

УДК 681.511.43

## ЧАСТОТНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ОЦЕНКИ РЕКУРРЕНТНОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ СИГНАЛА ПОСТОЯННОГО УРОВНЯ

© А.Л.Буляница, Д.А.Бурылов

Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург.

Поступила в редакцию 26 июня 1998г.

В работе проведено преобразование рекуррентного алгоритма стохастической аппроксимации Роббинса-Монро к структуре системы автоматического регулирования. Показано, что решение задачи сходимости оценки, получаемой в результате работы рекуррентного алгоритма, эквивалентно асимптотической устойчивости системы автоматического регулирования. Выявлено, что такая система автоматического регулирования не обладает асимптотической устойчивостью и будет находиться в состоянии устойчивых колебаний.

### ВВЕДЕНИЕ

При постановке экспериментов часто встречается ситуация, когда есть априорная информация о виде исследуемого сигнала, а сведения о помехе отсутствуют. В том случае, когда проведение повторных экспериментов связано с определёнными трудностями, анализ полученных данных можно проводить с помощью интервальных или рекуррентных алгоритмов. Преимущества рекуррентных алгоритмов были рассмотрены в работе [1]. В частности, для определения величины сигнала постоянного уровня  $c$  в условиях отсутствия априорной информации об аддитивной помехе был предложен следующий рекуррентный алгоритм [2]:

$$c_{n+1} = c_n - \frac{\beta}{n} \cdot \text{sign}(c_n - x_{n+1}). \quad (1)$$

Здесь:  $c_n, c_{n+1}$  — оценки измеряемой величины на

$n$ -ом и  $(n+1)$ -ом шагах,  $x_{n+1}$  — значение измеряемой величины на  $(n+1)$ -ом шаге,  $\beta$  — масштабный коэффициент, определяющий скорость сходимости.

При этом:  $c_n = c^* + \varepsilon_n$  и  $x_{n+1} = c^* + \xi_{n+1}$ , где  $\varepsilon_n$  — невязка на  $n$ -ом шаге,  $\xi_{n+1}$  — ошибка измерения. Важнейшим требованием, предъявляемым к такого рода алгоритмам, является требование сходимости полученной оценки. Вопросы, касающиеся сходимости оценки, полученной в результате работы алгоритма (1), были рассмотрены в работах [3, 4].

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Алгоритм (1) может быть реализован с помощью системы автоматического регулирования, представленной на рис. 1. В эту систему входят:

- $K_1$  — элемент, выполняющий операцию  $\text{sign}(c_n - x_{n+1})$ .

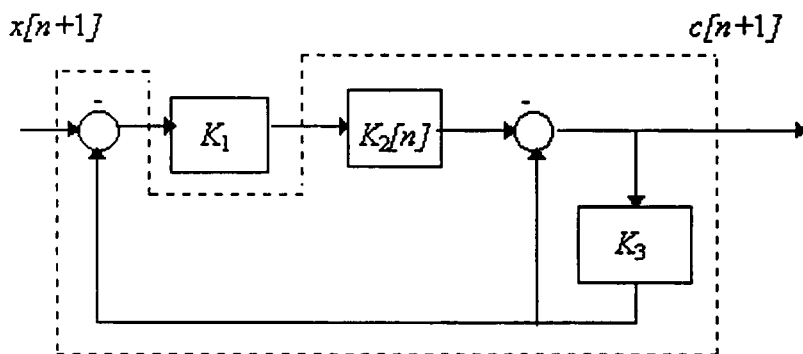


Рис. 1 Структурная схема системы автоматического регулирования.

- $K_2[n]$  — элемент, реализующий функцию  $\beta/n$ .
- $K_3$  — элемент задержки на один шаг.

Анализируемая система имеет две особенности. Во-первых, она нелинейная, так как содержит в своём составе элемент, реализующий функцию *sign*. Это элемент  $K_1$ , он является идеальным реле. Во-вторых, есть элемент  $K_2$  с переменным параметром, реализующий функцию  $\beta/n$ . Сходимость оценки в рамках такой системы эквивалентна выполнению следующего условия:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - c^*) = 0 \quad (2)$$

Кроме того, выражение (2) есть не что иное, как определение асимптотической устойчивости положения равновесия.

Таким образом, целью работы является определение асимптотической устойчивости системы автоматического регулирования, поскольку она эквивалентна задаче определения сходимости оценки, получаемой в результате работы алгоритма (1).

Помимо этого, вследствие нелинейности, необходимо рассматривать и другие виды устойчивости: устойчивость периодических режимов и устойчивость протекающих в системе процессов.

#### ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Как уже было отмечено, анализируемая система является дискретной нелинейной системой с изменяющимся параметром. Существует несколько методов анализа устойчивости таких систем, но в данном случае воспользуемся только одним из них — частотным. Следует отметить, что частотный метод накладывает определённые ограничения на форму нелинейности: она может иметь любое очертание, не выходящее за пределы заданного угла  $\arctg k$ :

$$0 < F(x) < kx, \quad k < \infty$$

В нашем случае нелинейность идеальная, т.е.  $k \rightarrow \infty$ . В реальных же условиях величина  $k$  конечна, хоть и достаточно велика.

Для анализа частотным методом необходимо записать изображения остальных элементов системы в  $p$ -области.

В работе [5] было показано, что сигналу на выходе устройства, реализующего функцию *sign*, соответствует следующее изображение в  $p$ -области:

$$F(p) = \pm \frac{j}{p} \quad (3)$$

Для элемента  $K_2[n]$  выполняемая функция во временной области запишется следующим образом:

$$K_2[n] = \frac{\beta}{n} \dots n \cdot T_0 < t < (n+1) \cdot T_0, \quad (4)$$

где  $T_0$  — период дискретизации,  $n = 1, \dots, +\infty$

Соответствующее ей изображение в  $p$ -области запишется так:

$$K_2[p] = \frac{-\beta \cdot (1 - e^{-pT_0}) \cdot e^{pT_0}}{p} \cdot \ln(1 - e^{-pT_0}) \quad (5)$$

Изображение в  $p$ -области элемента  $K_3$  имеет следующий вид:

$$K_3(p) = e^{-pT_0}$$

#### ОПИСАНИЕ И ВЫБОР КРИТЕРИЕВ УСТОЙЧИВОСТИ

Анализ литературы [6–8] позволяет сделать вывод о том, что нет единого подхода для анализа устойчивости таких нелинейных систем частотными методами.

Рассмотрим некоторые частотные критерии [6–8].

I. Для анализа абсолютной устойчивости системы с одной однозначной нелинейностью В.М. Поповым был предложен следующий подход. Если в системе имеется одна однозначная нелинейность, то объединив вместе все остальные линейные уравнения системы можно получить общее уравнение линейной части системы. Для установления устойчивости нелинейной системы достаточно подобрать такое конечное действительное число  $h$ , при котором при всех  $\omega \geq 0$  выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}((1 + j\omega h)W(j\omega)) + \frac{1}{k} > 0 \quad (6)$$

где  $W(j\omega)$  — амплитудно-фазовая характеристика линейной части системы, а  $\arctg k$  — угол наклона нелинейной характеристики. При наличии одного нулевого полюса требуется ещё чтобы  $\operatorname{Im} W(j\omega) \rightarrow -\infty$ , а при двух нулевых полюсах  $\operatorname{Re} W(j\omega) \rightarrow -\infty$  при  $\omega \rightarrow 0$ , а  $\operatorname{Im} W(j\omega) < 0$  при малых  $\omega$  [7].

II. Другой подход был предложен в работе [8]. Из-за особенностей нелинейного элемента линейная часть системы подвергается воздействию прямоугольных импульсов постоянной амплитуды, знак, длительность и относительное расположение которых зависят как от внешнего воздействия, так и от состояния системы. Исследование нелинейной автоматической системы сводится к исследованию поведения линейной части системы при воздействии на неё указанных импульсов. Воздействие, приложенное к линейной части системы можно рассматривать как сумму воздействий простейшего вида. Эти соображения сводят рассмотрение существенно нелинейной системы к анализу реакции линейной части системы на импульсное воздействие (при выполнении некоторых дополнительных условий). Для анализа системы на устойчивость воспользуемся критерием для определения устойчивости в целом, так как в реальных условиях помеха может являться выбросом с аб-

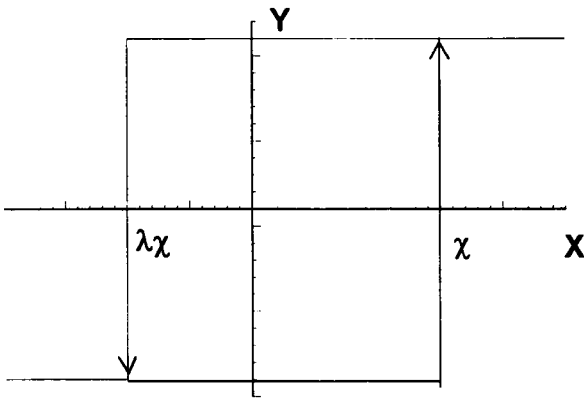


Рис. 2 Статическая передаточная характеристика нелинейного элемента.

солотным значением намного отличающимся от величины информативного сигнала.

В данном случае для проведения анализа в системе необходимо выделить нелинейный элемент, линейную часть системы  $W(j\omega)$  и цепь единичной обратной связи.

Для того, чтобы нелинейная автоматическая система была устойчива в целом, достаточно, чтобы линейная часть системы была нейтральна или устойчива, а частотная характеристика и параметры нелинейного элемента удовлетворяли бы условию

$$\operatorname{Re}((1 + jq\omega)W(j\omega)) + \frac{\alpha\chi}{k} \geq 0, \quad (7)$$

где  $\alpha = \lambda, q \leq 0$  при положительном гистерезисе,  $\alpha = 1, q \geq 0$  при отрицательном гистерезисе.  $\lambda$  и  $\chi$  определяют границы области гистерезиса нелинейного элемента (рис. 2).

III. Рассмотрим ещё один подход, предложенный в [6]. Анализируемая система приводится к тому же виду, что и в предыдущем случае. Необходимым условием устойчивости нелинейной импульсной системы является выполнение следующего требования: приведённая линейная часть системы должна быть устойчивой или нейтральной. В данном случае приведённая линейная система нейтральна, так как она имеет один нулевой полюс.

При анализе нелинейной импульсной системы на устойчивость накладываются дополнительные ограничения на форму нелинейной характеристики: она должна принадлежать сектору  $(r, k)$ :

$$\Phi(0) = 0, \quad r + \alpha \leq \frac{\Phi(x)}{x} \leq k - \alpha,$$

где  $\alpha$  — сколь угодно малое положительное число, а  $r$  — может быть и положительным, и отрицательным числом.

Критерий абсолютной устойчивости нелинейной импульсной системы записывается в следующем виде: для устойчивых и нейтральных непрерывных частей импульсной системы с нелинейной

характеристикой, лежащей в секторе  $(r, k)$ , положение равновесия системы будет абсолютно устойчивым, если амплитудно-фазовая характеристика линейной части не пересекает и не охватывает  $(r, k)$  — окружность при изменении  $\omega$  от 0 до  $\pi$ . Окружность  $(r, k)$  — это окружность, проходящая через точки  $(0, -\frac{1}{k})(0, -\frac{1}{r})$ .

IV. Так как анализируемая система является дискретной, то можно утверждать, что на неё оказывает периодическое воздействие с частотой равной частоте дискретизации

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}. \quad (8)$$

В этом случае влияние на устойчивость будет оказывать только фазовая задержка, возникающая на выходе линейной части системы. Для определения устойчивости периодического режима воспользуемся подходом, предложенным в [8].

Для этого в системе необходимо выделить нелинейный элемент, линейную часть системы  $W^*(j\omega)$  и единичную обратную связь. Периодический режим частоты  $\omega_0$  будет устойчивым, если разность между числом положительных и отрицательных переходов  $W^*(j\omega)$  через отрезок  $(-\infty, -1)$  при возрастании  $\omega$  от 0 до  $\omega_0$  равна  $n/2$ , где  $n$  — число правых полюсов передаточной функции линейной части системы.

### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Линейная часть системы, определённая согласно (1), обведена на рис.1 пунктирной линией. По условиям задачи на входе системы действует сумма сигнала постоянного уровня и помехи. Для начала примем, что действует только постоянный сигнал. Его изображение в  $p$ -области выглядит следующим образом:

$$Y(p) = \frac{y}{p}, \quad \text{где } y - \text{уровень этого сигнала.}$$

На основе формул (3–5) выражение передаточной функции для линейной части системы запишется следующим образом:

$$W(p) = \pm \frac{jy}{p^2} - \frac{-\beta \cdot \ln(1 - e^{-pT_0})}{p}$$

Сделаем замену  $p = j\omega$  и подставим получившееся выражение в неравенство (6)

$$\operatorname{Re}((1 + j\omega h)W(j\omega)) + \frac{1}{k} = \frac{\beta}{\omega} \left( \frac{\pi - \omega T_0}{2} \right) + \beta h \ln \left( \left| 2 \sin \frac{\omega T_0}{2} \right| \right) \pm \frac{hy}{\omega} + \frac{1}{k} > 0$$

Как уже отмечалось выше, величина  $k$  достаточно велика, поэтому

$$\frac{1}{k} \rightarrow 0$$

и этим слагаемым можно пренебречь. Следовательно,

$$h > \frac{\beta \cdot (\omega T_0 - \pi)}{2\omega \left( \beta \cdot \ln \left| 2 \sin \frac{\omega T_0}{2} \right| \pm \frac{y}{\omega} \right)}$$

Очевидно, что нельзя найти значение  $h$ , при котором выполнялось бы это неравенство (так как существует значение  $\omega$ , при котором знаменатель обращается в ноль, а левосторонний и правосторонний пределы в этой точке равны  $+\infty$  и  $-\infty$  соответственно). Следовательно, система неустойчива.

При использовании подхода ( II ), передаточная функция линейной части системы запишется в следующем виде:

$$W(p) = \frac{-\beta \cdot \ln(1 - e^{-pT_0})}{p} \quad (9)$$

Подставим соответствующее выражение  $W(j\omega)$  в неравенство (7)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(1 + j\omega q)W(j\omega) + \frac{1}{k} &= \frac{\beta}{\omega} \left( \frac{\omega T_0 - \pi}{2} \right) + \\ &+ \beta q \ln \left( \left| 2 \sin \frac{\omega T_0}{2} \right| \right) + \frac{\alpha \chi_0}{k} \geq 0 \end{aligned}$$

и разрешим его относительно  $q$

$$q \geq \frac{\beta \cdot (\pi - \omega T_0) \frac{\alpha \chi_0}{k}}{\beta \cdot \ln \left( \left| 2 \sin \frac{\omega T_0}{2} \right| \right)}$$

Вполне очевидно, что нельзя найти такое значение  $q$  при котором выполнялось бы данное неравенство. Это объясняется тем, что при

$$\omega = \frac{\pi + n\pi}{T_0} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{2\pi + n\pi}{T_0}$$

знаменатель обращается в ноль, а левосторонний и правосторонний пределы дроби в этих точках равны  $+\infty$  и  $-\infty$  соответственно. Следовательно можно сделать вывод о том, что анализируемая система не может находиться в состоянии устойчивого положения равновесия.

Применение подхода ( III ) для анализа устойчивости системы автоматического регулирования приводит к следующим результатам. В случае использования идеального нелинейного элемента  $k \rightarrow \infty$ , а  $r \rightarrow 0$ . В реальных условиях  $k$  — достаточно большая, но всё же конечная величина, а  $r$  — достаточно маленькая, но тоже конечная величина. Следовательно ( $r, k$ ) будет окружностью большого радиуса.

Передаточная функция линейной части системы задаётся формулой (8). Годограф передаточной функции линейной части системы при изменении  $\omega$  от нуля до  $\pi$  её представлен на рис. 3. При  $\omega = 0$  он выходит из точки  $(-\infty, -\infty)$  и, следо-

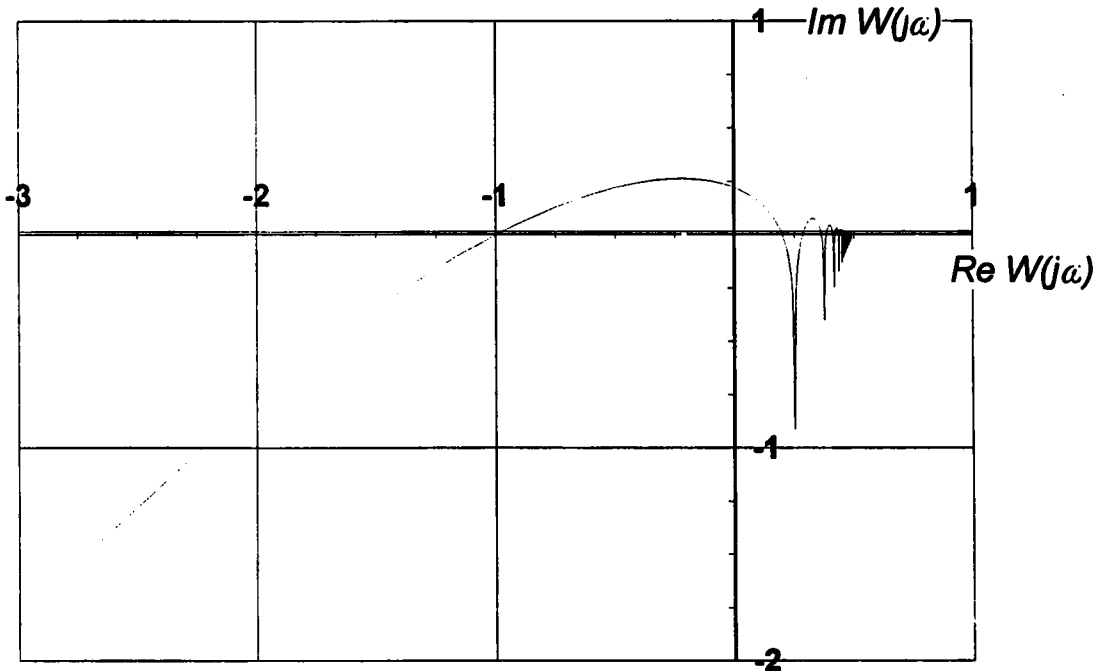


Рис. 3 Годограф линейной части системы автоматического регулирования (подход III)

вательно, пересекает  $(r, k)$  — окружность. Из этого можно сделать вывод, что система не может находиться в состоянии устойчивого положения равновесия.

Для анализа устойчивости периодического режима, согласно подходу (IV), в системе выделяются нелинейный элемент, линейная часть и цепь единичной обратной связи. Передаточная функция линейной части задаётся формулой (9). Очевидно, что данная передаточная функция имеет один полюс, который находится в начале координат. Следовательно, для того чтобы система находилась в устойчивых колебаниях, необходимо чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов  $W^*(j\omega)$  через отрезок  $(-\infty, -1)$  была равна нулю. Исследование устойчивости периодического режима в нелинейной системе без зоны нечувствительности согласно частотному критерию сводится к построению  $W^*(j\omega)$ , где

$$W^*(j\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} W(j(\omega + 2m\omega_0)).$$

Отсюда следует, что построить годограф можно по частотной характеристике линейной части системы.

Вещественная и мнимая части функции  $W^*(j\omega)$  запишутся в следующем виде:

$$U^*(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\beta \cdot ((\omega + 2m\omega_0)T_0 - \pi)}{2(\omega + 2m\omega_0)}$$

$$V^*(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\beta \cdot \ln \left| 2 \sin \left( \frac{(\omega + 2m\omega_0)T_0}{2} \right) \right|}{\omega + 2m\omega_0}$$

При изменении частоты  $\omega$  от нуля до  $\omega_0$  (8) годограф передаточной функции линейной части системы имеет вид, изображённый на рисунке 4.

Математическое моделирование, проведённое для значений параметров  $\beta = 10^1 \dots 10^4$  и  $T_0 = 10^{-1} \dots 10^{-3}$  показало, что годограф функции  $W^*(j\omega)$  не пересекает отрезок  $(-\infty, -1)$ . Следовательно система будет находиться в состоянии устойчивых

вынужденных колебаний.

### ВЫВОДЫ

1. Алгоритм стохастической аппроксимации Роббинса-Монро является системой автоматического регулирования, в которой невозможно достигнуть абсолютной устойчивости положения равновесия.
2. Оценка, полученная в результате применения алгоритма (1), будет осуществлять устойчивые колебания, независимо от параметров оцениваемого сигнала и помехи.
3. Достижение устойчивого положения равновесия системы автоматического регулирования требует ограничения производной передаточной характеристики нелинейного элемента  $K_1$ , что может быть реализовано, в частности, введением в алгоритм (1) зоны нечувствительности.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Курочкин В.Е., Фельдман Б.Х. Оценка параметра положения сигнала. // Научное приборостроение. Автоматизация научных исследований. 1988. Л.: Наука. С.68–73.
2. Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т. // Динамика систем. Математические методы теории колебаний. Вып. 12. 1977. Горький: Изд. Горьковского Университета.. С.22–46.
3. Бедельбаева А.А // Автоматика и телемеханика. 1978, № 1. С.87–95.
4. Буляница А.Л., Бурьлов Д.А. // Научное приборостроение. 1998. Т.8, № 1–2.
5. Дёч Г. Нелинейные преобразования случайных процессов. 1968. М.: Сов. Радио.
6. Цыпкин Я.З., Попков Ю.С. Теория нелинейных импульсных систем. 1973. М.: Наука.
7. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. 1975. М.: Наука. 768 с.
8. Цыпкин Я.З.. Релейные автоматические системы. 1974. М.: Наука. 576 с.

## FREQUENCY CRITERIA OF RECURRENT ALGORITHM ESTIMATION STABILITY FOR CONSTANT LEVEL SIGNAL

A.L.Bulianitsa, D.A.Burylov

*Institute for Analytical Instrumentation RAS, Saint-Petersburg*

The transformation of stochastic approximation's recurrent algorithm (Robbins-Monro algorithm) to the structure of automatic control's system is carried out in this work. It is shown, that the decision of a task of convergence of an estimation received as a result of work recurrent algorithm, is equivalent asymptotic's stability of automatic control's system. It is revealed, that the given system has not asymptotic's stability and will be in a condition of steady fluctuations.