НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 1998 том 8, № 1-2 с. 32-36

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК 519.245

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ОЦЕНКИ РЕКУРРЕНТНОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ СИГНАЛА ПОСТОЯННОГО УРОВНЯ

© А.Л.Буляница, Д.А.Бурылов

Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург.

Поступила в редакцию 16 июня 1998г.

Исследована сходимость оценки сигнала постоянного уровня, получаемой в результате реализации алгоритма стохастической аппроксимации, при наличии аддитивной помехи в виде некоррелированной случайной величины с произвольным законом распределения. Сходимость оценки к некоторому значению доказана с помощью стохастического подхода М. Аоки. Установлено, что оценка сходится при произвольном законе распределения помехи и любых параметрах оценщика.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Задача оценки параметра c сигнала $x(t)$ может быть сведена к задаче создания устройства-оценщика, позволяющего получить оценку этого параметра в качестве выходного сигнала.

Если $x(t)$ является процессом в реальном времени, оценщик может быть интервальным или рекуррентным. Интервальный оценщик обрабатывает входную переменную в течение фиксированного интервала времени и выдаёт точечную оценку c после завершения процесса обработки. Существует ряд общих методов построения интервальных оценок в случае независимых наблюдений: метод наибольшего правдоподобия, байесовские, обобщённые байесовские оценки и др. [1]. Общим недостатком этих методов является чувствительность текущих оценок к случайным выбросам и тот факт, что переход от оценки c_n, построенной по n наблюдениям, к оценке c_{n+1} требует относительно более сложного пересчёта, нежели при рекуррентном алгоритме, с использованием всех предыдущих измерений $x(t)$ [2]. Последнее обстоятельство заставляет увеличивать ресурсы памяти оценщика.

Рекуррентный оценщик выдаёт оценку c_n последовательно во времени на каждый такт измерения сигнала $x(t)$. Для получения оценки c_{n+1} с помощью стохастического рекуррентного алгоритма достаточно знать предыдущую оценку c_n и $(n+1)$-ое значение оцениваемого сигнала. Основополагающие принципы построения таких алгоритмов были сформулированы Роббинсом и Монро [3]. В дальнейшем они получили своё развитие в работах Кохрана, Кестена, Фабиана и других [4]. В работе [5] показано, что рекуррентный стохастический алгоритм эффективнее интервального по скорости получения оценки величины сигнала постоянного уровня, по крайней мере, в 1,5 раза. Это преимущество оказывается тем существеннее, чем больше динамический диапазон изменения оцениваемого сигнала. Приведенные аргументы делают проектирование рекуррентного оценщика актуальной задачей.

Появившиеся в последние годы микроконтроллеры разных типов позволили создавать компактные микромощные оценщики. Эти микроконтроллеры имеют существенный недостаток — небольшой объём памяти данных, что также повышает актуальность использования именно рекуррентных стохастических алгоритмов оценки сигналов.

Рассмотрим логику формирования рекуррентного оценщика для случая, когда измеряемая физическая величина $x(t)$ представляет из себя постоянный сигнал c^*, на который накладывается помеха в виде некоррелированной случайной величины $\xi(t)$ с плотностью распределения $\varphi(x)$ и функцией распределения $F(x)$. Поэтому можно записать $x_n = c^* + \xi_n$.

В работе [6] показано, что для класса невырожденных распределений помехи, для которых априорная информация о распределении отсутствует практически полностью, наименее благоприятным является распределение Лапласа

$$\varphi(x) = (2a)^{-1} \cdot \exp(-a^{-1}|x|).$$

Для рассматриваемого случая рекуррентный алгоритм может быть представлен в следующем виде [6]:

$$c_{n+1} = c_n - \frac{\beta}{n}\operatorname{sign}(c_n - x_{n+1}). \qquad (1)$$

Здесь: c_n, c_{n+1} — оценки измеряемой величины на n-ом и $(n+1)$-ом шагах, x_{n+1} — значение измеряемой величины на $(n+1)$-ом шаге, β — масштабный коэффициент, определяющий скорость сходимости. При этом: $c_n = c^* + \varepsilon_n$ и $x_{n+1} = c^* + \xi_{n+1}$, где ε_n — невязка на n-ом шаге, ξ_{n+1} — ошибка измерения.

Сходимость оценки определим следующим образом. Существует предел:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c_0\,, \tag{2}$$

где c_0, в общем случае, может не совпадать с истинным значением информативного параметра: $c_0 \neq c^*$.

В работе [7] было проведено исследование сходимости оценки, полученной в результате работы алгоритма (1) при различных видах функции распределения помехи. К оценке предъявлялись дополнительные требования несмещённости и состоятельности. Выполнение этих требований привело к введению следующих ограничений:

- помеха должна быть центрированной, симметричной и иметь ограниченную дисперсию, т.е. при любых x >0

$$M(\xi) = 0,\ D(\xi) < \infty,\ \varphi(x) = \varphi(-x). \tag{3}$$

- параметр β, используемый в алгоритме (1), должен выбираться, исходя из условия

$$\beta > \frac{1}{4\varphi(0)}.$$

При выполнении этих требований была доказана сходимость оценки к истинному значению информативного параметра c^*. Но это оказывается справедливо лишь для ограниченного класса помех и при введении ограничений на параметр β, используемый в алгоритме.

2. АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ РЕКУРРЕНТНОГО АЛГОРИТМА

Свойство сходимости оценки в более общем виде, без наложения упомянутых выше ограничений, может быть проанализировано на основе стохастического подхода М. Аоки [8]. Суть этого подхода заключается в следующем.

Пусть проведена последовательность измерений $y_0, \ldots, y_n$, зависящих от информативного параметра θ. Вследствие помех θ является случайной величиной, априорная плотность распределения вероятности $p(\theta)$ предполагается заданной. По известной совместной плотности распределения вероятности $p(y^n|\theta)$ в соответствии с формулой Байеса, можно построить $p(\theta|y^n)$ апостериорную плотность распределения:

$$p(\theta \mid y^n) = \frac{p(\theta)\cdot p(y^n \mid \theta)}{\int d\theta p(\theta)\cdot p(y^n \mid \theta)} \tag{4}$$

Очевидно, что $p(\theta|y^n)$ будет учитывать дополнительную информацию, содержащуюся в измерении y_n. Произведя новые измерения $y_{n+1}, \ldots y_{n+k}$, можно получить последовательность апостериорных плотностей вероятностей $p(\theta|y^{n+1}), \ldots p(\theta|y^{n+k})$.

Утверждается [8], что критерием сходимости оценки является:

$$\lim_{n\to\infty} \rho\big(p(\theta \mid y^n), p(\theta \mid y^{n+k})\big) = 0,\ \text{для любых } k \geq 1.$$

Здесь ρ — параметр, имеющий смысл расстояния между двумя распределениями. Этот параметр можно определить разными методами, но в [8] он определен согласно М-оценке Хьюбера [9].

Описанный подход был взят за основу при решении задачи о сходимости оценки алгоритма (1). Для этого перепишем его в следующем виде.

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{\beta}{n}\cdot \operatorname{sign}(\varepsilon_n - \xi_{n+1}). \tag{5}$$

Определим, что в начальный момент времени оценка c_1 совпадает с измерением x_1, и, таким образом, плотность распределения вероятности невязки $f_1(x)$ совпадает с плотностью распределения вероятности помехи $\varphi(x)$. Обозначим плотность распределения вероятности невязки на n-ом и $n+1$-ом шагах соответственно $f_n(x)$ и $f_{n+1}(x)$. В силу того, что алгоритм (1) является рекуррентным, распределение $f_{n+1}(x)$ однозначно определяется $\varphi(x)$ и $f_n(x)$. Кроме того, апостериорная плотность распределения невязки на n-ом шаге является априорной плотностью распределения на $n+1$ шаге. Поэтому вполне естественно в рамках данной модели сравнивать априорную и апостериорную плотности распределения невязки на n-ом шаге.

Апостериорная плотность распределения невязки вычисляется исходя из (5). Для того, чтобы невязка на $n+1$-ом шаге принадлежала диапазону $[x,\ x + dx]$, необходимо, с учётом формулы (5), выполнение следующего события А.

$$A = \left(\left(\varepsilon_n = \left[x - \frac{\beta}{n+1}, x - \frac{\beta}{n+1} + dx\right]\right) \cap \left(\xi_{n+1} \geq x - \frac{\beta}{n+1}\right)\right) \cup$$
$$\cup \left(\left(\varepsilon_n = \left[x + \frac{\beta}{n+1}, x + \frac{\beta}{n+1} + dx\right]\right) \cap \left(\xi_{n+1} \leq x + \frac{\beta}{n+1}\right)\right)$$

Здесь $\cap$ и $\cup$ обозначают произведение и сумму событий.

Поэтому можно записать следующее выражение:

$$f_{n+1}(x) = f_n\left(x - \frac{\beta}{n+1}\right)\cdot\left[1 - F\left(x - \frac{\beta}{n+1}\right)\right] + f_n\left(x + \frac{\beta}{n+1}\right)\cdot F\left(x + \frac{\beta}{n+1}\right). \tag{6}$$

Данная рекуррентная формула позволяет получить плотность распределения вероятности невязки к $n+1$-ому шагу при условии, что на вход системы на каждом шаге поступает случайная величина с плотностью распределения $\varphi(x)$. Нетрудно видеть, что в данном случае для определения плотности распределения невязки на $n+1$-ом шаге вовсе необязательно использовать формулу Байеса (4).

Поскольку на истинное значение оцениваемого параметра c^* накладывается помеха ξ с плотно-

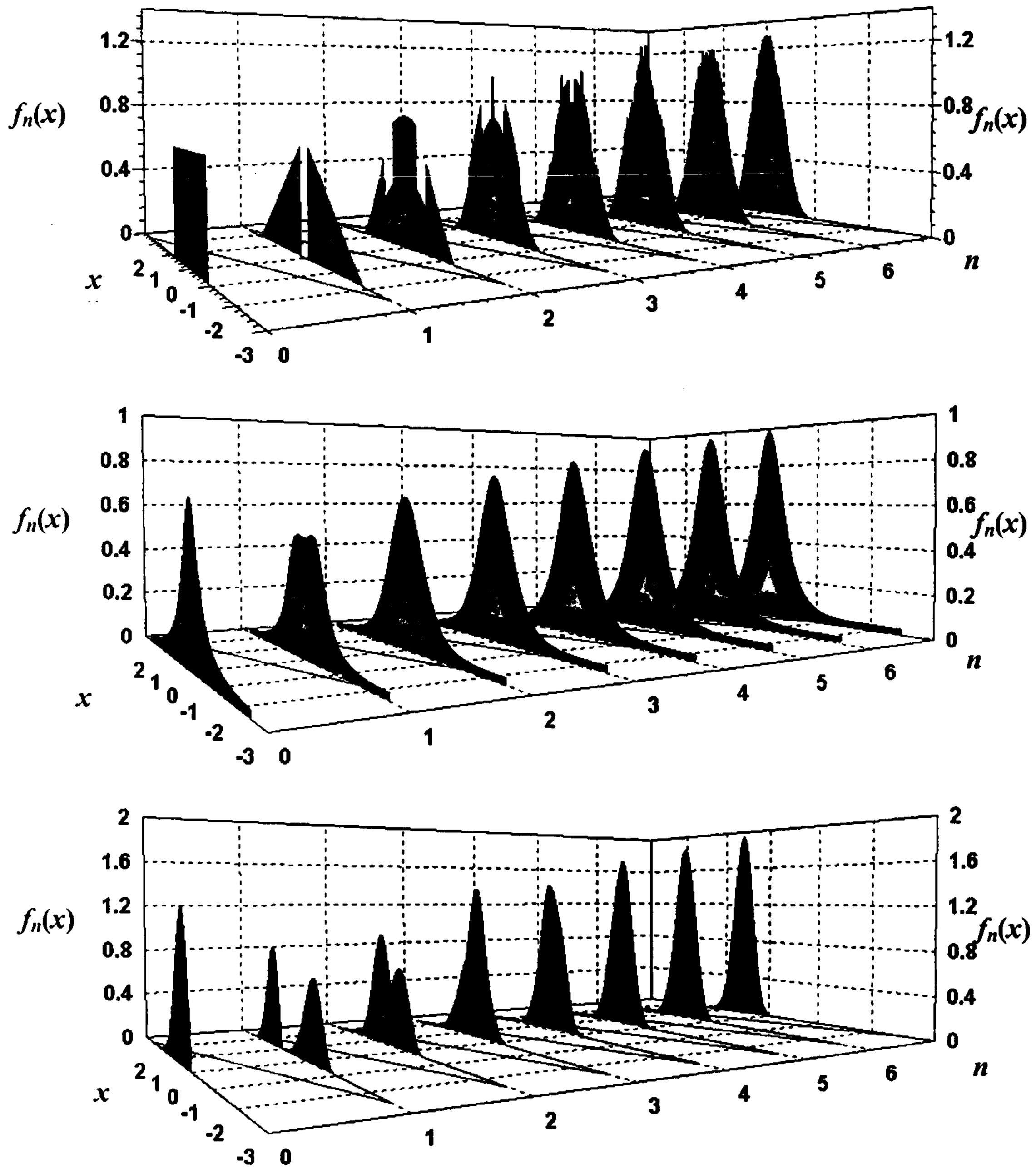

Рис. 1. Изменение плотности распределения вероятности невязки $f_n(x)$ в зависимости от номера шага n при распределении помехи по равномерному закону (а), по закону Коши (б), по закону Рэлея (в).

стью распределения $\varphi(x)$, то измеряемая величина x_n является аналогом θ, а $\varphi(x)$ — аналогом $p(\theta)$. На n-ом шаге алгоритм (1) производит оценивание θ в форме c_n. Аналогом случайной величины c_n является y_n, а её плотности распределения $f_n(x)$ — $p(y^n|\theta)$. Тогда $f_{n+1}(x)$ соответствует $p(\theta|y^n)$.

Из формулы (6) следует, независимо от вида функции $F(x)$, что $\lim\limits_{n\to\infty}(f_{n+1}(x)) = \lim\limits_{n\to\infty}(f_n(x))$ и, как следствие, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f_n(x), f_{n+1}(x)) = 0$.

Поэтому можно утверждать, что полученная в результате работы алгоритма (1) оценка сходится вне зависимости от закона распределения помехи.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Проверим сходимость оценки алгоритма (1) на примерах использования различных функций распределения помехи и разных способов определения расстояния между функциями плотности распределения невязок.

На рис. 1 показана динамика изменения плотности распределения вероятности невязки для трех сильно различающихся между собой видов плотности распределения помехи $\varphi(x)$:

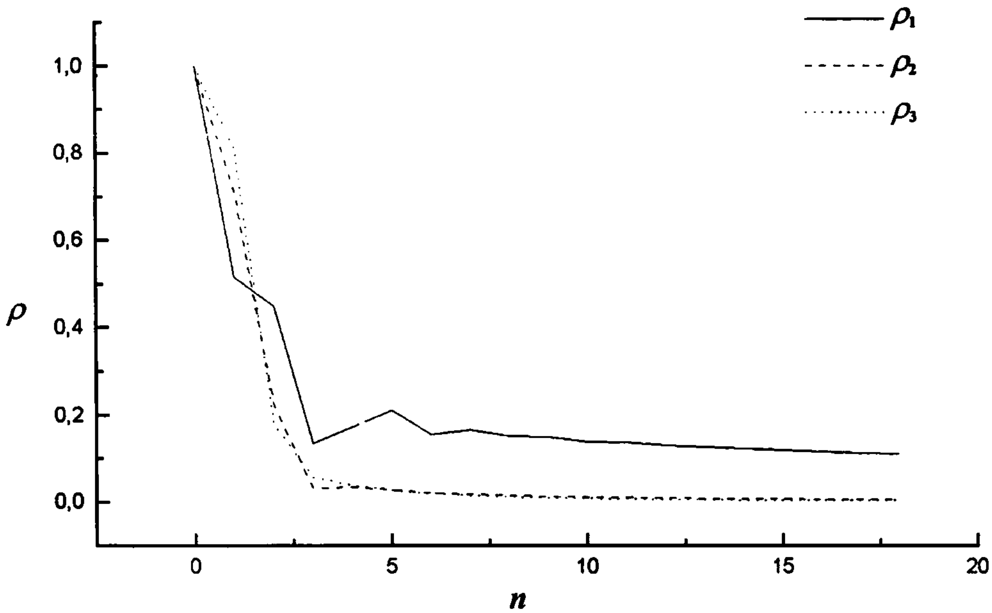

Рис. 2. Изменение расстояния между плотностями распределения вероятности невязки на соседних шагах.

1. ограниченного симметричного центрированного распределения (равномерный закон распределения в диапазоне [–1, 1]) — рис. 1а.

2. неограниченного симметричного распределения с неограниченной дисперсией (закон распределения Коши с параметром 0,5) — рис. 1б.

3. несимметричного нецентрированного распределения с ограниченной дисперсией (закон распределения Рэлея с параметром 1,0) — рис. 1в.

Из рис. 1 видно, что при увеличении номера шага n соседние плотности распределения вероятности всё менее отличаются друг от друга вне зависимости от закона распределения помехи, т.е. независимо от принятых исходных функций распределения ошибки оценка, получаемая в результате работы алгоритма (1), сходится.

Рассмотрим изменение величины расстояния между функциями распределения при разных шагах работы алгоритма (1) в зависимости от метода вычисления этого параметра. На рис. 2 показано поведение величины ρ в зависимости от шага n работы алгоритма. Нами были использованы следующие способы определения ρ:

1. М-оценка Хьюбера [9]

$$\rho_1 = \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} \left|f_1(x) - f_2(x)\right|. \qquad (7)$$

2. Квадратичная оценка

$$\rho_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f_1(x) - f_2(x)\right)^2 dx. \qquad (8)$$

3. Информационное расхождение [10]

$$\rho_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f_1(x) - f_2(x)\right)\cdot \ln\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) dx. \qquad (9)$$

После первых нескольких шагов работы алгоритма значения расстояний ρ_1, ρ_2 и ρ_3 резко уменьшаются, что свидетельствует о сходимости оценки. При дальнейшем росте n уменьшения расстояний незначительно. Оценка (7), как это видно из ее определения, оказалась наиболее грубой, а оценки (8) и (9) практически совпадают.

Следует заметить, что применение ρ_3 возможно только в том случае, если $f_n(x)>0$ для всех $x\in(-\infty,+\infty)$.

Работа выполнена при поддержке гранта М98-3.5К-103 Администрации Санкт-Петербурга, Российской Академии Наук и Министерства общего и профессионального образования РФ 1998 года для аспирантов и молодых учёных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кенделл М., Стьюарт А.* Статистические выводы и связи. 1973. М.: Наука. 899 с.
2. *Невельсон М.В., Хасьминский Р.З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. 1972. М.: Наука. 304 с.
3. *Robbins H., Monro S.* // Anal. Math. Stat. 1951. V.22, №3. P.400–407.
4. *Вазан М.* Стохастическая аппроксимация. 1972. М.: Мир. 296 с.
5. *Курочкин В.Е., Фельдман Б.Х.*// Научное приборостроение. 1988. С.68–73.
6. *Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т.* Динамика систем. Ма-

тематические методы теории колебаний. Вып. 12. 1977. Горький: Изд. Горьковского Университета. С.2246.
7. *Бедельбаева А.А.*// Автоматика и телемеханика. 1978, № 1. С.87–95.
8. *Аоки М.* Оптимизация стохастических систем. 1971. М.: Наука.
9. *Хьюбер П.* Робастность в статистике. 1984. М.: Мир. 304 с.
10. *Jeffreys H.* Theory of Probability. 2nd ed. 1948. Oxford. P.158.

CONVERGENCE STUDIES OF RECURRENT ALGORITHM ESTIMATION FOR CONSTANT LEVEL SIGNALS

A.L.Bulianitsa, D.A.Burylov

Institute for Analytical Instrumentation RAS, Saintt-Petersburg

The convergence of estimation for constant level signals in the presence of additive noise in the form of random values with an arbitrary distribution law, based on the stochastic approximation algorithm, is investigated. The convergence is proved M. Aoki's stochastic approach. It has been found that the estimation converges for any noise distribution law and estimator parameters.