

УДК 629.12.073.249

ВЛИЯНИЕ РАСТЯЖЕНИЯ КАБЕЛЬ-ТРОСА НА ПОГРЕШНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ МОРСКОГО ВОЛНЕНИЯ ПОСРЕДСТВОМ ВОЛНОМЕРНОГО БУЯ С ГИДРОСТАТИЧЕСКИМ ДАТЧИКОМ ДАВЛЕНИЯ

© Д.Г. Грязин

Санкт-Петербургский Государственный институт точной механики и оптики (технический университет)

Поступила в редакцию 14 декабря 1998г.

Рассматриваются результаты теоретического исследования влияния растяжения кабель-троса на амплитудно-частотные характеристики вертикальной качки волномерного буйа с гидростатическим датчиком давления. Приводится математическая модель, учитывающая указанное влияние. Материалы исследования могут быть полезны специалистам, занимающимся разработкой гидрометприборов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Измерение морского волнения является важной задачей для отраслей техники, связанных с морем. Информация о его параметрах необходима для судостроения, морской геологии, судовождения, гидротехники, океанологии. Наиболее простым и распространённым средством измерения морского волнения остаётся волномерный буй с гидростатическим датчиком давления. Конструкция этого прибора приводится во многих работах, например [1], и состоит из буйка, свободно плавающего на поверхности воды, заглубляемой гондолы с датчиком давления и кабель-троса значительной длины (30–60 м), соединяющего буй с гондолой.

Развитие отечественного приборостроения позволило поставить задачу проектирования волномерных буйев на качественно новом уровне. Особенно важным при разработке волнографов является математическое моделирование их реакции на волновые возмущения, что позволяет существенно уточнить расчёт метрологических характеристик прибора на этапе его проектирования. Вертикальные колебания буйа (вертикальная качка) обусловлены гидродинамическими силами, возникающими при обтекании корпуса буйа волной и перераспределении давления по его смоченной поверхности. Вертикальная качка буйа, в общем случае, не совпадает с перемещениями профиля волны, что является одним из источников погрешности при измерениях.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В том случае, когда линейные размеры буйа малы по сравнению с набегающей волной, уравнение его вертикальной качки в абсолютной системе координат может быть записано в форме:

$$(m + \lambda)\ddot{\zeta}_g + W\dot{\zeta}_g + \rho g S \zeta_g = \rho g S r e^{-Kt} \cos \omega t, \quad (1)$$

здесь m — масса буйа, λ — присоединённая масса воды, W — коэффициент сопротивления, ρ — плотность воды, g — ускорение силы тяжести, S — площадь ватерлинии буйа, r — амплитуда волны, $K = \frac{\omega^2}{g}$, ζ_g — мгновенное значение ординат вертикальных перемещений буйа, ω — круговая частота.

Особенностью работы волномерных буйев с гидростатическим датчиком давления является то, что гидродинамические характеристики буйа и других подсоединённых к нему элементов существенно влияют на диапазон измеряемых частот волн. Очевидно, что уравнение (1) не учитывает растяжения кабель-троса в рамках закона Гука, возникающие под воздействием гондолы при вертикальных колебаниях буйа. Для расчёта сил, действующих на буй при его колебаниях со стороны кабель-троса с грузом, рассмотрим задачу о действии продольной силы на вертикальный трос с нулевой плавучестью. При рассмотрении примем допущения: — кабель-трос испытывает только продольные воздействия, — гидродинамическое сопротивление кабель-троса с грузом пренебрежимо мало.

Рассмотрим вертикальный трос с нулевой плавучестью, погружённый в неподвижную жидкость. Нижний конец троса прикреплен ко дну (рис. 1). Как видно из рисунка, расстояние S_0 от дна до некоторой точки P_0 на тросе определяется

интегралом $S_0 = \int_0^{S_p} dS_0$, где dS_0 — элементарный участок троса.

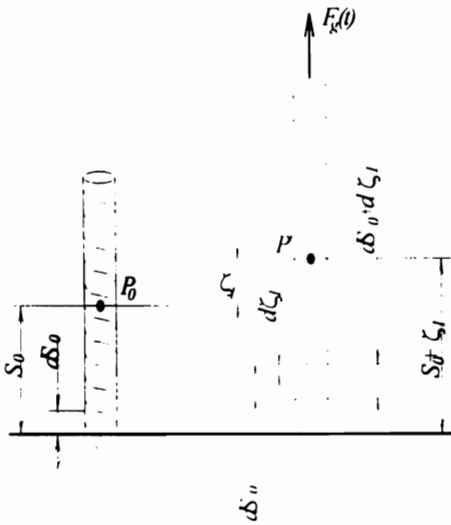


Рис. 1. Действие продольной силы $F_x(t)$ на вертикальный трос с нулевой плавучестью.

Предположим, что в некоторый момент t_0 к верхнему концу троса приложена сила $F_x(t)$, изменяющаяся со временем и направленная вертикально вверх. Под действием этой силы трос вытягивается [2]. Как видно из рис. 1, точка P_0 за время t перемещается в положение P' на расстояние ζ_1 от того положения, которое она занимала до приложения продольной силы $F(t)$. Длина элементарного участка троса dS_0 увеличивается на отрезок $d\zeta_1 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial S_0} dS_0$. Полное удлинение троса ζ_1 (смещение точки P) в этом случае будет $\zeta_1(S_0, t)$. Растяжение ε или удлинение на единицу длины троса, возникшее в результате приложения продольной силы $F(t)$ к концу троса, в свою очередь, определяется выражением $\varepsilon = \frac{\partial \zeta_1}{\partial S_0}$. Полагая, что материал троса подчиняется закону Гука, находим соответствующее напряжение

$$\sigma = E_l \varepsilon = E_l \frac{\partial \zeta_1}{\partial S_0},$$

где E_l — модуль упругости материала троса. Если через S_T обозначить площадь поперечного сечения троса, то силы, действующие на нижний и верхний концы элементарного участка определяются как

$$S_l \sigma = S_l E_l \frac{\partial \zeta_1}{\partial S_0},$$

при изменении силы

$$S_T \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial S_0} \right) = S_T E_T \left[\frac{\partial \zeta_1}{\partial S_0} + \frac{\partial}{\partial S_0} \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial S_0} \right) dS_0 \right].$$

Пренебрегая вязкостью жидкости, представим силу, характеризующую разность между силами, приложенными к противоположным концам элементарного участка троса, в форме

$$S_T E_T \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial S^2} dS_0.$$

Дифференциальное уравнение, выражающее зависимость между результирующей силой и растяжением элементарного участка троса, определится из второго закона Ньютона:

$$S_T E_T \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial S_0^2} = \mu_c \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial t^2}, \quad (2)$$

где μ_c — масса единицы длины троса с учётом присоединённой массы воды. Обозначая

$n^2 = \frac{S_T E_T}{\mu_c}$ и подставляя это выражение в формулу (2), получим известное одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial S_0^2} = \frac{\partial^2 \zeta_1}{n^2 \partial t^2}, \quad (3)$$

где $n = \sqrt{\frac{E_T S_T}{\mu_c}}$ — скорость распространения продольных деформаций в упругой нити, погружённой в воду.

Решение волнового уравнения (3) производится методом разделения переменных и показано в работе [2]. Это решение имеет вид:

$$\begin{aligned} \zeta_1(S_0, t) = & (A \cos g_0 t + B \sin g_0 t) \times \\ & \times \left(C \cos \frac{g_0}{n} S_0 + D \sin \frac{g_0}{n} S_0 \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где g_0 — действительное число (константа), которое вводится для решения волнового уравнения, A, B, C и D — константы, численные значения которых определяются начальными и граничными условиями задачи.

Рассматривая растяжение кабель-троса под действием груза при колебаниях буя, примем до-

полнительные граничные условия: — начальное смещение всех точек троса (полное его удлинение) в момент времени $t = 0$ равно нулю, т.е. $\zeta_1(S_0, 0) = 0$, — колебания верхней части троса подчиняются косинусоидальному закону $\zeta_1(L, t) = Z_0 \cos \omega t$, где Z_0 — амплитуда вертикальных колебаний буя, — начало троса отсчитывается от его нижнего конца, то есть от точки, где $S_0 = 0$.

Очевидно, что к нижнему концу троса приложено натяжение $T(0, t)$ и вес гондолы $P_f = W_f - B_f$, где $W_f = m_f g$ — вес гондолы в воздухе, m_f — масса гондолы, B_f — плавучесть гондолы. Пренебрегая демпфирующим эффектом вязкости воды, действующим на груз, уравнение движения груза выведем с помощью закона Ньютона, где m_f — масса гондолы с присоединённой массой воды. Поскольку в статических условиях натяжение на нижнем конце троса равно весу груза в воде, то $T_0 = P_f = P_{fB} - B_f \rho g$, где P_{fB} — вес груза в воздухе, B_f — объем груза. Уравнение движения примет вид:

$$E_T S_T \left. \frac{\partial \zeta_1}{\partial S_0} \right|_{S_0=0} + m_f \left. \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial t^2} \right|_{S_0=0} = 0. \quad (5)$$

Это и есть граничное условие для нижнего конца троса. Учитывая граничное условие $\zeta_1(S_0, 0)$, уравнение (5) примет вид:

$$\begin{aligned} \zeta_1(S_0, t) &= B \sin g_0 t \left(C \cos \frac{g_0}{n} S_0 + D \sin \frac{g_0}{n} S_0 \right) = \\ &= \left(M \cos \frac{g_0}{n} S_0 + N \sin \frac{g_0}{n} S_0 \right) \sin g_0 t, \end{aligned} \quad (6)$$

где $M = BC$, $N = BD$. Возьмём первую частную производную по S_0 и вторую по t , после чего подставим результаты в граничные условия для нижнего конца троса. Учитывая, что при $S_0 = 0$ значение $N = \frac{m_f g_0 M n}{E_T S_T}$, выражение (6) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \zeta_1(S_0, t) &= \\ &= M \left(\cos \frac{g_0}{n} S_0 + \frac{m_f g_0 n}{E_T S_T} \sin \frac{g_0}{n} S_0 \right) \sin g_0 t. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично из граничного условия $\zeta_1(L, t) = Z_0 \cos \omega t$ для верхнего конца троса получим:

$$\begin{aligned} Z_0 \cos \omega t &= \\ &= M \left(\cos \frac{g_0}{n} L + \frac{m_f g_0 n}{E_T S_T} \sin \frac{g_0}{n} L \right) \sin g_0 t. \end{aligned}$$

Принимая условие, что $g_0 = \omega$, выражение перепишется в виде:

$$M = \frac{Z_0 \cos \omega t}{\left(\cos \frac{\omega}{n} L + \frac{m_f \omega n}{E_T S_T} \sin \frac{\omega}{n} L \right) \sin \omega t}, \quad (8)$$

подставляя выражение (8) в уравнение (7) получим:

$$\zeta_1(S_0, t) = \frac{Z_0 \cos \omega t \left(\cos \frac{\omega}{n} S_0 + \frac{m_f \omega n}{E_T S_T} \sin \frac{\omega}{n} S_0 \right)}{\cos \frac{\omega}{n} L + \frac{m_f \omega n}{E_T S_T} \sin \frac{\omega}{n} L}.$$

Дополнительная сила F_T , вызванная натяжением кабель-троса и приложенная к нижней части буя, будет определяться как

$$F_T = T_0 + P S_0 + E_T S_T \frac{\partial \zeta_1}{\partial S_0},$$

где $T_0 = W_f - B_0$, $P S_0$ — вес троса (значения T_0 и $P S_0$ учтены в уравнении качки (1), т.к. входят в вес буя и определяют его осадку).

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial S_0} = \frac{Z_0 \omega \cos \omega t \left(\frac{m_f \omega}{E_T S_T} \cos \frac{\omega L}{n} - \frac{1}{n} \sin \frac{\omega L}{n} \right)}{\cos \frac{\omega L}{n} + \frac{m_f \omega n}{E_T S_T} \sin \frac{\omega L}{n}},$$

учитывая, что $Z_0 \cos \omega t = \zeta_g$, $-Z_0 \omega^2 \cos \omega t = \ddot{\zeta}_g$, выражение для F_T примет вид:

$$\begin{aligned} F_T &= \\ &= - \frac{\ddot{\zeta}_g m_f \cos \frac{\omega L}{n}}{\cos \frac{\omega L}{n} + \frac{m_f \omega n}{E_T S_T} \sin \frac{\omega L}{n}} - \frac{\zeta_g E_T S_T \frac{\omega}{n} \sin \frac{\omega L}{n}}{\cos \frac{\omega L}{n} + \frac{m_f \omega n}{E_T S_T} \sin \frac{\omega L}{n}}. \end{aligned}$$

Формула для F_T входит дополнительным слагаемым в правую часть выражения (1), однако, учитывая принцип равенства сил (принцип Даламбера), знак у F_T в уравнении должен быть отрицательным.

Таким образом, линейное дифференциальное уравнение вертикальной качки буя с учётом влия-

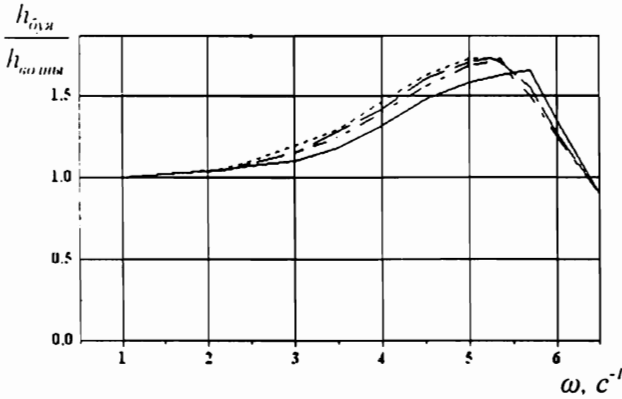


Рис. 2. Сравнение АЧХ буйев диаметром 0,44м и массой 22кг, рассчитанных без учета кабель-троса и с его учетом, при различной длине (диаметр 3мм) — — без учета кабель-троса; с кабель-тросом при массе гондолы 10 кг — — длиной 30м; — — — — длиной 40м; — — — — длиной 60м.

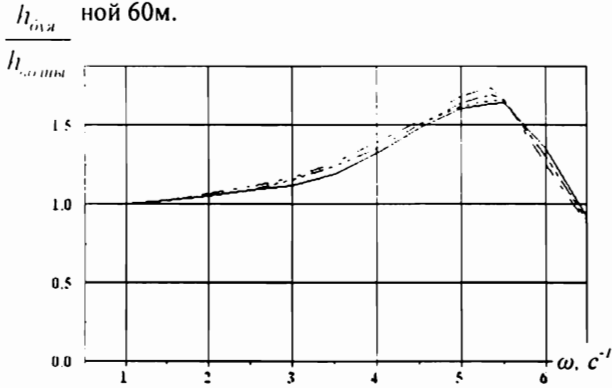


Рис. 3. Сравнение АЧХ буйев диаметром 0,44м и массой 22кг, рассчитанных без учета кабель-троса с гондолой и с его учетом, при различном диаметре (длина кабель-троса 30м): — — без учета кабель-троса; с кабель-тросом при массе гондолы 10кг — — — — 3мм; — — — — 5мм; — — — — 7мм.

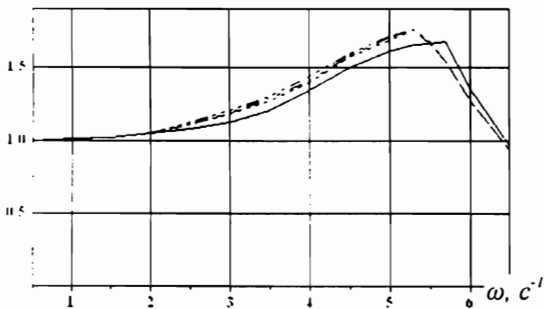


Рис. 4. Сравнение АЧХ буйев диаметром 0,44м и массой 22кг, рассчитанных без учета кабель-троса с гондолой и с их учетом, при различной массе гондолы: — — без учета кабель-троса; с кабель-тросом длиной 30 м. гондолой массой $h_{\text{буя}}/h_{\text{голова}}$ — 10кг; — — — — 12кг; — — — — 11кг.

ния подвешенной к нему на кабель-тросе гондолы, в абсолютной системе координат может быть записано в виде:

$$\begin{aligned}
 & (m_B + \lambda)\ddot{\zeta}_g + W\dot{\zeta}_g + \rho g S \zeta_g + \\
 & \frac{\ddot{\zeta}_g m_G \cos \frac{\omega L}{n}}{\cos \frac{\omega L}{n} + \frac{m_G \omega n}{E_T S_T} \sin \frac{\omega L}{n}} + \\
 & \frac{\zeta_g E_T S_T \frac{\omega}{n} \sin \frac{\omega L}{n}}{\cos \frac{\omega L}{n} + \frac{m_G \omega n}{E_T S_T} \sin \frac{\omega L}{n}} = \rho g S r e^{-kT} \cos \omega t,
 \end{aligned} \tag{9}$$

где m_G — масса гондолы с присоединённой массой, m_B — масса буйа, L — длина кабель-троса, S_T — площадь поперечного сечения троса, E_T — модуль упругости материала троса, μ_c — масса единицы длины троса с учётом присоединённой массы воды, $n = \sqrt{\frac{E_T S_T}{\mu_c}}$.

Выражение (9) отличается от уравнения (1) наличием в левой части четвёртого и пятого членов. Четвёртый член уравнения учитывает натяжение троса от массы, при условии, что трос не растяжим, а пятый — растяжение троса при гармонических колебаниях буйка.

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение (9) решается традиционным способом. Амплитуда вертикальной качки $Z = \sqrt{a^2 + b^2}$, где

$$a = \frac{C_1 A_1 \omega}{A_1^2 \omega^2 + (B_1 - \omega^2)^2};$$

$$b = \frac{C_1 (B_1 - \omega^2)}{A_1^2 \omega^2 + (B_1 - \omega^2)^2};$$

$$A_1 = \frac{W D_1}{(m_B + \lambda) D_1 + m_U \cos \frac{\omega L}{n}};$$

$$B_1 = \frac{\rho g S D_1}{(m_B + \lambda) D_1^2 + m_B \cos \frac{\omega L}{n} D_1};$$

$$C_1 = \frac{\rho g S r e^{-kT} D_1}{(m_B + \lambda) D_1 + m_G \cos \frac{\omega L}{n}};$$

$$D_1 = \cos \frac{\omega L}{n} + \frac{m_T \omega n}{E_T S_T} \sin \frac{\omega L}{n}.$$

Расчёт величины модуля упругости производится по формуле $E_T = \nu_T E_{Ю}$, где ν_T — коэффициент, зависящий от свивки троса: при двойной свивке $\nu_T = 0,4 \div 0,6$, при одинарной $\nu_T = 0,65 \div 0,85$. $E_{Ю}$ — модуль Юнга, причём для стали $E_{Ю} = 2 \cdot 10^6$ кг/см².

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

С использованием уравнения (9) произведены расчёты вертикальной качки цилиндрического буйа с общей массой прибора 22 кг, диаметром 0,44 м при относительной длине волны 1/40. При расчёте предполагалось, что кабель-трос состоит из кабеля диаметром 8 мм и троса. Диаметр троса, его длина и масса варьировались. При диаметре троса 3 мм масса одного погонного метра кабель-троса полагалась равной 100 г, что соответствует применению вместе с тросом кабеля марки СМПЭВГ 60.4 0.5. При увеличении диаметра троса масса погонного метра пропорционально увеличивалась.

Результаты расчёта амплитудно-частотных характеристик буйа, при вариации параметров кабель-троса представлены на рис. 2–4. Для сравнения на

рисунках также показаны АЧХ, рассчитанные на основе уравнения (1).

Из рисунков видно, что резонансная частота системы буй-кабель-трос-гондола при учёте растяжения кабель-троса несколько смещается в область более низких частот, при этом амплитуда колебаний в зоне резонанса возрастает незначительно. Уменьшение диаметра кабель-троса и увеличение его длины приводит к тому, что упругие свойства троса проявляются в большей степени. Следствием этого является уменьшение собственной частоты вертикальных колебаний системы. На изменении собственной частоты колебаний также сказывается масса груза. Анализ рисунков показывает, что нелинейная область АЧХ вертикальной качки буйа при расчёте влияния подвесных элементов несколько расширяется, а резонансная частота уменьшается. Указанные особенности не позволяют пренебрегать упругостью подвесных элементов при расчёте АЧХ в области резонанса для буйев с гидростатическим датчиком давления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глуховский Б.Х. Исследование морского ветрового волнения. 1966. Л. Гидрометеорологическое издательство. 284с.
2. Берто Г.О. Океанографические буйи. 1979. Л. Судостроение. 215с.

INFLUENCE OF CABLE-ROPE TENSION ON THE INACCURACY OF SEA WAVEDER BUOY WITH A HYDROSTATIC PRESSURE SENSOR

D.G. Gryazin

Saint-Petersburg State Institute of Fine Mechanics and Optics (Technical University)

Considered are the results of the basic research on the influence of cable-rope tension on the amplitude-frequency characteristics of heaving of the waverider buoy with a hydrostatic pressure sensor. A mathematical model taking into account the specified effect is presented.