

ОРИГИНАЛЬНЫЕ  
СТАТЬИ

УДК 519.642

**РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДЛЯ АНАЛИЗА ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ, ИМЕЮЩИХ ПЛОСКУЮ ГЕОМЕТРИЮ ЭЛЕКТРОДОВ, МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

(без учета сингулярности поверхностного заряда на концах отрезка интегрирования)

© 1996г. С.И. Шевченко

*Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург*

Поступила в редакцию 16.07.96

Приводится алгоритм расчета электростатических систем для анализа пучков заряженных частиц, имеющих плоскую геометрию электродов, методом граничных интегральных уравнений вдали и вблизи поверхности электродов. Возможные сингулярности плотности поверхностного заряда на концах отрезков интегрирования не учитываются. Сложность с сингулярностью ядра обходится методом понижения особенности интегрируемой функции.

**Введение**

Проблема вычисления потенциала и напряженности электростатического поля весьма актуальна в электронике, электротехнике, а также в различных областях приборостроения и аналитического приборостроения. Задача вычисления потенциала и напряженности электростатического поля формулируется как краевая задача для уравнения Лапласа [1]

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(\vec{r}_i) &= 0, \\ \varphi(\vec{r}_i) \Big|_S &= f_S, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\varphi(\vec{r}_i)$  – потенциал в точке пространства  $r_i$ , ниже называемой точкой наблюдения,  $S$  – граничная поверхность,  $f_S$  – заданная функция. Когда решение задачи (1) не зависит от одной из координат, то задача сводится к двумерной (плоской или аксиально-симметричной). В качестве примеров плоской задачи можно привести задачи о плоском конденсаторе и плоском срезе цилиндрического конденсатора, задачу для систе-

мы электродов, состоящую из двух гипербол, являющихся координатными линиями и т.д.

Дифференциальная постановка краевых задач (1) полностью эквивалентна соответствующему интегральному уравнению [2]:

$$\varphi(\vec{r}_i) = \int_S \sigma(\vec{r}) G(\vec{r}, \vec{r}_i) ds, \tag{2}$$

где интегрирование проводится по всей граничной поверхности  $S$ ,  $G(\vec{r}, \vec{r}_i)$  – ядро интегрального уравнения, плотность заряда  $\sigma(\vec{r})$ , распределенного по поверхности границы (поверхностного заряда). Если записать уравнение (2) в точках, принадлежащих границе  $S$ , в которых значение потенциала известно, то плотность поверхностного заряда  $\sigma(\vec{r})$  можно рассматривать как неизвестную функцию, подлежащую нахождению. В плоском случае интеграл в (2) по площади границы переходит в интеграл вдоль контура границы. Поверхность  $S$  в случае решения электростатических задач разделена на части (электроды), которые, в свою очередь, состоят из отрезков, в пределах которых контур границы представим прямой ли-

нией или гладкой кривой. Поэтому граничное интегральное уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}_i) &= \sum_{p=1}^{N_p} \varphi_p(\vec{r}_i) = \\ &= \sum_{p=1}^{N_p} \int_0^{d_p} \sigma(\ell) G(\vec{r}, \vec{r}_i) d\ell, \end{aligned} \quad (3)$$

где суммирование проводится по всем отрезкам электродов, а интегрирование – по длине контура отрезка электрода,  $\varphi_p(\vec{r}_i)$  – вклад в полный потенциал от одного отрезка,  $N_p$  – число отрезков границы,  $d_p$  – длина каждого отрезка (ниже будем обозначать ее просто  $d$ ). Среди реализованных в настоящее время методов решения уравнения (3) наиболее интересными являются два:

- 1) Искомая на первом этапе функция плотности поверхностного заряда  $\sigma$  представляется в виде некоторой интерполяционной функции (в [3] используется кусочно-линейная функция, в [4]-сплайн третьего порядка - пакет "Poisson-2") с неизвестными коэффициентами, а интегралы находятся численно методом Гаусса [5].
- 2) Интеграл в правой части уравнения (3) представляется в виде суммы наилучшей сходимости Гаусса [5]. Этот метод в приложении к вычислению электрического поля впервые реализован Фрейкманом (см. [6]).

Нетрудно заметить, что в обоих методах потенциал выражается через интегралы, которые находятся посредством численного интегрирования методом Гаусса. Однако во втором методе интегрируется точная функция, а в первом – проводится интегрирование произведения интерполяционного приближения функции плотности поверхностного заряда на ядро. Решение граничного интегрального уравнения (3) может иметь особенность на изломах и концах отрезков границы, и плотность поверхностного заряда на каждом отрезке электрода может быть представлена в виде [3]:

$$\sigma(\ell) = \frac{\hat{\sigma}(\ell)}{x^{\kappa_1}(1-x)^{\kappa_2}}, \quad (4)$$

где  $\hat{\sigma}(\ell)$  – некоторая гладкая функция от  $\ell$ , называемая иногда модифицированной функцией плотности поверхностного заряда,  $x = \ell/d$ ,  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  – показатели сингулярности поверхностного заряда в точках концов и изломов электродов. В представленной статье приведены формулы, являющиеся основой алгоритма решения граничного интегрального уравнения для случая отсутствия сингулярностей плотности поверхностного заряда на обоих концах (краях) отрезка границы, т.е. когда оба конца рассматриваемого отрезка границы гладко сопряжены с соседними отрезками и, следовательно, ни на одном конце отрезка плотность поверхностного заряда не имеет сингулярности ( $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ ).

## 2. Формирование матрицы коэффициентов

Для вклада в потенциал от одного отрезка электрода (один член в сумме (3)) имеем:

$$\varphi_p(\vec{r}_i) = \int_0^d \sigma(\ell) G(\vec{r}, \vec{r}_i) d\ell \quad (5)$$

Если рассматриваемый отрезок границы не содержит точку наблюдения  $r_i$ , то в формуле (5) просто переходим к квадратурной сумме по правилу Гаусса [5]:

$$\varphi_p(\vec{r}_i) = d \sum_{k=1}^n \sigma(\ell_k) G(\vec{r}_k, \vec{r}_i) A_k, \quad (6)$$

где  $\ell_k$  – узлы и  $A_k$  – коэффициенты квадратуры Гаусса. Пусть на каждом отрезке интегрирования определен порядок численного интегрирования (число членов квадратуры)  $n_i$ , тогда полное число членов в правой части уравнения (3) будет равно  $N = \sum n_i$ , где суммирование ведется по всем отрезкам.

Обычным для метода коллокации способом уравнение (3) записывается в  $N$  точках – узлах квадратур. В результате получаем  $N$  линейных алгебраических уравнений относительно  $N$  переменных  $\sigma(\ell_j)$  – значение плотности поверхностного заряда в  $j$ -ой точке коллокации. Совокупность получающихся коэффициентов называют матрицей коэффициентов. Ядро интегрального уравнения (3) в случае плоской задачи Дирихле определяется (с точностью до коэффициен-

та) выражением (см. напр. [1]):

$$G(\vec{r}, \vec{r}_i) = -\ln \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (7)$$

Интегрирование в (5) проводится вдоль контура границы (по  $d\ell$ ), поэтому ядро следует представить в виде функции, зависящей от расстояния вдоль рассматриваемого участка границы. Если рассматриваемый отрезок границы содержит точку наблюдения  $r_i$ , то точка сингулярности ядра  $G(\vec{r}, \vec{r}_i)$  будет совпадать с одним из узлов квадратуры Гаусса. В этом случае, чтобы свести интеграл в (5) к численной квадратуре Гаусса, следует учитывать сингулярность ядра интегрального уравнения  $G(\vec{r}, \vec{r}_i)$ . Воспользуемся методом ослабления особенности интегрируемой функции (см. например [5]). Если точка наблюдения принадлежит прямолинейному отрезку интегрирования, то ядро (7) можно записать в виде

$$G^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}_i) = -\ln |\ell - \ell_i|, \quad (8)$$

где  $\ell_i$  — расстояние от начала участка интегрирования до точки наблюдения,  $\ell$  — расстояние от начала участка интегрирования до точки интегрирования, индекс (0) у ядра указывает на то, что интегрирование с этим ядром проводится вдоль прямолинейного отрезка границы. Интеграл, стоящий в правой части выражения (5), преобразуется обычным (см. [5]) методом ослабления особенности, когда вместо  $\sigma(\ell)$  подставляется эквивалентное ему выражение  $[\sigma(\ell) - \sigma(\ell_i)] + \sigma(\ell_i)$ , где  $\sigma(\ell_i)$  — значение плотности поверхностного заряда в точке коллокации  $\ell_i$ , принадлежащей рассматриваемому отрезку границы:

$$\begin{aligned} \varphi_p(\vec{r}_i) &= \\ &= \int_0^d [\sigma(\ell) - \sigma(\ell_i)] \ln |\ell - \ell_i| d\ell + \\ &+ \sigma(\ell_i) \int_0^d \ln |\ell - \ell_i| d\ell \end{aligned}$$

В такой записи интегрируемое выражение в первом интеграле уже не имеет особенности

в точке  $\ell = \ell_i$  ( $\vec{r} = \vec{r}_i$ ). Поэтому первый интеграл вычисляется по правилу численного интегрирования наивысшей точности (квадратура Гаусса [5]), а второй — берется аналитически. В результате получаем:

$$\begin{aligned} \varphi_p(\vec{r}_i) &= \\ &= d \sum_{k \neq i}^n \sigma(x_k) A_k \ln |x_k - x_i| - \\ &- d \sigma(x_i) \sum_{k \neq i}^n A_k \ln |x_k - x_i| + \\ &+ \sigma(x_i) [\ell_i \ln \ell_i + \\ &+ (d - \ell_i) \ln (d - \ell_i) - d] \end{aligned} \quad (9)$$

Из последнего равенства выписываем выражения

$$\begin{aligned} c_{i,k} &= d A_i G(\vec{r}_i, \vec{r}_k), \\ c_{i,i} &= \ell_i \ln \ell_i + (d - \ell_i) \ln (d - \ell_i) - \\ &- d - d \sum_{k \neq i}^n A_k \ln |\ell_k - \ell_i|, \end{aligned} \quad (10)$$

которые представляют из себя все коэффициенты матрицы. Если точка наблюдения принадлежит криволинейному отрезку границы, то его вклад в потенциал определяется выражением (5). Преобразуем ядро (7), выделив множитель, соответствующий прямолинейному отрезку границы:

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, \vec{r}_i) &= -\frac{\ln |\vec{r} - \vec{r}_i|}{\ln |\ell - \ell_i|} \ln |\ell - \ell_i| = \\ &= g G^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}_i). \end{aligned} \quad (11)$$

Ясно, что для гладкого отрезка границы функция  $g$  в выражении (11) является гладкой и имеющей предел  $g \rightarrow 1$  при  $\ell \rightarrow \ell_i$  (если двигаться вдоль рассматриваемого отрезка). Для интеграла в (5) после несложных преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \varphi_p(\vec{r}_i) &= d \sum_{k \neq i}^n \sigma(x_k) G(\vec{r}_i, \vec{r}_k) A_k - \\ &- \sigma(x_i) g(x_i) d \sum_{k \neq i}^n \ln |\ell_k - \ell_i| A_k + \end{aligned}$$

$$+\sigma(x_i)g(x_i) \int_0^d \ln |\ell - \ell_i| d\ell. \quad (12)$$

Если использовать тот факт, что  $g(x_i) = 1$ , то последнее выражение не отличается от выражения (9), поэтому значения коэффициентов матрицы не отличаются от выражений (10).

Решение полученного матричного уравнения осуществлялось методом исключения Гаусса с выбором ведущего элемента. Примеры полученных распределений плотности поверхностного заряда приведены ниже.

### 3. Вычисление параметров электрического поля вдали от границы (потенциал и компоненты напряженности)

Полное выражение для потенциала имеет вид (3). Если точка наблюдения  $r_i$  находится далеко от отрезка электрода, по которому идет интегрирование, т.е. подинтегральная функция ведет себя достаточно гладко, то от интеграла в (5) можно перейти к квадратурной сумме Гаусса с соответствующим весом:

$$\varphi_p(\vec{r}_i) = d \sum_{k=1}^n \sigma(\ell_k) G(\vec{r}_i, \vec{r}_k) A_k. \quad (13)$$

И далее вклады от отдельных отрезков суммируются и получается потенциал в точке  $r_i$ . Для вычисления компонент напряженности электрического поля в выражение (2) подставляется соответствующая функция Грина:

$$G_x(\vec{r}, \vec{r}_i) = \frac{x - x_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2},$$

$$G_y(\vec{r}, \vec{r}_i) = \frac{y - y_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}.$$

Рассмотрим особенности вычисления компонент напряженности электрического поля на примере компоненты  $E^x$ . Вклад в  $E^x$  от одного отрезка границы

$$E_p^x(\vec{r}_i) = \int_0^d \sigma(\ell) G_x(\vec{r}, \vec{r}_i) d\ell. \quad (14)$$

Если точка наблюдения  $r_i$  находится вдали от рассматриваемого отрезка, то можно в последнем выражении сразу перейти к квадратурной сумме Гаусса:

$$E_p^x(\vec{r}_i) = d \sum_{k=1}^n \sigma(\ell_k) G_x(\vec{r}_i, \vec{r}_k) A_k. \quad (15)$$

### 4. Вычисление потенциала электрического поля вблизи границы

Если точка наблюдения  $r_i$  находится вблизи рассматриваемого отрезка электрода, то ядро  $G(\vec{r}_i, \vec{r})$  хотя и не имеет сингулярности, однако ведет себя недостаточно гладко. И прямой переход от интеграла к квадратурной сумме не может обеспечить удовлетворительной точности. В этом случае имеет смысл применение метода ослабления особенности интегрируемой функции [5]. В представленной работе использовался метод ослабления особенности с интерполяцией по трем точкам. Рассмотрим отдельно случай прямолинейного и криволинейного отрезка границы.

#### 4.1 Отрезок границы - прямая линия

Ядро имеет вид (7) и вклад в потенциал от рассматриваемого отрезка электрода имеет вид:

$$\varphi_p(\vec{r}_i) = - \int_0^d \sigma(\ell) \ln |\vec{r} - \vec{r}_i| d\ell \quad (16)$$

Проводим преобразование  $\sigma(\ell) = [\sigma(\ell) - \sigma_{int}(\ell)] + \sigma_{int}(\ell)$ , где  $\sigma_{int}(\ell)$  - полиномиальная интерполяция функции  $\sigma(\ell)$  по трем точкам:

$$\sigma_{int}(\ell) = h_3(\ell - \ell_i)^2 + h_2(\ell - \ell_i) + h_1, \quad (17)$$

в которой выбираются три точки коллокации с номерами  $i_1, i_2, i_3$ , ближайшими к  $\ell_i$ , в которых модифицированная плотность зарядов  $\sigma_1 = \sigma(x_{i_1}), \sigma_2 = \sigma(x_{i_2}), \sigma_3 = \sigma(x_{i_3})$ :

$$\begin{aligned}
 h_3 &= \sigma_1 \frac{1}{\ell_{21}\ell_{31}} - \sigma_2 \frac{1}{\ell_{21}\ell_{32}} + \sigma_3 \frac{1}{\ell_{31}\ell_{32}}, \\
 h_2 &= \sigma_1 \frac{\ell_{02} + \ell_{03}}{\ell_{21}\ell_{31}} - \sigma_2 \frac{\ell_{01} + \ell_{03}}{\ell_{21}\ell_{32}} + \\
 &\quad + \sigma_3 \frac{\ell_{01} + \ell_{02}}{\ell_{31}\ell_{32}}, \\
 h_1 &= \sigma_1 \frac{\ell_{02}\ell_{03}}{\ell_{21}\ell_{31}} - \sigma_2 \frac{\ell_{01}\ell_{03}}{\ell_{21}\ell_{32}} + \sigma_3 \frac{\ell_{01}\ell_{02}}{\ell_{31}\ell_{32}},
 \end{aligned}$$

$\ell_{kj}$ - расстояние вдоль отрезка границы между точками коллокации  $k$  и  $j$ ,  $\ell_{0i}$ - расстояние от точки  $\ell_i$  до  $k$ -ой точки коллокации.

Выражение для ядра (7) представим в виде (см. рис.1):

$$G^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}_i) = -\ln \sqrt{(\ell - \ell_i)^2 + \delta^2}, \quad (18)$$

где  $\delta$  - расстояние от точки нахождения потенциала  $r_i$  до рассматриваемого прямолинейного отрезка электрода (длина перпендикуляра, опущенного из точки  $r_i$  на отрезок электрода),  $\ell_i$  - расстояние от начала отрезка до проекции точки  $r_i$  на отрезок. Заметим, что интеграл для  $\varphi_p(\vec{r}_i)$  не позволяет прямой переход к квадратуре типа Гаусса т.к. ядро  $\ln[(x - x_0)^2 + (\delta/d)^2]$  не является при  $\delta/d \ll 1$  достаточно гладким. Применяем метод ослабления особенности с интерполяцией по трем точкам

$$\begin{aligned}
 \varphi_p(\vec{r}_i) &= \\
 & dS_0 - 0,5d(h_3S_3 + h_2S_2 + h_1S_1) + \\
 & + 0,5d(h_3I_3 + h_2I_2 + h_1I_1), \quad (19)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 S_0 &= d \sum_{k \neq i_1, i_2, i_3}^n \sigma(x_k) G(\vec{r}_i, \vec{r}_k) A_k, \\
 S_m &= \sum_{k \neq i_1, i_2, i_3}^n (\ell_k - \ell_i)^{m-1} \times \\
 & \quad \times \ln [(\ell_k - \ell_i)^2 + \delta^2] A_k, \\
 I_m &= \int_0^d (\ell - \ell_i)^{m-1} \times \\
 & \quad \times \ln [(\ell - \ell_i)^2 + \delta^2] dl, m = 3, 2, 1.
 \end{aligned}$$

#### 4.2 Отрезок границы - гладкая кривая

Преобразуем ядро, выделив "прямолинейную часть" и функцию- поправку:

$$G(\vec{r}, \vec{r}_i) = gG^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}_i), \quad (20)$$

где  $G^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}_i)$  - ядро в виде (18),  $g = \frac{\ln|\vec{r}-\vec{r}_i|}{\ln\sqrt{(\ell-\ell_i)^2+\delta^2}}$  - гладкая функция, имеющая предел  $g \rightarrow 1$  при  $\ell \rightarrow \ell_i$  вдоль отрезка.

Подстановка ядра (20) в последний интеграл в (16) дает:

$$0.5 \int_0^d \sigma(\ell) g \ln [(\ell - \ell_i)^2 + \delta^2] d\ell \quad (21)$$

Проводим интерполяцию функции  $f = \{\sigma g\}$ . Дальнейшие операции не отличаются от таких же операций для прямолинейного отрезка границы.

#### 5. Вычисление компонент напряженности электрического поля вблизи границы

Если точка наблюдения  $r_i$  находится вблизи от рассматриваемого отрезка, то применяется метод ослабления особенности интегрируемой функции с интерполяцией функции  $\sigma(\ell)$  по трем точкам (17)

$$\begin{aligned}
 E_p^x(\vec{r}_i) &= \int_0^d [\sigma(\ell) - \sigma_{int}(\ell)] G_x(\vec{r}, \vec{r}_i) dl + \\
 & \quad + \int_0^d \sigma_{int}(\ell) G_x(\vec{r}, \vec{r}_i) dl = \\
 & = I_1 + I_2. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Первый интеграл в (22) находим численно переходя к квадратурной сумме Гаусса. Учитывая, что  $\sigma_{int}(\ell)$  - интерполяция по трем

точкам, в этих точках выполняется равенство  $[\sigma(\ell) - \sigma_{int}(\ell)] = 0$  и в квадратурной сумме выпадают три члена:

$$I_1 = dS_0 - d(h_3S_3 + h_2S_2 + h_1S_1), \quad (23)$$

где

$$S_0 = \sum_{k \neq i_1, i_2, i_3}^n \sigma(\ell_k) G_x(\vec{r}_k, \vec{r}_i) A_k,$$

$$S_m = \sum_{k \neq i_1, i_2, i_3}^n (\ell_k - \ell_i)^{m-1} \times$$

$$\times \frac{(\ell - \ell_i) \sin(\theta) + \delta \cos(\theta)}{(\ell - \ell_i)^2 + \delta^2} A_k,$$

$$m = 3, 2, 1.$$

Для более подробного анализа особенностей вычисления второго интеграла в (22) рассмотрим отдельно случай прямолинейного и криволинейного отрезка электрода.

### 5.1 Отрезок границы – прямая линия

Для прямолинейного отрезка границы ядро (7) можно представить в виде  $\ell$  (см. рис.1.):

$$G_x^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}_i) =$$

$$= - \frac{(\ell - \ell_i) \sin(\theta) + \delta \cos(\theta)}{(\ell - \ell_i)^2 + \delta^2}, \quad (24)$$

где  $\theta$ -угол между "правой нормалью" к контуру и осью  $x$ . С таким ядром второй интеграл в правой части (22), берется аналитически. Этот интеграл является упрощением интеграла, который появляется в более общем случае криволинейного отрезка границы (см. следующий пункт).

### 5.2 Отрезок границы – гладкая кривая

Проведем преобразование ядра с выделением части, соответствующей прямолинейному отрезку границы:

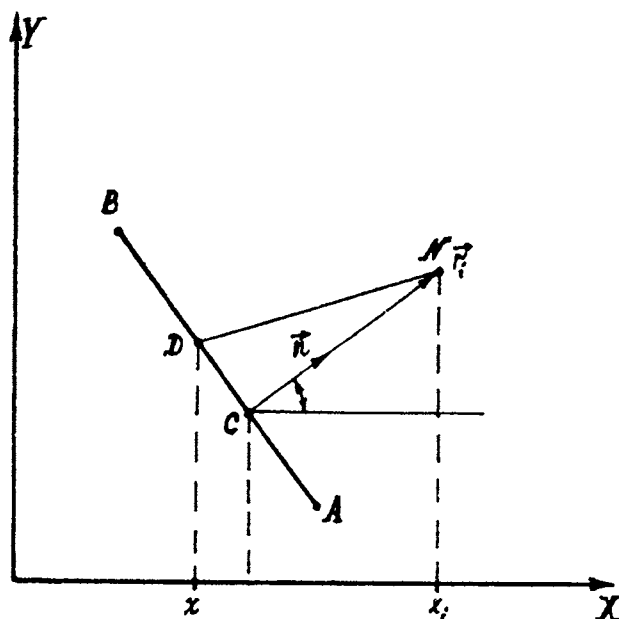


Рис.1. Проекция точки наблюдения  $N$  на прямолинейный отрезок границы  $AB$ .  $AB = d$  – длина отрезка границы,  $CA = \ell_i$ ,  $DA = \ell$ ,  $DC = \ell - \ell_i$ ,  $NC = \delta$  – длина перпендикуляра из точки наблюдения на отрезок  $AB$ .

$$G_x(\vec{r}, \vec{r}_i) = \left[ \frac{x - x_i}{(\ell - \ell_i) \sin(\theta) + \delta \cos(\theta)} \times \right.$$

$$\times \left. \frac{(\ell - \ell_i)^2 + \delta^2}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \right] \times$$

$$\times \frac{(\ell - \ell_i) \sin(\theta) + \delta \cos(\theta)}{(\ell - \ell_i)^2 + \delta^2} =$$

$$= g_1 g_2 G_x^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}_i). \quad (25)$$

Относительно стоящей здесь функция  $g_2$  можно утверждать, что она является гладкой и в пределе  $x \rightarrow x_i$  ( $\ell \rightarrow \ell_i$  вдоль криволинейного отрезка границы)  $g_2$  стремится к единице. Несколькo другое дело с функцией  $g_1$ . Она обладает таким же как и  $g_2$  свойством только в пределе  $\delta = 0$ . В противном случае ( $\delta \neq 0$ ) нули числителя и знаменателя функции  $g_1$  не совпадают, что приводит к тому, что функция  $g_1$  вблизи точки  $\ell = \ell_i$  имеет нуль и полюс первого порядка. Чтобы избежать этого, поменяем вид функции  $g_1$ :

$$g_1 = (x - x_i) / (hg(3)(\ell - \ell_i)^2 + hg(2)(\ell - \ell_i) + hg(1)), \quad (26)$$

где в знаменателе стоит полином, интерполирующий функцию  $(x - x_i)$ . Заметим, что точками интерполяции используются те же точки коллокации, которые использовались для уменьшения особенности интегрируемой функции в (22). Ниже под функцией  $G_x^{(0)}$  будем понимать выражение

$$G_x^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}_i) = \frac{1}{(\ell - \ell_i)^2 + \delta^2} \times \\ \times (hg(3)(\ell - \ell_i)^2 + hg(2)(\ell - \ell_i) + hg(1)). \quad (27)$$

Ясно, что для прямолинейного отрезка границы  $hg(3) = 0$ ,  $hg(2) = \sin \theta$ ,  $hg(1) = \delta \cos \theta$ . При подстановке полученных функций  $g_1 g_2 G_x^{(0)}$  в выражение (22), получаем

$$E_p^x(\vec{r}_i) = \int_0^d [g_1 g_2 \sigma - \{g_1 g_2 \sigma\}_{int}] G_x^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}_i) d\ell + \\ + \int_0^d \{g_1 g_2 \sigma\}_{int} G_x^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}_i) d\ell, \quad (28)$$

где интерполяция по трем точкам проводится для функции  $\{g_1 g_2 \sigma\}_{int} = hs(3)(\ell - \ell_i)^2 + hs(2)(\ell - \ell_i) + hs(1)$ , а коэффициенты этой интерполяции находятся подобно формулам (17). Заметим, что  $g_1 = 1$  как раз в тех точках, по которым производится интерполяция, поэтому  $g_1$  выпадает из всех формул, использующих эту интерполяцию. Первый интеграл в (28) как обычно находим численно, переходя к квадратурной сумме Гаусса, а второй находим аналитически, производя ряд упрощающих преобразований:

$$E_p^x(\vec{r}_i) = dS_0 - d(h_3 S_3 + h_2 S_2 + h_1 S_1) + I_2, \quad (29)$$

где

$$S_0 = \sum_{k \neq i_1, i_2, i_3}^n \sigma(x_k) G^{(0)}(\vec{r}_i, \vec{r}_k) A_k,$$

$$S_m = \sum_{k \neq i_1, i_2, i_3}^n (\ell_k - \ell_i)^{m-1} G^{(0)}(\vec{r}_i, \vec{r}_k) A_k,$$

$$I_2 = \int_0^d (hs(3)(\ell - \ell_i)^2 + hs(2)(\ell - \ell_i) + hs(1)) \times \\ \times \frac{hg(3)(\ell - \ell_i)^2 + hg(2)(\ell - \ell_i) + hg(1)}{(\ell - \ell_i)^2 + \delta^2} d\ell$$

Взятие этого интеграла не представляет труда. Для вычисления компоненты  $E_p^y$  осуществляется аналогичный подход и получаются формулы, вполне совпадающие с формулами (29) с тем только отличием, что вместо ядра  $G_x^{(0)}(\vec{r}_i, \vec{r}_k)$  используется ядро  $G_y^{(0)}(\vec{r}_i, \vec{r}_k)$ .

## 6. Результаты и обсуждение

Приведенные выше формулы, описывающие алгоритм решения граничного интегрального уравнения, были реализованы в виде прикладных программ, вошедших в пакет прикладных программ "SHIFT" [7] (первое упоминание о применении которого можно найти в [8]).

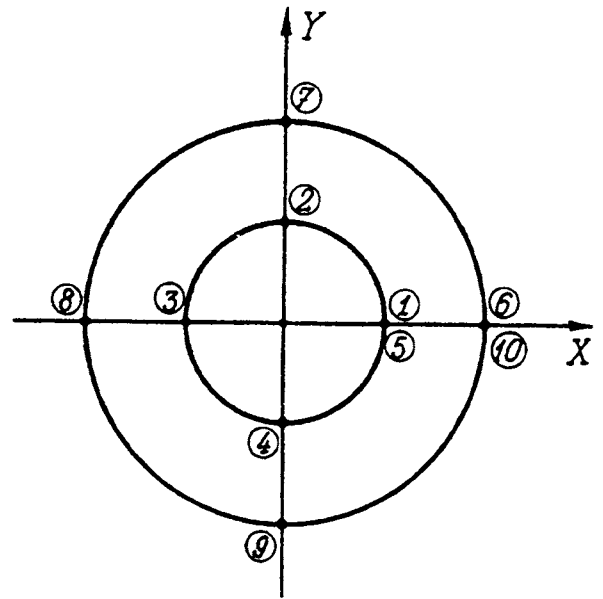
В качестве тестового примера рассмотрим сечение цилиндрического конденсатора, перпендикулярное оси, - вид границы показан на рис.2. На внутреннем и внешнем электроде ставятся граничные условия Дирихле  $U_1 = 1$ В и  $U_2 = 2$ В, соответственно. Распределение поверхностного заряда приведено в таблице 1. Отметим, что в различных задачах размеры электродов могут различаться на несколько порядков (см. [8]), поэтому, чтобы на графике  $\sigma(\ell)$  можно было различить плотность поверхностного заряда на электродах столь различных размеров, вдоль оси  $X$  откладывается величина  $L = (i - 1 + l_i/d_i)$ , где  $i$  - номер отрезка границы,  $l_i$  - расстояние от начала отрезка до рассматриваемой точки,  $d_i$  - длина  $i$ -го отрезка границы. Результаты расчета компонент электрического поля вдоль радиуса от  $r_{min} = 1 * 10^{-2}$  м до  $r_{max} = 2 * 10^{-2}$  м приведены в таблице 2.

**Таблица 1.** Значения поверхностного заряда в точках коллокации в задаче о цилиндрическом конденсаторе (произвольные единицы),  $N$ —номер отрезка границы.

$\sigma(N)$							
$N$							
1	2	3	4	5	6	7	8
-92.03	-92.03	-92.03	-92.03	58.05	58.05	58.05	58.05
-91.75	-91.75	-91.75	-91.75	57.88	57.88	57.88	57.88
-91.81	-91.81	-91.81	-91.81	57.92	57.92	57.92	57.92
-91.82	-91.82	-91.82	-91.82	57.92	57.92	57.92	57.92
-91.82	-91.82	-91.82	-91.82	57.92	57.92	57.92	57.92
-91.82	-91.82	-91.82	-91.82	57.92	57.92	57.92	57.92
-91.82	-91.82	-91.82	-91.82	57.92	57.92	57.92	57.92
-91.81	-91.81	-91.82	-91.81	57.92	57.92	57.92	57.92
-91.75	-91.75	-91.75	-91.75	57.88	57.88	57.88	57.88
-92.03	-92.03	-92.03	-92.03	58.05	59.05	58.05	58.05

Видно, что представленный алгоритм обеспечивает точность расчета потенциала и компонент напряженности электрического поля не хуже 0.01%, за исключением случая близости точки нахождения к одному из электродов.

Точность расчета параметров электрического поля ( $\varphi, E^x, E^y$ ) по формулам (13,15), в точках, близких к поверхности электрода, становится заметно хуже, чем фоновые отклонения расчетных значений от аналитических. В этом случае программа переходит к расчету по алгоритму, изложенному в пп.4,5. Результаты приведены в таблице 3. Видно, что в качестве порогового значения  $\delta$  можно выбрать  $\delta_0 = 0,2 * d$ . При  $\delta > \delta_0$  для расчета параметров электрического поля можно пользоваться формулами (13,15), а при  $\delta < \delta_0$  следует пользоваться формулами (19,29). В некоторой области вблизи отрезка границы результаты расчета (особенно  $E_x, E_y$ ) в случае отрезка границы криволинейной формы значительно ухудшаются. Объяснение причин почему это получается и как от этого избавиться занимает довольно много места, поэтому было выделено в отдельную статью. Отметим только, что применение изложенных в ней идей позволило повысить точность расчета потенциала и компонент напряженности электрического поля.



**Рис.2.** Задача о плоском срезе цилиндрического конденсатора: 1-5 – внутренний электрод, 6-10 – внешний электрод,  $U_1=1, U_2=2$  – потенциалы внутренней и внешней обкладок конденсатора, соответственно.



**Таблица 2.** Параметры электрического поля (потенциал и компоненты напряженности) в задаче о плоском срезе цилиндрического конденсатора вдоль радиуса при  $\varphi = 45^\circ$  при расчете по формулам (14) и (16).

$r$ (м)	$U$ (В)	$U_t$ (В)	$E_x$ (В/м)	$E_{xt}$ (В/м)	$E_y$ (В/м)	$E_{yt}$ (В/м)
.010	1.03747	1.00002	-51.01	-102.01	-51.01	-102.01
.011	1.14163	1.13750	-85.99	-92.73	-85.99	-92.73
.012	1.26347	1.26303	-84.34	-85.01	-84.34	-85.01
.013	1.37856	1.37851	-78.39	-78.47	-78.39	-78.47
.014	1.48542	1.48542	-72.84	-72.86	-72.84	-72.86
.015	1.58492	1.58496	-67.96	-68.00	-67.96	-68.00
.016	1.67787	1.67807	-63.53	-63.75	-63.53	-63.75
.017	1.76460	1.76553	-59.01	-60.00	-59.01	-60.00
.018	1.84395	1.84799	-52.62	-56.67	-52.62	-56.67
.019	1.91051	1.92599	-39.98	-53.69	-39.98	-53.69
.020	1.95272	1.99999	-18.83	-51.00	-18.83	-51.00

**Таблица 3.** Параметры электрического поля в задаче о плоском срезе цилиндрического конденсатора при расчете по формулам (20) и (30).

$r$ (м)	$V$ (В)	$V_t$ (В)	$E_x$ (В/м)	$E_{xt}$ (В/м)	$E_y$ (В/м)	$E_{yt}$ (В/м)
.010	1.00002	1.00002	-102.46	-102.01	-101.47	-102.01
.011	1.13797	1.13750	-92.20	-92.73	-91.68	-92.73
.012	1.26319	1.26303	-84.93	-85.01	-84.63	-85.01
.013	1.37854	1.37851	-78.51	-78.47	-78.32	-78.47
.014	1.48545	1.48542	-72.81	-72.86	-72.94	-72.86
.015	1.58502	1.58496	-67.98	-68.00	-68.14	-68.00
.016	1.67822	1.67807	-63.79	-63.75	-63.99	-63.75
.017	1.76588	1.76553	-60.17	-60.00	-60.45	-60.00
.018	1.84860	1.84799	-57.05	-56.67	-57.41	-56.67
.019	1.92652	1.92599	-54.06	-53.69	-54.54	-53.69
.020	1.99998	1.99999	-50.72	-51.00	-51.34	-51.00

### Выводы

В представленной работе описан алгоритм вычисления потенциала и напряженности электростатического поля для плоской геометрии электродов методом граничных интегральных уравнений. Возможные сингулярности плотности поверхностного заряда на концах отрезков интегрирования не учитываются. Сложность с сингулярностью ядра обходится методом понижения особен-

ности интегрируемой функции. Предложенный алгоритм реализован в виде программ, которые вошли в пакет "SHIFT" (см. [7]). Исследования полученного алгоритма показали, что при расстоянии от электрода, большем  $0.2 \cdot d$ , можно пользоваться простейшими формулами, полученными прямым переходом от интегралов к квадратурным суммам Гаусса. При меньших расстояниях хорошие результаты дает более сложный алгоритм, в котором проведено понижение особен-

бенности интегрируемой функции.

1986, ч1.-Новосибирск. 193с.

### Литература

1. Тихонов Ф.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.,1972. 735с.
2. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М., 1966.
3. Антоненко О.Ф. // Сб."Вычислительные системы", 1968, вып.12, Наука, Новосибирск. С.79-94.
4. Иванов В.Я. Методы автоматизированного проектирования приборов электроники, 1986, ч1.-Новосибирск. 193с.
5. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов, М., 1967. 287с.
6. Фрейкман Б.Г. Вычисление электрического поля вблизи заряженной поверхности. // ЖТФ, 1979. №11. С.2464-2472.
7. Шевченко С.И. Пакет программ "SHIFT" для решения уравнений Лапласа и Пуассона. // Материалы Всесоюзного семинара "Методы расчета электронно-оптических систем". Алма-Ата, 1992. С.10.
8. Ptitsin V.E. and Shevchenko S.I. On the mechanism of the LMIS emission. // Surf.Sci., V.266. P.191-196.

## PLANE ELECTRODE GEOMETRY ELECTROSTATIC SYSTEM CALCULATION FOR ANALYSIS OF CHARGED PARTICLE BEAMS USING THE BOUNDARY INTEGRAL EQUATION METHOD

S.I. Shevchenko

*Institute for Analytical Instrumentation RAS*

An algorithm is given to calculate electrostatic systems with a plane particle beam analysis for apart and near the electrode surface, using the boundary integral equation method. The possible singularities of surface charge density at the integration interval ends are ignored. The problems connected with the kernel singularity are obviated by reducing the singularity of the integrated function.