorname{arct} g\left(\frac{x_k}{y_n}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)\right]\right\} / 2,$$

$$I_{1,1} = [y_k^3 \log\frac{x_k^2 + y_k^2}{x_n^2 + y_k^2} - y_n^3 \log\frac{x_k^2 + y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} + 2\delta_x (x_k^2 - x_n^2) -$$
$$-2x_k^3 [\operatorname{arctg}(\frac{y_k}{x_k}) - \operatorname{arctg}(\frac{y_n}{x_k})] + 2x_n^3 [\operatorname{arctg}(\frac{y_k}{x_n}) - \operatorname{arctg}(\frac{y_n}{x_n})]/6.$$

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Т.о., мы пришли к следующему алгоритму решения уравнения Пуассона при известном распределении плотности объемного заряда: разбиваем всю область, занятую объемным зарядом, на прямоугольные ячейки с помощью прямоугольной сетки. Причем в местах, где наблюдается резкое увеличение (изменение) плотности объемного заряда, требуется выполнить сгущение линий сетки.

Поместив ТН в точку коллокации, проводя интегрирование по каждой ячейке и осуществив суммирование по всем ячейкам сетки, находим полный вклад в потенциал (если решаем задачу Дирихле) в данной ТН от всего облака объемного заряда и т.д.

Теперь обсудим, что положительного и что отрицательного получает программа при переходе от численного к аналитическому интегрированию:

С одной стороны, при билинейном интерполировании мы (в зависимости от величины ячеек сетки и гладкости функции ПОЗ) можем несколько потерять в точности расчетов, но зато, с другой стороны, получаем значительный выигрыш во времени. Так, при двукратном численном интегрировании методом Гаусса 10×10 мы получаем выигрыш во времени при переходе к аналитическому интегрированию примерно в четыре раза.

Особое внимание требуется обратить на интегрирование в случае, когда ТН принадлежит ячейке, по площади которой осуществляется интегрирование. Очевидно, что при близости ТН к одному из узлов численного интегрирования, точность интегрирования может (и должна) резко ухудшаться. Это заметно при численном вычислении вклада в потенциал φ_p и может давать катастрофические по точности результаты при численном вычислении компонент электрического поля $E^{(x)}, E^{(y)}$. От этого недостатка полностью свободны приведенные выше формулы аналитического интегрирования, точность результатов которого не зависит от положения ТН относительно ячейки, по площади которой производится интегрирование.

С другой стороны, присутствующие в аналитических формулах функции $\ln(x)$, $\operatorname{arctg}(x/y)$ и $\operatorname{arctg}(y/x)$ несут в себе особенности в пределах $x \to 0$ или $y \to 0$. Однако в данной работе эти функции выписаны в таких произведениях (комбинациях) с другими функциями, что в соответствующих пределах дают равные нулю результаты. Это позволяет с полным основанием пользоваться формулами аналитического интегрирования вне зависимости от взаимного расположения ТН и ячейки сетки, по площади которой проводится интегрирование.

Еще одна сложность может возникнуть при представлении функции ПОЗ вблизи границы области объемного заряда.

Если плотность объемного заряда имеет гладкий характер и к краям облака плавно спадает до нуля, то с помощью прямоугольных ячеек можно достаточно хорошо приблизить аналитически задаваемую функцию ПОЗ к реальному распределению, полагая на всех вершинах ячеек, находящихся на границе или выходящих за границу облака заряда, равенство плотности заряда нулю.

Если же наблюдается противоположный случай, когда на границе существует резкий скачок ПОЗ от нуля до больших значений (при движении извне во внутрь), то билинейная интерполяция уже не может адекватно описать этот случай. Одним из возможных является выход, когда вводятся дополнительные ячейки все уменьшающейся величины, с помощью которых можно попытаться приблизить аналитически рассматриваемое распределение к реальному.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1967. 460 с.
2. *Антоненко О.Ф.* Численное решение задачи Дирихле для незамкнутых поверхностей вращения. // Вычислительные системы. Новосибирск: Изд-во ИМ СО АН СССР, 1964. № 12. С. 39–47.
3. *Иванов В.Я.* Методы автоматизированного проектирования приборов электроники. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1986. 193 с.
4. *Шевченко С.И.* Алгоритм получения предельной точности в электростатических расчетах элементов электронно- и ионно-оптических приборов, имеющих плоскую симметрию. // Научное приборостроение. 1997. Т. 7, № 1–2. С. 45–53.
5. *Крылов В.И., Шульгина Л.Т.* Справочная книга по численному интегрированию. М.: Наука, 1976. 370 с.
6. *Шевченко С.И.* О некоторых вопросах проектирования неоднородных сеток для расчета траекторий заряженных частиц в электронно- и ионно-оптических приборах. Научное приборостроение. 1998. Т. 8, № 1–2. С. 27–31.
7. *Тиунов М.А., Фомель Б.М., Яковлев В.П.* SAM — интерактивная программа для расчета электронных пушек на мини-ЭВМ. Новосибирск: Препринт 87–35 Института ядерной физики СО АН СССР, 1987. 63 с.
8. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм... М.: Наука, 1971. 1108 с.

***Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург** (С.И. Шевченко)*
***Институт математики СО РАН, Новосибирск** (В.Я. Иванов)*

Материал поступил в редакцию 15.07.99.

ON THE CALCULATION OF PLANE ELECTROSTATIC FIELDS IN INSTRUMENTS WITH SPACE-CHARGE OCCUPIED REGIONS

V. Ya. Ivanov, S. I. Shevchenko

Institute for Analytical Instrumentation RAS, Saint-Petersburg

The Cauchy problem for the Poisson equation is solved by the collocation technique for the corresponding boundary integral equation. The contribution of the space-charge cloud to the potential at any point is defined as a sum of contributions from rectangular grid cells analytically computed by taking respective integrals, in which the space-charge density function is interpolated by a bilinear distribution.