

УДК 517.982.254

АДАПТИВНЫЙ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

© Л.В. Новиков

Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург.

Поступила в редакцию 3 марта 1999 г.

Показана связь между согласованной фильтрацией и вейвлет-анализом. Приведена процедура синтеза вейвлетов с учетом априорной информации о форме сигнала (приборной функции) и корреляционной функции шума. Это позволяет адаптировать вейвлет-анализ измерительных данных для максимального подавления шума и дрейфа базовой линии. Приведены результаты моделирования с гауссовой моделью сигнала.

ВВЕДЕНИЕ

Назовем адаптивным такой вейвлет-анализ, в котором используются вейвлеты, синтезированные с учетом априорной информации об анализируемых данных. Дискретное преобразование вейвлет является мощным средством для обработки нестационарных сигналов и изображений в физике, химии, биологии, метеорологии и др. областях [1]. Анализ сигналов в таких базах осуществляется по двум переменным — масштабу и сдвигу. Это позволяет разделить крупные и мелкие детали сигналов и изображений, одновременно локализуя их на временной шкале. Таким образом учитывается то важное для практики обстоятельство, что протяженные объекты анализируемых данных лежат в низкочастотной области спектра, а короткие — в высокочастотной.

При обработке данных аналитических приборов широко используется априорная информация о форме полезного сигнала и о корреляционной функции шума, которая позволяет синтезировать согласованные фильтры или фильтры Винера. Поэтому в вейвлет-анализе, используемом в ряде приложений, целесообразно согласовать характер сигнала с видом базисной функции, что делает его незаменимым средством при обработке измерительной информации на пороге чувствительности прибора [2]. В работе [3] рассматриваются вейвлеты, синтезированные на основе собственных функций интегрального уравнения с ядром типа корреляционной функции, приводящие к разложению Карунена-Лоэва, практическое использование которых эффективно только для шумоподобных сигналов, но теряет свои достоинства при обработке квазидетерминированных сигналов, которые характерны для многих приложений. В настоящей работе, на основе предложенного еще в 1984 г. [4] модифицированного алгоритма ортогонализации Грама-Шмидта, рассматривается метод синтеза вейвлет с использованием априорных данных об измерительной информации (корреляционной функции шума, форме компоненты сигнала), по-

зволяющий получить широкий класс вейвлетов, которые приспособлены к характеру анализируемых данных и названных *адаптивными*.

ТЕОРИЯ

В соответствии с мультиразрешающей концепцией Mallat [5,6] базисные функции $\varphi(t)$ вложенных подпространств $V_0 \subset V_1$ связаны соотношением

$$\varphi(t) = \sum_n h(n) \sqrt{2} \varphi(2t - n) \quad (1a)$$

или в матричном виде

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \mathbf{h}' \varphi(2t),$$

где масштабные функции $\varphi(t-n)$ и $\varphi(2t-n)$ образуют базис в V_0 и V_1 соответственно путем целочисленных сдвигов по t .

Пусть функция $\tilde{\varphi}(t)$ образует *дуальный* базис, который аналогично (1a) можно представить в виде:

$$\tilde{\varphi}(t) = \sum_n \tilde{h}(n) \sqrt{2} \tilde{\varphi}(2t - n) \quad (1b)$$

или в матричном виде

$$\tilde{\varphi}(t) = \sqrt{2} \tilde{\mathbf{h}}' \tilde{\varphi}(2t).$$

Функции (1a) и (1b) отвечают условию биортогональности относительно сдвига. Это означает, что их скалярное произведение равно

$$\langle \varphi(t-k), \tilde{\varphi}(t-n) \rangle = \delta_{kn} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = n, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

С учетом этого из (1) следует, что коэффициенты $h(n)$ и $\tilde{h}(n)$ определяются как

$$h(n) = \sqrt{2} \langle \varphi(t), \tilde{\varphi}(2t - n) \rangle, \quad (2a)$$

$$\tilde{h}(n) = \sqrt{2} \langle \tilde{\varphi}(t), \varphi(2t - n) \rangle. \quad (2b)$$

В [6] показано, что для существования одно-значного прямого и обратного преобразований вейвлет коэффициенты $h(n)$ и $\tilde{h}(n)$ должны удовлетворять условиям:

$$\sum_n h(n)\tilde{h}(n+2k) = \delta_{k0},$$

$$\sum_n h(n) = \sum_n \tilde{h}(n) = \sqrt{2}.$$

Вейвлет $\psi(t)$ и дуальный ему вейвлет $\tilde{\psi}(t)$ образуются из масштабных функций $\varphi(t)$ и $\tilde{\varphi}(t)$ следующим образом:

$$\psi(t) = \sum_n g(n)\sqrt{2}\varphi(2t-n), \tag{3a}$$

$$\tilde{\psi}(t) = \sum_n \tilde{g}(n)\sqrt{2}\tilde{\varphi}(2t-n), \tag{3б}$$

где коэффициенты $g(n)$ и $\tilde{g}(n)$ определяются по формулам [6]:

$$g(n) = (-1)^n \tilde{h}(1-n), \tag{4a}$$

$$\tilde{g}(n) = (-1)^n h(1-n). \tag{4б}$$

Функция $\psi(t)$ образует базис (путем ее целочисленных сдвигов — $\psi(t-k)$) в подпространстве W_0 , таком, что его дополнение к V_0 образует подпространство $V_1 = V_0 \oplus W_0$.

Из выражений (2), (3) и (4) следует, что вейвлет $\psi(t)$ полностью определяется масштабной функцией $\varphi(t)$ и дуальным базисом $\tilde{\varphi}(t)$, а базисные функции в V_0 и W_0 образуются целочисленным сдвигом соответствующих функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. По этой причине функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ называют иногда *материнскими*.

Базисные функции для произвольных подпространств V_j и W_j таких, что $\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_j \dots \subset L^2$ для всех $j \in Z$, образуются масштабированием базисных функций из V_0 и W_0 , а именно, базис в V_j имеет вид

$$\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k), \tag{5}$$

а базис в W_j имеет следующий вид

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k). \tag{6}$$

Аналогично можно выразить и их дуальные ба-

зисы.

Существующие способы синтеза вейвлетов [6, 7, 8] не всегда позволяют адаптировать их к условиям эксперимента, когда обрабатывается измерительная информация в условиях шума, помех и т.п. и когда требуется высокая достоверность результатов измерений.

СИНТЕЗ МАСШТАБНЫХ ФУНКЦИЙ

Известно, что для оптимального в смысле максимума отношения сигнал/шум приема сигнала опорная функция приемника (согласованного фильтра) $u(t)$ должна удовлетворять интегральному уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau)u(\tau)d\tau = s(t), \tag{7}$$

где $s(t)$ — модель сигнала, $K(t)$ — корреляционная функция шума.

Выполняя Фурье – преобразование (7), получим

$$\hat{u}(\omega) = \frac{\hat{s}(\omega)}{\hat{K}(\omega)}.$$

Для большого класса моделей сигнала функция $s(t)$ хорошо дифференцируема, имеет форму пика с быстро затухающими боковыми лепестками. Можно показать, что спектр Фурье такой функции $\hat{s}(\omega)$ также ограничен и достаточно быстро убывает, т.е. функция $s(t)$ принадлежит классу финитных функций, которые ограничены как во временной, так и в спектральной областях.

Это означает, что если спектр Фурье шума $\hat{K}(\omega)$ не имеет нулей в полосе сигнала, то функция $\hat{u}(\omega)$ также ограничена и дифференцируема, т. е. решение уравнения (7) существует. В случае белого шума, когда $\hat{K}(\omega) = const$ для всех ω решение будет тривиальным: $s(t) \equiv u(t)$.

Существенным параметром финитных функций является ширина (например, второй центральный момент μ_0), поэтому их можно представить в виде

где $s\left(\frac{t-t_0}{\mu_0}\right)$, $u\left(\frac{t-t_0}{\mu_0}\right)$, где t_0 – положение функции (пика) на временной оси.

Если $t_0 = k\mu_0, k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, то получим набор смещенных на величину μ_0 функций. Можно показать, что эти функции линейно-независимы и, поэтому, образуют базис в L^2 для подмножества функций с ограниченным спектром. Переходя к безразмерным аргументам, получим из

функций $s(t)$ и $u(t)$ набор пар функций $\{s(t-k), u(t-k)\}$ $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, удовлетворяющих интегральному уравнению (7).

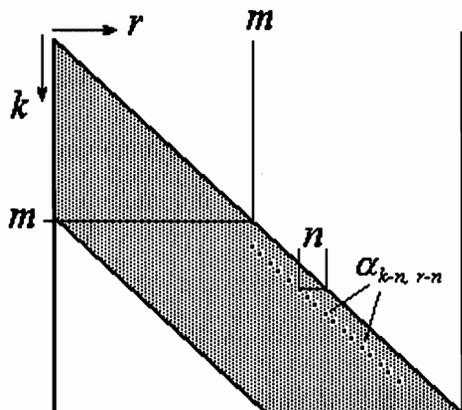


Рис. 1. Вид матрицы α ($k > m, r < n$)

Чтобы получить биортонормированный базис из функций $\{s(t-k), u(t-k)\}$ для подпространства V_0 выполним процедуру ортогонализации [4]. Можно показать, что эта процедура будет сходящейся, т.е. система функций $\{s(t-k), u(t-k)\}$ порождает биортонормированный базис только если $|\hat{s}(\omega)| \neq 0$ и $|\hat{u}(\omega)| \neq 0$ при $|\omega| \leq \pi$. Действительно, для биортогональных систем в Фурье - области для $\hat{\phi}(\omega)$ и $\hat{\tilde{\phi}}(\omega)$ справедливо соотношение:

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{\hat{s}(\omega)}{\sqrt{\sum_k \hat{s}(\omega + 2\pi k) \hat{g}^*(\omega + 2\pi k)}} \quad \text{и}$$

$$\hat{\tilde{\phi}}(\omega) = \frac{\hat{u}(\omega)}{\sqrt{\sum_k \hat{s}(\omega + 2\pi k) \hat{g}^*(\omega + 2\pi k)}},$$

из которых следует, что $\hat{\phi}(\omega)$ и $\hat{\tilde{\phi}}(\omega)$ конечны, при выполнении упомянутых выше ограничений для $\hat{s}(\omega)$ и $\hat{u}(\omega)$. Заметим, что для решения $s(t) \equiv u(t)$ получим ортонормированную систему [5]:

$$\hat{\phi}(\omega) = \hat{\tilde{\phi}}(\omega) = \frac{\hat{s}(\omega)}{\sqrt{\sum_k |\hat{s}(\omega + 2\pi k)|^2}}.$$

Обозначим получаемую при ортогонализации методом Грама-Шмидта биортогональную систему функций как $\{\Phi_k(t), \tilde{\Phi}_k(t)\}$ и введем для краткости сокращенную запись: $s(t-k) = s_k(t) = s_k$, $u(t-k) = u_k(t) = u_k$.

Последовательно выполняя процедуру для $k=0, 1, 2, 3, \dots$ с учетом (7) получим:

$$\Phi_k(t) = u_k(t) + \sum_{r=1}^{k-1} \alpha_{kr} \Phi_r(t), \quad (8a)$$

где коэффициенты ортогонализации

$$\alpha_{kr} = -\frac{\langle u_k, \tilde{\Phi}_r \rangle}{\sigma_r} - \frac{\langle s_k, \Phi_r \rangle}{\sigma_r}, \quad k > r. \quad (8b)$$

$$\text{и } \sigma_r = \langle \Phi_r, \tilde{\Phi}_r \rangle, \quad k > r. \quad (8g)$$

Для дуального базиса имеем:

$$\tilde{\Phi}_r(t) = s_r(t) + \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_{ri} \tilde{\Phi}_i(t), \quad (8b)$$

причем базис и дуальный базис связаны соотношением, аналогичным (7),

$$\tilde{\Phi}_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau) \Phi_k(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Коэффициенты ортогонализации α_{kr} образуют нижнюю треугольную матрицу α , а элементы σ_r — некоторый вектор.

Подставляя в (8б) выражение (8в), с учетом того, что $\alpha_{ri} \sigma_i = -\langle s_r, \Phi_i \rangle$, получим для вычисления α_{kr} рекуррентную формулу:

$$\alpha_{kr} = -\frac{1}{\sigma_r} \left\{ \langle u_k, s_r \rangle + \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_{ri} \langle u_k, \Phi_i \rangle \right\} =$$

$$= -\frac{1}{\sigma_r} \left\{ \langle u_k, s_r \rangle - \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_{ri} \alpha_{ki} \sigma_i \right\}, \quad (10)$$

$$k = 2, 3, \dots; \quad r = 1, 2, 3, \dots, k-1; \quad \alpha_{11} = 0.$$

Подставляя в (8г) выражение (8в) с учетом (8а) и (8б), получим для вычисления σ_r следующую рекуррентную формулу:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \langle s_r, \Phi_r \rangle = \langle s_r, u_r \rangle + \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_{ri} \langle s_r, \Phi_i \rangle = \\ &= \langle s_r, u_r \rangle - \sum_{i=1}^{r-1} \alpha^2_{ri} \sigma_i, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\sigma_1 = \langle s_1, u_1 \rangle, \quad r = 2, 3, 4, \dots$$

Благодаря финитности функций $u_k(t)$ и $s_k(t)$, их скалярное произведение $\langle u_m, s_k \rangle \rightarrow 0$ при $m - k \rightarrow \infty$. Матрица α для значений k больших некоторого m приобретает "ленточный" характер (рис. 1.). Причем, элементы разных строк матрицы одинаково удаленных от диагонали равны, т.е. $\alpha_{kr} = \alpha_{k-n, r-n}$, ($k > r$) и

$$|\alpha_{k, k-1}| > |\alpha_{k, k-2}| > \dots > |\alpha_{k, k-m}| \approx 0.$$

Аналогично ведет себя нормирующий коэффициент σ_r : при $r > m$ он становится константой, которую обозначим как σ_0 . Поэтому в качестве базисных функций удобно принять функции $\Phi_k(t)$ и $\tilde{\Phi}_k(t)$ при $k > m$, т.е. при $k = m + 1, m + 2, \dots$, так как при этом они отличаются только сдвигом.

Матрица α с элементами $\alpha_{n+m, n+r}$ имеет вид, показанный на рис. 2. Элементы строк этой матрицы отличаются только смещением, т.е. $\alpha_{n+m, n+r} = \alpha_{n+m+i, n+r+i}$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Поэтому, чтобы образовать базисные функции достаточно воспользоваться элементами одной строки этой матрицы, которые обозначим как $b_r, r = 1, 2, 3, \dots, m$.

Тогда

$$b_r = \alpha_{n+m, n+r-1}; \quad r = 1, \dots, m$$

и

$$\Phi_n(t) = u_n(t) + \sum_{r=1}^{m-1} b_{m-r} \Phi_{n-r}(t), \quad (12a)$$

причем $|b_{m-1}| > |b_{m-2}| > \dots > |b_1| \approx 0$.

Аналогично

$$\tilde{\Phi}_n(t) = s_n(t) + \sum_{r=1}^{m-1} b_{m-r} \tilde{\Phi}_{n-r}(t). \quad (12б)$$

Из формул (12) выражение функций $\{\Phi_n(t), \tilde{\Phi}_n(t)\}$ осуществляется непосредственно через функции $u(t)$ и $s(t)$, а именно:

$$\Phi_n(t) = \sum_{r=0}^m \beta_{r+1} u_{n+r}(t+m), \quad (13a)$$

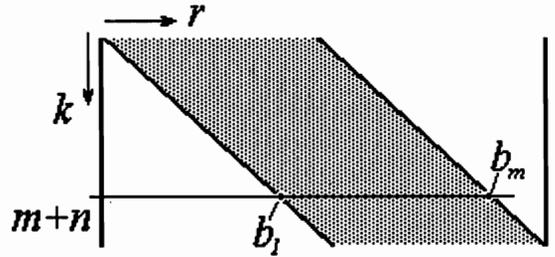


Рис.2. Матрица α с элементами $\alpha_{n+m, n+r-1}$ ($r = 1, 2, \dots, m$)

$$\tilde{\Phi}_n(t) = \sum_{r=0}^{m-1} \beta_{m-2} s_{n-2}(t+m), \quad (13б)$$

$$|\beta_m| > |\beta_{m-1}| > \dots > |\beta_1| \approx 0.$$

Для определения коэффициентов β , из формул (12) и условия ортогональности функций $\tilde{\Phi}_n(t)$ и $\Phi_n(t)$ можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \langle u_n, \tilde{\Phi}_n \rangle &= \sigma_0, & \langle s_n, \Phi_n \rangle &= \sigma_0, & \langle u_{n-k}, \tilde{\Phi}_n \rangle &= 0, \\ \langle s_{n-k}, \Phi_n \rangle &= 0, \end{aligned}$$

$$n > k, \quad r = 1, 2, 3, \dots, m-1;$$

$$\langle u_n, \tilde{\Phi}_{n-r} \rangle = -b_{m-r} \sigma_0, \quad \langle s_n, \Phi_{n-r} \rangle = -b_r \sigma_0,$$

$$n > r, \quad r = 1, 2, 3, \dots, m-1.$$

Воспользовавшись этими соотношениями, последовательно умножая (13a) скалярно слева и справа на $\tilde{\Phi}_n(t), \tilde{\Phi}_{n-1}(t), \tilde{\Phi}_{n-2}(t)$ и т.д. можно показать, что

$$\beta_m = 1, \quad \beta_{m-n} = b_{m-n} + \sum_{r=1}^{n-1} \beta_{m-r} b_{m-(n-r)}, \quad (14)$$

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots, m-1.$$

Масштабные функции $\varphi_k(t)$ и $\tilde{\varphi}_k(t)$ образуются из функций $\Phi_k(t)$ и $\tilde{\Phi}_k(t)$ нормировкой на $\sqrt{\sigma_0}$. Имея ввиду (13), полагая, что на $\sqrt{\sigma_0}$ нормируются коэффициенты β для $\varphi_k(t)$ и $\tilde{\varphi}_k(t)$ получим окончательно:

$$\varphi_k(t) = \sum_{r=0}^{m-1} c_{m-r} u_{k-r}(t), \quad (15a)$$

$$\tilde{\varphi}_k(t) = \sum_{r=0}^{m-1} c_{m-r} s_{k-r}(t), \quad (15b)$$

где $\mathbf{c} = \frac{\beta}{\sqrt{\sigma_0}}$.

Выполняя в (15) замену индексов $k-r=n$, получим для $\varphi_k(t)$:

$$\varphi_k(t) = \sum_{n=k}^{k-m+1} c_{m+n-k} u_n(t) = \sum_{n=k-m+1}^k \gamma_{k,n} u_n(t) \quad (16a)$$

и для $\tilde{\varphi}_k(t)$

$$\tilde{\varphi}_k(t) = \sum_{n=k}^{k-m+1} c_{m+n-k} s_n(t+m) = \sum_{n=k-m+1}^k \gamma_{k,n} s_n(t), \quad (16b)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots,$$

где $\gamma_{k,n} = c_{m+n-k}$ — элементы матрицы размера $3m \times 4m$ (обозначим ее γ), вид которой аналогичен показанной на рис. 2. В матричном виде (16) имеет вид

$$\varphi(t) = \gamma \mathbf{u}(t), \quad (17a)$$

$$\tilde{\varphi}(t) = \gamma \mathbf{s}(t), \quad (17b)$$

где $\varphi(t)$, $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{s}(t)$ — векторы-столбцы соответствующих функций.

Получим выражения для масштабных функций с учетом свойства вложенности подпространств (1). Выражения (16) можно представить в виде:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \mathbf{h}' \gamma \mathbf{s}(2t) = \sqrt{2} \zeta' \mathbf{u}(2t) \quad (18a)$$

и

$$\tilde{\varphi}(t) = \sqrt{2} \mathbf{h}' \gamma \mathbf{s}(2t) = \sqrt{2} \tilde{\zeta}' \mathbf{s}(2t), \quad (18b)$$

где

$$\zeta' = \mathbf{h}' \gamma \quad (18b)$$

$$\text{и } \tilde{\zeta}' = \tilde{\mathbf{h}}' \gamma \quad (18r)$$

— векторы-строки, размером $4m$, а векторы-строки \mathbf{h}' и $\tilde{\mathbf{h}}'$ размером $3m$ получены по формулам (2). В развернутом виде

$$\varphi(t) = \sum_{r=-3m+1}^m \zeta_r \sqrt{2} u_r(2t),$$

$$\tilde{\varphi}(t) = \sum_{r=-3m+1}^m \zeta_r \sqrt{2} s_r(2t).$$

Тогда окончательно выражения для масштабных функций в V_j можно представить в виде:

$$\varphi(2^j t - k) = \sum_{r=-3m+1}^m \zeta_r \sqrt{2} u_r(2^{j+1} t - 2k), \quad (19a)$$

$$\tilde{\varphi}(2^j t - k) = \sum_{r=-3m+1}^m \tilde{\zeta}_r \sqrt{2} s_r(2^{j+1} t - 2k). \quad (19b)$$

СИНТЕЗ ВЕЙВЛЕТ

В матричном виде выражение (3a) имеет вид

$$\psi(t) = \sqrt{2} \mathbf{g}' \varphi(2t),$$

где \mathbf{g}' — вектор-строка размером $4m$.

Учитывая (17), получим материнский вейвлет

$$\psi(t) = \sqrt{2} \mathbf{g}' \gamma \mathbf{u}(2t) = \sqrt{2} \eta' \mathbf{u}(2t), \quad (20a)$$

где $\eta' = \mathbf{g}' \gamma$ — вектор-строка размером $4m$.

Аналогично, для $\tilde{\psi}(t)$:

$$\tilde{\psi}(t) = \sqrt{2} \tilde{\mathbf{g}}' \gamma \mathbf{s}(2t) = \sqrt{2} \tilde{\eta}' \mathbf{s}(2t), \quad (20b)$$

где $\tilde{\eta}' = \tilde{\mathbf{g}}' \gamma$.

Базисные функции вейвлет для подпространств W_j определяются выражениями

$$\psi(2^j t - k) = \sum_{r=-2m+1}^{2m} \eta_r \sqrt{2} u_r(2^{j+1} t - 2k), \quad (21a)$$

$$\tilde{\psi}(2^j t - k) = \sum_{r=-2m+1}^{2m} \tilde{\eta}_r \sqrt{2} s_r(2^{j+1} t - 2k). \quad (21b)$$

Таким образом, также как масштабные функции (19), базисные функции вейвлет можно выразить через исходные функции $\{s(t-k), u(t-k)\}$, связанные интегральным уравнением (7).

АНАЛИЗ

Анализ сигналов с помощью вейвлет аналогичен полосовой фильтрации сигналов с помощью фильтра нижних частот и полосовых фильтров, разбивающих частотный диапазон на полосы: первым является фильтр нижних частот с частотой отсечки $2\pi 2^{j_0}$, выделяющий сигналы подпространства V_{j_0} , второй — полосовой фильтр с полосой $(2\pi 2^{j_0}, 2\pi 2^{j_0-1})$, выделяющий сигналы подпространства W_{j_0} , и т.д. (рис. 3). В пределе таким образом могут быть охвачены все сигналы из L^2 , т.е.

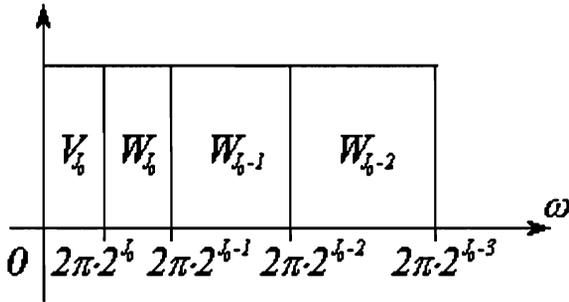


Рис.3. Разбиение частотного диапазона на полосы при вейвлет-анализе.

$$L^2 = V_{j_0} \oplus W_{j_0} \oplus W_{j_0+1} \oplus \dots$$

Причем, базисом в V_{j_0} являются функции $\{\varphi_{j_0,k}(t)\}$, базисом в W_{j_0} являются функции $\{\psi_{j_0,k}(t)\}$ и т.д.

Тогда любую функцию $x(t)$ из L^2 можно представить в виде [7]:

$$x(t) = \sum_k c_{j_0}(k) \tilde{\varphi}_{j_0,k}(t) + \sum_k \sum_{j=j_0}^{\infty} d_j(k) \tilde{\psi}_{j,k}(t), \quad (22)$$

где c_{j_0} и d_j являются коэффициентами разложения в соответствующих базисах.

Определим эти коэффициенты. После замены переменных $n = 2k + r$ в (19) и (21) получим:

$$\varphi(2^j t - k) = \sum_n \zeta_{n-2k} \sqrt{2} u(2^{j+1} t - n), \quad (23a)$$

$$\tilde{\varphi}(2^j t - k) = \sum_n \tilde{\zeta}_{n-2k} \sqrt{2} s(2^{j+1} t - n), \quad (23b)$$

$$\psi(2^j t - k) = \sum_n \eta_{n-2k} \sqrt{2} u(2^{j+1} t - n), \quad (24a)$$

$$\tilde{\psi}(2^j t - k) = \sum_n \tilde{\eta}_{n-2k} \sqrt{2} s(2^{j+1} t - n). \quad (24b)$$

Для коэффициентов $c_{j_0}(k)$ с учетом выражений

(5) и (23) будем иметь

$$\begin{aligned} c_{j_0}(k) &= \langle x(t), \varphi_{j_0,k}(t) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) 2^{j_0/2} \varphi(2^{j_0} t - k) dt = \\ &= \sum_n \zeta_{n-2k} X_{j_0+1}(n). \end{aligned} \quad (25)$$

Для коэффициентов вейвлет получим аналогично:

$$d_j(k) = \langle x(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \sum_n \eta_{n-2k} X_{j+1}(n), \quad (26)$$

где $X(n) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) n(t-n) dt$ представляет собой функцию взаимной корреляции между обрабатываемым сигналом $x(t)$ и опорной функцией оптимального приемника $u(t)$ в дискретные моменты времени.

Из последних двух формул кроме того следует, что коэффициенты разложения по масштабным функциям $c_{j_0}(k)$ и коэффициенты вейвлет $d_j(k)$ могут быть получены как взвешенная сумма выхода согласованного фильтра с переходной функцией $h_0(t) = u(-t)$, взятого в дискретные моменты времени $t = n$. Действительно

$$\begin{aligned} X(t)|_{t=n} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_0(t-\tau) d\tau |_{t=n} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(\tau-n) d\tau = X(n). \end{aligned}$$

Изменяя масштаб можно получить все значения $X_j(n)$.

Условие вложенности подпространств порождает достаточно простой алгоритм вейвлет-анализа, суть которого заключается в вычислении

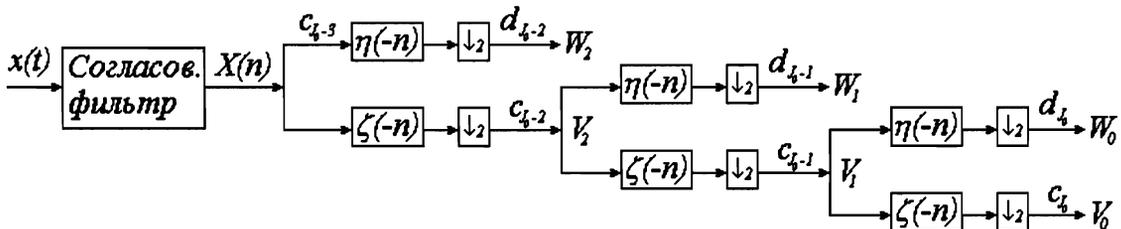


Рис.4. Трехуровневая схема вейвлет-анализа ($\eta(-n)$ — полосовой фильтр, $\zeta(-n)$ — фильтр нижних частот, $\downarrow 2$ — понижение частоты отсчетов в два раза)

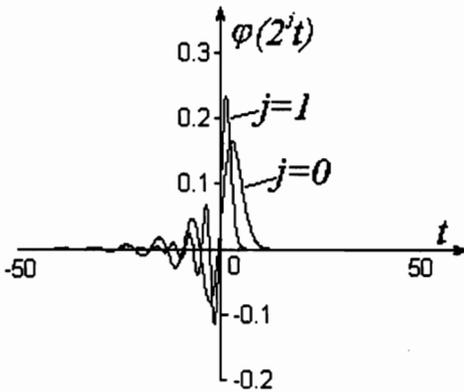


Рис. 5. Масштабные функции при $(j = 0, 1)$

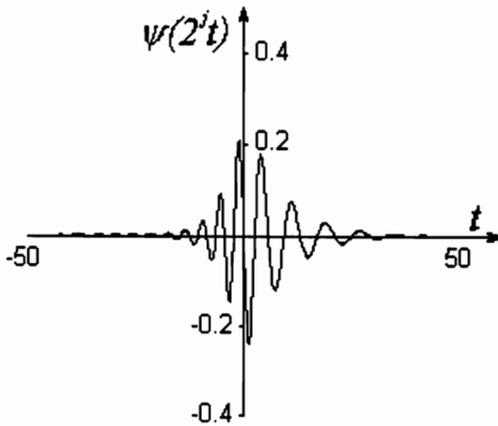


Рис. 6. Материнский вейвлет $(j = 0; k = 0)$

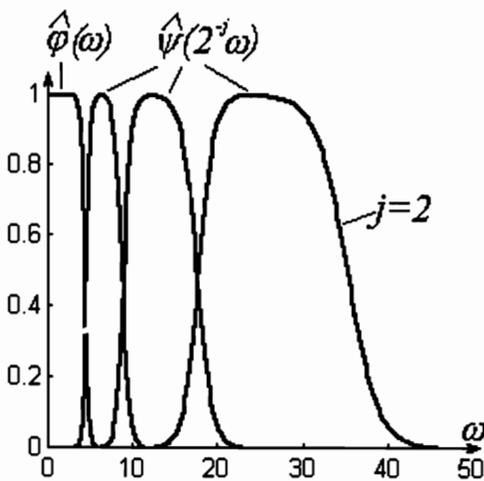


Рис. 7. Преобразование Фурье масштабной функции $\varphi(t)$ и вейвлет $\psi(2^j t)$ $(j = 0, 1, 2)$

коэффициентов $c_{J_0}(k)$ и $d_j(k)$ сначала с самым высоким разрешением, а затем — с понижающимся в 2, 4 и т.д. раз. Математически он вытекает из соотношений дуальности (1) и (3), а именно [7]:

$$c_{J_0-1}(k) = \sum_n h(n-2k) c_{J_0}(n) \quad (27a)$$

и

$$d_{J_0-1}(k) = \sum_n g(n-2k) d_{J_0}(n). \quad (27b)$$

В формулах (27) коэффициенты c_{J_0}, d_{J_0} — результат анализа на "тонкой" шкале, т.е. анализ в целом ведется от "более тонкого к более грубому". Это означает, что анализ, в принципе, может начинаться с временных отсчетов, которые можно считать результатом наиболее "тонкого" представления сигнала.

Трехуровневая схема вейвлет-анализа с использованием согласованного фильтра на первой стадии совместно с традиционной схемой на последующих этапах показана на рис. 4. Анализ ведется, начиная с самого широкополосного фильтра — фильтра нижних частот, которым является согласованный фильтр. При этом оптимальным образом выделяются из шума наиболее тонкие детали сигнала, из которых затем с помощью фильтров $\eta(-n)$ и $\zeta(-n)$ выделяется высокочастотная часть спектра d_{J_0-2} (подпространство W_2) и низкочастотная часть спектра c_{J_0-2} (V_2). Эта часть спектра затем снова разбивается на две: d_{J_0-1} (W_1) и c_{J_0-1} (V_1) и т.д. Таким образом, на выходе трехуровневой схемы анализа будем иметь коэффициенты разложения сигнала по масштабным функциям c_{J_0} (V_0) и высокочастотное дополнение d_{J_0} (W_0).

МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для проверки приведенной выше методики синтеза вейвлет выбрана гауссова модель $s(t) = \exp\{-t^2/\mu_0^2\}$, случай самодуального базиса $s(t) \equiv u(t)$. В таблице приведены коэффициенты ортогонализации \mathbf{b} при $\mu_0 = 8$.

Используя эти коэффициенты по формуле (14) получены коэффициенты β , по формулам (15) и (2) — коэффициенты \mathbf{h} , и по формулам (18) — коэффициенты ζ . Наконец, по формулам (20) определяются коэффициенты η , которые позволяют построить функции вейвлет. По формулам (19) и (21) построены графики масштабных функций и вейвлет, которые приведены на рис. 5 и 6. На рис. 7 показаны Фурье-преобразования масштабной

Таблица. Коэффициенты ортогонализации ($\sigma_0 = 5.05766047$, $m = 20$)

m	m	m-1	m-2	m-3	m-4	m-5	m-6	m-7...1
b	0	-0,95951739	-0,24760725	-0,02138981	-0,00065790	-0,0000073	-0,00000003	0,0

функции и вейвлет при трех значениях масштаба. Из рис. 7 хорошо видно, что вейвлет-анализ представляет собой полосовую фильтрацию с помощью набора фильтров с расширяющейся полосой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, благодаря гибкости преобразований вейвлет, обработку сигналов с помощью этих функций, с целью максимального подавления шума и повышения достоверности измерений, можно приспособить (адаптировать) к условиям эксперимента, а именно использовать априорную информацию о шумах и форме сигнала. Это позволяет совместить широко используемую процедуру согласованной фильтрации и вейвлет-анализа при обработке сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Астафьева Н.М. //УФН. 1996. Т. 166, №11. С.1145–1170.
2. Barclay V.J., Bonner R.F., Hamilton I.P. //Anal.Chem. 1997. V.69, №1 P.78–90.
3. Norgun Erdol, Filiz Basbug. // Applied Optics. 1994. V.33, №23. P.5303–5307.
4. Русинов Л.А., Новиков Л.В. Спектральный подход к первичной обработке сигналов. 1984. Изд. Лен.Гос. ун-та. Л. 156 с.
5. Mallat S.G.//Transactions of the American Mathematical Society. 1989. V. 315, №1. P.69–87.
6. Cohen A., Doubechies I., Feanveau J.-C. //Communications on Pure and Applied Mathematics.1992. Vo.XLV. P.485–560.
7. Burrus C. Sidney, Ramesh A. Gopinath, Haitao Guo. Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms. 1998. Prentice Hall. New Jersey. 268 p.
8. Vetterli Martin, Kovacevic Jelena. Wavelets, Subband Coding. 1995. Prentice Hall. New Jersey. 430 p.

ADAPTIVE WAVELET ANALYSIS OF SIGNALS

L.V. Novikov

Institute for Analytical Instrumentation RAS, St. Petersburg

The relationship between matched filtering and wavelet analysis is discussed. A wavelet synthesis procedure is offered, which relies on the a priori information on the signal shape (apparatus function) and noise correlation function. This allows adaptation of the wavelet analysis of measurement data for maximal signal denoising. The results of modeling based on the Gaussian signal model are given.