НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 1999 том 9, № 2 с.53-58

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК 62.27

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМ ЭЛАСТИК УПРУГИХ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

© В.Л. Ткалич

Санкт-Петербургский Государственный институт точной механики и оптики (Технический университет)

Поступила в редакцию в марте 1999 г.

В статье приводятся результаты теоретических исследований эластик упругих чувствительных элементов (УЧЭ), точность расчёта которых во многом определяет показатели надёжности преобразователей давления. Наибольшей точности, при расчёте, позволяет добиться математическая модель, использующая для описания эластик, нагружаемых УЧЭ кинематическую аналогию качающегося маятника Кирхгофа. Предлагаемый математический аппарат базируется на якобиевых эллиптических функциях, позволяющих наиболее адекватно описать поведение эластики нагружаемого УЧЭ в квазистационарном состоянии. Под эластикой будем понимать кривую, форму которой принимает упругая линия благодаря изгибу и кручению УЧЭ.

ВВЕДЕНИЕ

Упругие элементы, такие как пружины, мембраны и сильфоны, выполняют ответственную роль в первичных измерительных приборах и датчиках систем управления [1]. В частности, они находят широкое применение в качестве чувствительных элементов в преобразователях давления самых различных конструкций. Точность работы этих приборов во многом зависит от рабочих характеристик УЧЭ. Выбор метода расчёта этих элементов определяется их геометрической формой, назначением и условиями работы, величиной перемещений и, что очень важно, требуемой точностью расчёта. Предлагаемая в данной работе математическая модель, использующая якобиевые эллиптические функции [2] для описания эластик УЧЭ, наиболее адекватно отражает характер поведения профиля этих элементов при их нагружении.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Задачу математического описания УЧЭ можно рассматривать как задачу о равновесии тонких цилиндрических, или призматических стержней в ненапряжённом состоянии [3]. Кинематическим аналогом таких стержней в нагруженном состоянии является качающийся маятник Кирхгофа, движение которого может быть определено при помощи интеграла энергии (интеграла Эйлера). Теорема Кирхгофа устанавливает совпадение уравнений равновесия тонких упругих стержней, деформированных силой или парой сил при нагружении чувствительного элемента, с уравнениями движения твердого тела, вращающегося около неподвижной точки. При деформации такого стержня действие одной из его частей, отделённых каким - либо сечением, на остальную часть может быть выражено с помощью напряжения на этом сечении, отнесённом к единице площади. Это напряжение статически эквивалентно силе, приложенной в центре тяжести рассматриваемого сечения.

Расположим стержень в декартовой системе координат, таким образом, чтобы упругая линия ненагруженного стержня совпадала с осью Z (рис.1).

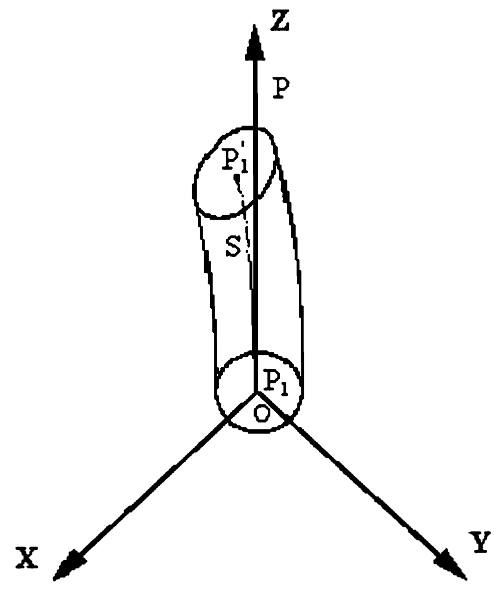

Рис.1. Схема деформации тонкого стержня. X,Y,Z – декартовы оси координат с началом в точке O,
P_1P – начальное положение упругой линии стержня, при котором оно совпадает с осью Z, $P_1P'_1$ – отклонение упругой линии стержня при его нагружении, S – длина дуги упругой линии

При деформировании такого стержня в процессе нагружения, упругая линия будет отклоняться от оси Z, при этом длина дуги S упругой линии будет увеличиваться на δS. Так как ось Z совпадает с касательной к упругой линии , то напряжения на сечении можно обозначить через X_Z, Y_Z, Z_Z.

Пусть N, N', T – компоненты приложенных сил, а G, G', H' – компоненты приложенных моментов. В этом случае приложенные силы и моменты могут быть представлены в виде:

$$\begin{cases} N = \iint X_Z dxdy, & N' = \iint Y_Z dxdy, \\ T = \iint Z_Z dxdy, & \\ G = \iint Z_Z dxdy, & G' = \iint -xZ_Z dxdy, \\ H = \iint (xY_Z - yX_Z) dxdy, & \end{cases} \quad (1)$$

где N, N' – перерезывающие силы ; T – растягивающая сила; G, G' – изгибающие моменты, H – крутящий момент.

Пусть начало координат (0,0,0) движется вдоль деформированной оси стержня с единичной скоростью, причём направления осей координат , при движении в каждой точке оси стержня совпадают с главными осями кручения и изгиба . Обозначим компоненты этой угловой скорости через χ, χ' и τ. Тогда χ и χ', будут компонентами кривизны в точке P_1, а τ – степенью кручения стержня в этой же точке.

В том случае, если силы, действующие на тонкий стержень приложены к его концу, то уравнения равновесия будут иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dS} - N'\tau - T\chi = 0, \\ \dfrac{dN'}{dS} - T\chi - N\tau = 0, \\ \dfrac{dT}{dS} - N\chi' - N'\chi = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Уравнения (2) могут быть преобразованы к виду (3), где стоящие справа члены равны моментам силы R, приложенной в точке с координатами (0,0,1) по отношению к осям (X, Y, Z). Мы можем рассматривать эти уравнения как определяющие движение некоторого твердого тела, вращающегося около неподвижной точки.

$$\begin{cases} A\dfrac{d\chi}{dS} - (B-C)\chi'\tau = N', \\ B\dfrac{d\chi'}{dS} - (C-A)\tau\chi = -N, \\ C\dfrac{d\tau}{dS} - (A-C)\chi\chi' = 0. \end{cases} \quad (3)$$

В этой аналогии результирующая сила R (рис.2) соответствует весу тела, в связи с этим линия действия силы R, приложенной к концу стержня в точке с наибольшим значением длины дуги S, соответствует проведённой вертикали. Длина дуги S в этой аналогии эквивалентна времени, т.к. начало координат движется вдоль оси стержня с единичной скоростью. A, B, C – моменты инерции относительно главных осей инерции, они отвечают проекциям угловой скорости на мгновенное положение осей. N', N – компоненты упругого момента.

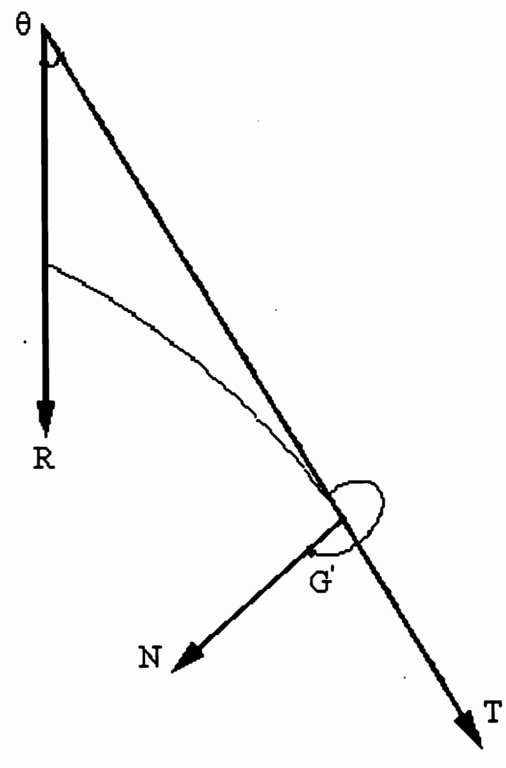

Рис.2. Маятник Кирхгофа.
R – результирующая сила (вес тела),
N – перерезывающая сила,
T – растягивающая сила, G' – изгибающий момент,
□ – угол между касательной к упругой линии и направлением силы R

Центр тяжести тела лежит на оси C на единичном расстоянии от точки опоры. Ось, которая в момент времени S соединяет центр тяжести с точкой опоры, по направлению и стороне вращения тождественна касательной к упругой линии, проведённой в сторону возрастающих дуг S и взятой в точке P'_1 на расстоянии S от конца стержня. Тело движется так, что его главные оси инерции в точке опоры в любой момент S параллельны главным осям кручения и изгиба в точке P_1. Исключая N и N' из третьего уравнения (2) с помощью уравнений (3) получим:

$$\frac{dT}{dS} + A\chi\frac{d\chi}{dS} + B\chi\frac{d\chi}{dS} + (A-B)\tau\chi\chi' = 0,$$

откуда имеем :

$$T + 0.5(A\chi^2 + B\chi'^2 + C\tau^2) = Const. \qquad (4)$$

Уравнение (4) аналогично интегралу энергии уравнений движения твёрдого тела.

Теорема Кирхгофа может быть распространена и на стержни, имеющие в начальном состоянии кривизну и степень кручения. Например, когда упругая линия будет винтовой линией, а стержень имеет такую начальную степень кручения, что он станет вновь призматическим, если устранить один только изгиб. В этом случае, если стержень изогнут и закручен силами и парами, приложенными только на его конце, то компоненты упругого момента N, N', T удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dS} - N'\tau_1 + T\chi_1' = 0, \\ \dfrac{dN'}{dS} - T\chi_1 + N\tau_1 = 0, \\ \dfrac{dT}{dS} - N\chi_1' + N'\chi_1 = 0, \end{cases} \qquad (5)$$

где χ, χ_1, τ_1 – компоненты кривизны и степень кручения. Эти уравнения выражают, что N', N, T для каждого сечения представляют собой компоненты по главным осям кручения и изгиба некоторой силы, которая постоянна по величине и направлению. Обозначим эту силу, как и раньше, через R.

Так как упругие моменты для какого-нибудь сечения равны

$$\begin{cases} A(\chi_1 - \chi_0), \\ B(\chi_1' - \chi_0'), \\ C(\tau_1 - \tau_0), \end{cases}$$

то мы получаем уравнения:

$$\begin{cases} A\dfrac{d\chi_1}{dS} - B(\chi_1' - \chi_0') + C(\tau_1 - \tau_0)\chi_1' = N', \\ B\dfrac{d\chi_1'}{dS} - C(\tau_1 - \tau_0)\chi_1 + A(\chi_1 - \chi_0)\tau_1 = -N, \\ C\dfrac{d\tau_1}{dS} - A(\chi_1 - \chi_0)\chi_1' + B(\chi_1' - \chi_0')\chi_1 = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Кинематической аналогией в этом случае служит твердое тело, вращающееся около неподвижной точки и несущее на себе другое тело, которое вращается относительно оси, неизменно связанной с первым телом. Остальные величины имеют такой же смысл как и в системе уравнений (3).

Рассмотрим решение задачи определения формы тонкого призматического стержня. Пусть этот стержень не имеет начального изгиба и к концу его приложены силы и пары сил. Примем, что степень кручения стержня равна нулю. Стержень изогнут в главной плоскости, и следовательно, упругая линия будет плоской кривой (рис.1). Кинематическим аналогом такого стержня будет служить маятник, вес которого равен R и который качается около горизонтальной оси. Движение маятника может быть вполне определено по начальным условиям при помощи интеграла энергии. Равным образом и форма нашего стержня определяется по уравнению (4) и краевым условиям.

Плоскостью изгиба пусть будет та плоскость, для которой жесткость при изгибе равна B. Тогда χ и τ исчезают, и упругий момент сводится к изгибающему моменту $G' = B\chi'$. Упругое усилие дает только два компонента: растягивающие и перерезывающие усилия T и N. Пусть θ будет угол, который касательная к упругой линии образует с направлением силы R (рис.2). Мы получим при этом, что

$$T = -R\cos\theta \text{ и } \chi' = -\frac{d\theta}{dS}.$$

Уравнение (4), следовательно, получает вид:

$$-R\cos\theta+0.5B\left(\frac{d\theta}{dS}\right)^2=Const. \qquad (7)$$

В силу кинематической аналогии B будет моментом инерции маятника относительно оси подвеса. Прямая, которая в момент времени S соединяет точку подвеса с центром тяжести, образует с направленной вниз вертикалью угол θ.

Уравнение (7) может быть очень просто получено из уравнений равновесия. Эти последние можно записать в виде:

$$\begin{cases} T=-R\cos\theta, \\ N=-R\sin\theta, \\ \dfrac{dG'}{dS}+N=0. \end{cases}$$

Если положить $G'=-B\dfrac{d\theta}{dS}$, то отсюда получается:

$$B\frac{d^2\theta}{dS^2}+R\sin\theta=0. \qquad (8)$$

Уравнение (7) представляет собой первый интеграл уравнения (8). Кривая, форму которой принимает упругая линия благодаря изгибу, так называемая эластика, определяется с помощью уравнения (7). Результаты получаются отличными в зависимости от того будут у кривой точки перегиба или нет. Стержень может принимать форму эластики с точками перегиба в случаях, когда на концах действуют только силы, а пары сил отсутствуют. Концы стержня также будут точками перегиба. Все точки перегиба будут лежать на линии силы R, т.е. на линии сжатия. Кинематической аналогией эластики с точками перегиба служит качающийся маятник. Чтобы получить эластику без точек перегиба необходимо приложить к концам стержня как силы, так и пары сил. Кинематической аналогией здесь будет вращающийся маятник.

Для целей исследования динамики упругих элементов в датчиках наибольший интерес представляет описание эластики с точками перегиба. Рассмотрим ее подробнее. Будем измерять дугу от какой-нибудь точки перегиба и обозначим через α значение угла θ в той точке перегиба, где $S=0$. Напишем уравнение (7) в форме:

$$0.5B\left(\frac{d\theta}{dS}\right)^2+R(\cos\alpha-\cos\theta)=0. \qquad (9)$$

Чтобы его проинтегрировать, введем якобиевы эллиптические функции аргумента U и модуль k, причем положим:

$$U=S\sqrt{\frac{R}{B}}; \qquad k=\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (10)$$

Модуль k постоянен для данной упругой линии стержня. С изменением модуля k форма упругой линии будет меняться. Поскольку $0\le k\le 1$, то модуль k удобно представлять в виде $k=\sin(\alpha/2)$, где α – модулярный угол $0\le\alpha\le 180^\circ$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} &\frac{d\theta}{dU}=2k\times cn(U+K), \\ &\sin(0.5\theta)=k\times sn(U+K), \end{aligned} \qquad (11)$$

где K – полный эллиптический интеграл первого рода, cn, sn – якобиевы эллиптические функции.

Чтобы определить вид кривой, введем неизменяемые оси координат (x,y) так, чтобы ось x совпадала с линией сжатия. При этом будем иметь

$$\frac{dx}{dS}=\cos\theta; \quad \frac{dy}{dS}=\sin\theta .$$

Эти уравнения дают:

$$\begin{aligned} &x=\sqrt{\frac{B}{R}}[-U+2\{E_{am}(U+K)-E_{am}K\}], \\ &y=-2k\sqrt{\frac{B}{R}}\,cn(U+K), \end{aligned} \qquad (12)$$

где $E_{am}U$ означает эллиптический интеграл второго рода

$$E_{am}U=\int_0^U dn^2u\,du,$$

dn – якобиева эллиптическая функция.

Постоянная интегрирования определена так, что x и y обращаются в нуль вместе с S. Точки перегиба определяются соотношением $\cos\theta = \cos\alpha$ или $sn^2(U+K)=1$. Длина дуги, заключенной между двумя последующими точками перегиба, равна $2K\sqrt{B/R}$, а точки перегиба отстоят друг от друга по оси x на расстоянии $2\sqrt{B/R}\left(2E_{am}K - K\right)$. Точки, в которых касательная к кривой параллельна к линии сжатия, определяются уравнением $\sin\theta = 0$ или $sn(u+K)dn(u+K)=0$, так что в этих точках значение функции U будет нечетным кратным четверти периода K. Исследуемая эластика состоит из ряда дуг, которые соединяются в точках перегиба и делятся на две равные части в точках, где касательная параллельна линии сжатия.

Таким образом, упругую линию стержня $P_1P'_1$ можно представить как часть некоторой бесконечной периодической кривой, форма которой меняется с увеличением нагрузки.

Упругая линия любого стержня при изгибе его произвольными силами и моментами, приложенными по концам, оказывается подобной некоторому отрезку описанных выше периодических кривых. В том случае, если известно решение для всего семейства периодических упругих кривых, т.е. известны их формы, отыскание упругой линии любого конкретного упругого чувствительного элемента не составляет особого труда. Для этого необходимо лишь найти тот участок периодической кривой, которому подобна упругая линия рассматриваемого стержня.

Использование этих эластик для решения конкретных задач (описания плоских пружин и профиля сильфонных оболочек) основано на условиях геометрического подобия стержней [1] по силовому, моментному и угловому коэффициентам подобия. Изменение формы эластики с изменением угла α показано на рис.3. Эти эластики соответствуют так называемым "перегибным формам" кривой. Вид 3(а) отвечает значениям угла $\alpha=90^\circ$. Виды 3(б-г) – $90^\circ<\alpha<130^\circ 40'$. Эластика приобретает вид 3(д) при $\alpha=130^\circ 40'$. На практике наибольший интерес представляет описание эластик, представленных видами 3(а,б,в). Именно так представляется эластика сильфонных оболочек и плоских пружин при больших перемещениях и нагрузках. Эластики представленные видами 3(г,д) на практике встречаются значительно реже и могут вызвать скорее теоретический интерес.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Задача математического описания упругих линий в пружинах, мембранах и сильфонах может

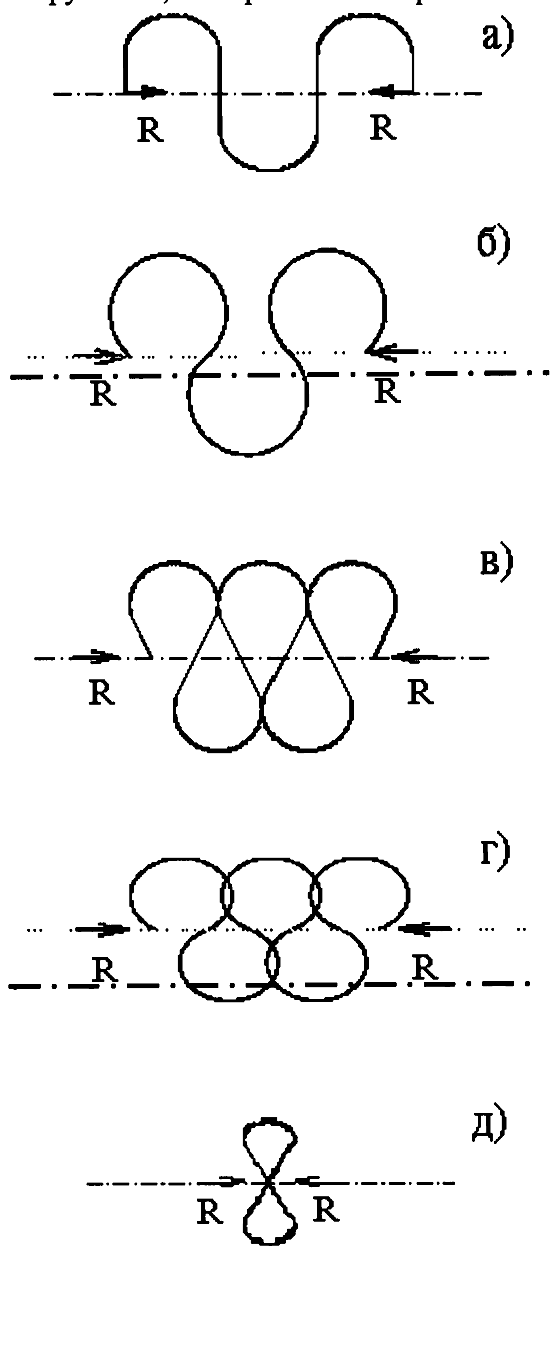

Рис. 3. Формы эластик тонкого стержня при различных значениях угла α. R – результирующая сила,
а) α=90°,
б) - г) 90°< α<130°40',
д) α=130°40'

трактоваться как задача о нахождении равновесия тонких стержней. Корректное решение уравнений, описывающих эластики этих моделей может быть получено при использовании кинематической аналогии с качающимся маятником Кирхгофа. Математический аппарат, основанный на применении якобиевых эллиптических функций позволяет получить адекватное описание эластик УЧЭ и наглядно представить их форму. В бесконечном множестве форм периодических упругих кривых выделены пять видов, каждый из которых соответствует определённому числовому значению модулярного угла α, или определённому интервалу значений α. . На основании приведённых формул можно построить периодическую упругую кривую (эластику) для заданного значения модуля $k = \sin(\alpha/2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреева Л.Е.* Упругие элементы приборов. Издание второе. 1981. М. Машиностроение. 392 с.
2. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических
функций. 1970. М. Наука. 304 с.
3. *Ляв А.* Математическая теория упругости. 1935. М.-Л., 702 с.

STUDY OF THE FORMS OF ELASTICS FOR SPRINGY DETECTOR ELEMENTS

V.L. Tkalich

St. Petersburg State Institute of Fine Mechanics and Optics (Technical University)

Expansible elements such as flat springs, membranes and bellows are broadly used as sensor elements in different automation devices. It is impossible to make a reliable design without modeling the working surface profile of these elements under loading. To get an accurate solution cohen modeling the expansible elements profile it is necessary to use mathematical tools based on elliptical Jakobi functions. Changing of the vibrating expansible element profile under load can be characterized by a springy line or the so-called elastics whose equation is represented through the integral of energy, or Euler's integral, in elliptical functions. As an analog of elastics with bend points a rolling pendulum of variable-length is chosen. A similar solution can be obtained for changing from a variable-length pendulum to a rocking pendulum under influence of external force varying in time.