

РАСЧЕТ ДИФРАКЦИИ СВЕТА НА ПРОТЯЖЕННЫХ ОТВЕРСТИЯХ, ЭКРАНИРОВАННЫХ НЕПРОЗРАЧНЫМ ПРЕПЯТСТВИЕМ, В ФИКСИРОВАННОМ НАПРАВЛЕНИИ

© 1996, Б.В. Старостенко, Е.Б. Александрова*

*Алтайский политехнический институт, Барнаул
РГПУ им.А.И.Герцена, Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 19.06.96

Предложен оптический метод измерения параметров протяженных отверстий. Анализируется дифракция Фраунгофера на объемной щели. Получены формулы для расчета дифракционной картины от круглых отверстий, экранированных непрозрачным препятствием. Исследовано влияние радиуса и глубины отверстия и ширины экрана на параметры дифракционной картины.

Известно, что дифракционная картина от плоского отверстия произвольной формы рассчитывается на основании выражения [1]

$$U(P) = C \iint_{(D)} e^{-ik(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta \quad (1)$$

где: $U(P)$ — амплитуда возмущения в заданной точке P , p, q — координаты точки P , C — константа, k — волновое число.

Для случая плоского круглого отверстия выражение (1) с помощью перехода к полярным координатам

$$\begin{cases} p = W \cos \varphi \\ q = W \sin \varphi \end{cases}$$

может быть преобразовано к виду [1]

$$U(P) = C \pi R^2 \left[\frac{2J_1(kWR)}{kWR} \right] \quad (2)$$

где R — радиус отверстия, J_1 — функция Бесселя, причем $W = \text{sing}$, где g — угол между направлением падающего света и направлением из центра координат на точку P .

Интенсивность в точке P будет соответственно равна [1]

$$I(P) = C \pi R^2 \left[\frac{2J_1(kWR)}{kWR} \right]^2 I_0 \quad (3)$$

где $I_0 = C^2 \pi^2 R^2$ — интенсивность падающего на отверстие света.

Дифракционная картина, рассчитанная на основании формулы (3), представляет собой концентрические окружности чередующихся

максимумов и минимумов света, постепенно убывающих по интенсивности от центра к периферии.

Радиус темных (\min) колец приближенно определяется соотношением

$$\sin \gamma_{\min} = \frac{0,61 + (m-1)/2}{R} \lambda$$

где λ — длина волны света.

Радиус светлых колец (\max) определяется соотношением

$$\sin \gamma_{\max} = \frac{\alpha}{R} \lambda,$$

где α — табличное значение коэффициента в зависимости от номера максимума [1].

Как следует из выражений (2) и (3), с увеличением радиуса отверстия расстояние между соседними максимумами и минимумами уменьшается. Очевидно, что увеличивая расстояние между отверстием и экраном (фотоприемником), на котором локализуется дифракционная картина, расстояния между максимумами и минимумами можно увеличить.

В приборном варианте приемлемые расстояния без применения оптических элементов получаются для отверстий, радиус которых не превышает 50-100 мкм. Для отверстий, радиус которых превышает 100 мкм, получаются слишком большие расстояния от отверстия до фотоприемника, и дифрагирующий пучок приходится "складывать" с помощью зеркал или увеличивать с помощью объективов, иначе разрешающей способности фотоприемника может быть недостаточно, чтобы обеспечить требуемую точность измерения.

Введение дополнительных оптических элементов неизбежно приводит к тому, что появляются искажения дифракционной картины, влияющие на погрешность измерения.

Чем выше порядок экстремума, тем больше он изменяется с изменением радиуса отверстия. Вместе с тем, чем выше порядок экстремума, тем меньше интенсивность света этого экстремума, а следовательно, больше влияние искажающих факторов и хуже разрешающие возможности.

Для отверстий, радиус которых превышает 100 мкм, по мнению авторов целесообразно использовать иной метод измерения.

На рисунке 1 показано отверстие, по центру перекрытое непрозрачным экраном так, что остаются два свободных сегмента.

Падающий свет дифрагирует на каждом из сегментов, а дифрагирующие пучки интерферируют между собой. Рассчитаем суммарную картину.

Пусть R — радиус отверстия, точка O — его центр, R_0 — полуширина экрана. Введем прямоугольную

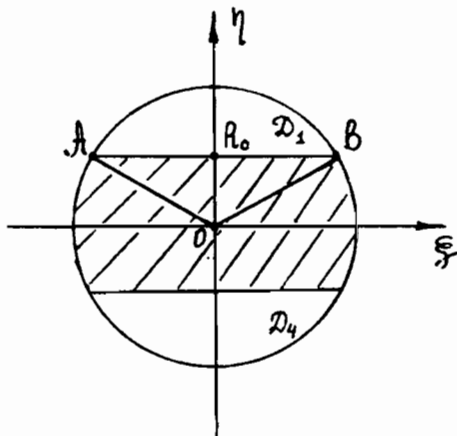


Рис. 1. Круглое отверстие с непрозрачным экраном.

декартову систему координат с центром в точке (рис.1).

Поскольку экран параллелен оси ξ , наибольшая интенсивность дифрагирующего на сегменте света будет сосредоточена в плоскости, перпендикулярной системе координат (параллельной направлению падающего света) и проходящей через ось η . Поэтому целесообразно принять $\varphi = \pi/2$, а следовательно $p=0$, $q=W$.

Пусть D_1 — верхний сегмент круга, D_2 — треугольник AOB, D_3 — круговой сектор AOB (рис.1).

Дифракционная картина от области рассчитывается по формуле:

$$U(P) = C \iint_{(D_1)} e^{-ikw\eta} d\xi d\eta. \quad (4)$$

Выражение (4) может быть записано в виде

$$U(P) = C \iint_{(D_3)} e^{-ikw\eta} d\xi d\eta - C \iint_{(D_2)} e^{-ikw\eta} d\xi d\eta. \quad (5)$$

Рассмотрим каждый из интегралов в формуле (5). Преобразуем первый интеграл с помощью перехода к полярным координатам

$$\begin{cases} \xi = \rho \cos \theta \\ \eta = \rho \sin \theta \end{cases}$$

причем $\theta \in [\varphi_1; \varphi_2]$, где:

$$\varphi_1 = \arctg \frac{R_0}{\sqrt{R^2 - R_0^2}}, \quad \varphi_2 = \pi - \varphi_1.$$

Тогда [2]

$$\iint_{(D_3)} e^{-ikw\eta} d\xi d\eta = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\theta \int_0^R e^{-ikw\rho \sin \theta} \rho d\rho.$$

Интегрируя по частям, имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\theta \int_0^R e^{-ikw\rho \sin \theta} \rho d\rho &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\frac{Re^{-ikw \sin \theta R}}{-ikw \sin \theta} - \right. \\ &\left. - \frac{e^{-ikw \sin \theta R}}{(-ikw \sin \theta)^2} + \frac{1}{(-ikw \sin \theta)^2} \right) d\theta \end{aligned}$$

Выделив в этом выражении вещественную и мнимую части, получим равенство:

$$\begin{aligned} \iint_{(D_3)} e^{-ikw\eta} d\xi d\eta &= \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{kwR \sin \theta \sin(kwR \sin \theta) + \cos(kwR \sin \theta) - 1}{k^2 w^2 \sin^2 \theta} d\theta + \\ &+ i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{kwR \sin \theta \cos(kwR \sin \theta) - \sin(kwR \sin \theta)}{k^2 w^2 \sin^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

Второй интеграл в формуле (5) вычисляется явным образом:

$$\begin{aligned} \iint_{(D_2)} e^{-ikw\eta} d\xi d\eta &= \frac{2\sqrt{R^2 - R_0^2}}{k^2 w^2 R_0^2} (kwR_0 \sin(kwR_0) - \\ &- \cos(kwR_0) - 1 + i(kwR_0 \cos(kwR_0) - \sin(kwR_0))) \end{aligned}$$

Тогда для верхнего сегмента имеем:

$$\begin{aligned} \iint_{(D_1)} e^{-ikw\eta} d\xi d\eta = & \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\frac{kwR \sin \theta \sin(kwR \sin \theta)}{k^2 w^2 \sin^2 \theta} + \right. \\ & \left. + \frac{\cos(kwR \sin \theta) - 1}{k^2 w^2 \sin^2 \theta} \right) d\theta - \frac{2\sqrt{R^2 - R_0^2}}{k^2 w^2 R_0^2} \cdot \\ & \cdot (kwR_0 \sin(kwR_0) + \cos(kwR_0) - 1) + \\ & + i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\frac{kwR \sin \theta \cos(kwR \sin \theta)}{k^2 w^2 \sin^2 \theta} - \right. \\ & \left. - \frac{\sin(kwR \sin \theta) - 1}{k^2 w^2 \sin^2 \theta} \right) d\theta - \frac{2\sqrt{R^2 - R_0^2}}{k^2 w^2 R_0^2} \cdot \\ & \cdot (kwR_0 \cos(kwR_0) - \sin(kwR_0)) \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть D_4 — нижний сегмент круга (рис.1). В результате аналогичных преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \iint_{(D_4)} e^{-ikw\eta} d\xi d\eta = & \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\frac{kwR \sin \theta \sin(kwR \sin \theta)}{k^2 w^2 \sin^2 \theta} + \right. \\ & \left. + \frac{\cos(kwR \sin \theta) - 1}{k^2 w^2 \sin^2 \theta} \right) d\theta - \frac{2\sqrt{R^2 - R_0^2}}{k^2 w^2 R_0^2} \cdot \\ & \cdot (kwR_0 \sin(kwR_0) + \cos(kwR_0) - 1) - \\ & - i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\frac{kwR \sin \theta \cos(kwR \sin \theta)}{k^2 w^2 \sin^2 \theta} - \right. \\ & \left. - \frac{\sin(kwR \sin \theta)}{k^2 w^2 \sin^2 \theta} \right) d\theta - \frac{2\sqrt{R^2 - R_0^2}}{k^2 w^2 R_0^2} \cdot \\ & \cdot (kwR_0 \cos(kwR_0) - \sin(kwR_0)) \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда выражение для расчета суммарной интерференционной картины имеет вид:

$$\begin{aligned} U(P) = 2C \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\frac{kwR \sin \theta \sin(kwR \sin \theta)}{k^2 w^2 \sin^2 \theta} + \right. \\ & \left. + \frac{\cos(kwR \sin \theta) - 1}{k^2 w^2 \sin^2 \theta} \right) d\theta - \frac{4C\sqrt{R^2 - R_0^2}}{k^2 w^2 R_0^2} \cdot \\ & \cdot (kwR_0 \sin(kwR_0) + \cos(kwR_0) - 1) \end{aligned} \quad (8)$$

Подавляющее большинство отверстий, несущих конструктивную или технологическую нагрузку, имеет глубину, обусловленную общим назначением изделия, в котором выполнено это отверстие, причем глубина отверстия, как правило, значительно превышает его радиус. Если не учитывать глубину отверстия при изменении его радиуса, это неизбежно приводит к погрешности измерения, тем большей, чем больше глубина отверстия. Характер дифракционной картины для отверстия с глубиной и без таковой заметно отличается. Это отличие обусловлено тем, что свет, дифрагирующий на верхнем крае отверстия, экранируется нижним краем. В результате образуется теневая зона, из которой свет не может выйти из отверстия [3].

На рисунке 2(а) показано отверстие, имеющее радиус R и глубину S . Дифрагирующий на верхнем крае свет имеет теневую зону шириной Δ_1 . Дифрагирующий на нижнем крае отверстия свет теневой зоны не имеет. Следовательно, суммарная ширина теневой зоны от всего отверстия будет равна $\Delta_1/2$.

Поскольку мы рассматриваем только свет, дифрагирующий в направлении $\varphi = \pi/2$, то распределение теневой зоны по периметру отверстия будет таким, как это показано на рисунке 2(б). Рассматриваемое отверстие состоит из двух областей G_1 и G_2 , где область G_1 — полукруг, полученный параллельным переносом полукруга радиуса R с центром в начале координат на величину $\Delta_1/2$ вдоль оси $O\eta$ в отрицательном направлении, а G_2 — круговой сегмент (рис.2(б)).

Следовательно,

$$U(P) = C \iint_{(G_1)} e^{-ikW\eta} d\xi d\eta + C \iint_{(G_2)} e^{-ikW\eta} d\xi d\eta. \quad (9)$$

Рассмотрим первый интеграл в формуле (9). Сделав замену переменных

$$\begin{cases} \eta^* = \eta + \frac{\Delta_1}{2} \\ \xi^* = \xi \end{cases}$$

получим:

$$\iint_{(G_1)} e^{-ikW\eta} d\xi d\eta = e^{ikw\frac{\Delta_1}{2}} \iint_{(G_1^*)} e^{-ikW\eta^*} d\xi^* d\eta^*$$

где G_1^* — верхняя половина круга с центром в начале новой системы координат $O\xi^*\eta^*$ и радиусом R .

Для вычисления последнего интеграла можно применить метод, аналогичный методу, использованному для вывода формулы (2) (отверстие имеет форму круга). Получим:

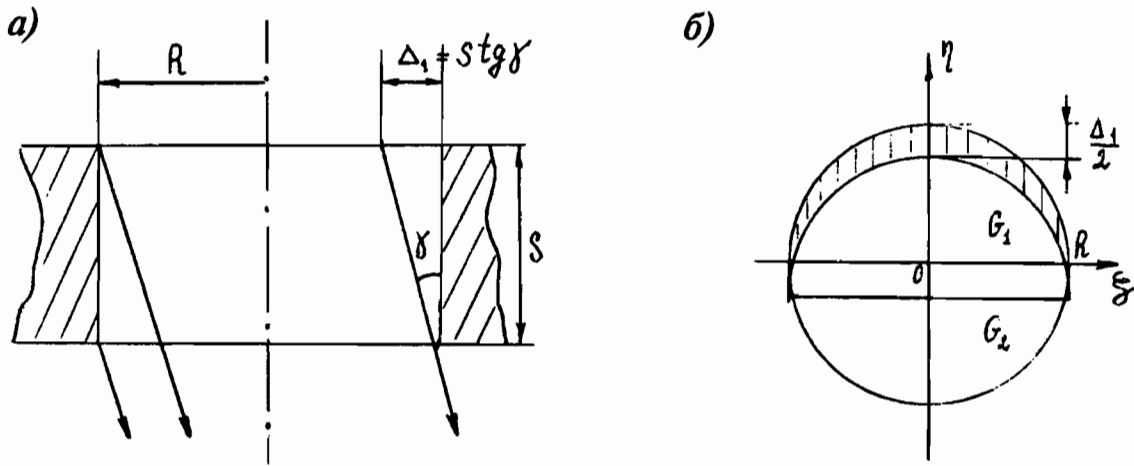


Рис.2. Образование теневой зоны для круглого протяженного отверстия.

$$U(P) = \frac{CR}{kw} \int_0^\pi \cos(kwR \sin \alpha - \alpha) d\alpha + \frac{iCR}{kw} \left[\int_0^\pi \sin(\alpha - kwR \sin \alpha) d\alpha - 2 \right] \quad (10)$$

Второй интеграл в выражении (9) может быть преобразован по формуле (7), где $R_0 = \Delta_1/2$.

Рассмотрим наиболее общий случай, когда отверстие имеет глубину и экранировано прямоугольным препятствием, расположенным на некотором расстоянии H от отверстия. Случай такого расположения экрана и отверстия показан на рисунке 3. Ширина теневой зоны $\Delta_1 = (H+S) \text{tg} \gamma$,

обусловленная глубиной отверстия, сохранится, а зона,

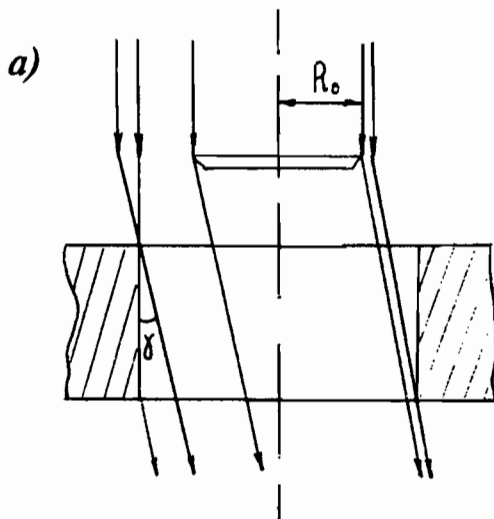


Рис.3. Теневая и дополнительная зоны для протяженного отверстия, экранированного прямоугольным препятствием.

шириной $\Delta_2 = H \text{tg} \gamma$ внесет дополнительный вклад в дифрагирующий на отверстии свет. На рисунке 3(a) показано направление волновых фронтов света, дифрагирующего на отверстии с экраном. На рисунке 3(б) показан характер теневой и дополнительной зон.

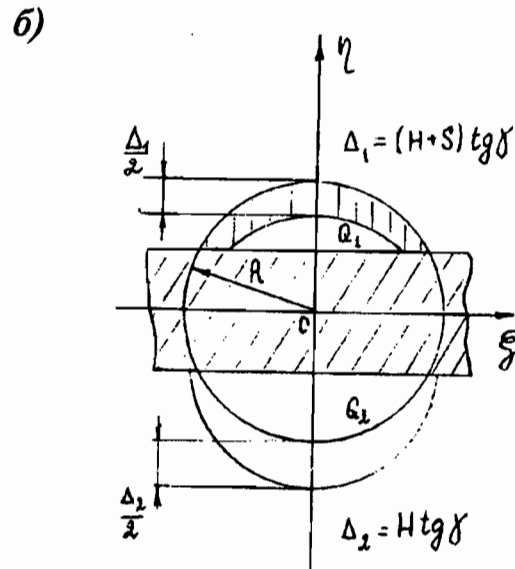
Будем предполагать, что величина $\Delta_2/2 \leq R_0$. Таким образом, дифракционная картина от данного отверстия может быть вычислена по формуле:

$$U(P) = C \iint_{(Q_1)} e^{-ikW\eta} d\xi d\eta + C \iint_{(Q_2)} e^{-ikW\eta} d\xi d\eta.$$

где: Q_1 — верхний, а Q_2 — нижний сегменты (рис.3(б)).

Рассмотрим первый интеграл. Произведем замену переменных

$$\begin{cases} \eta' = \eta + \frac{\Delta_1}{2} \\ \xi' = \xi \end{cases}$$



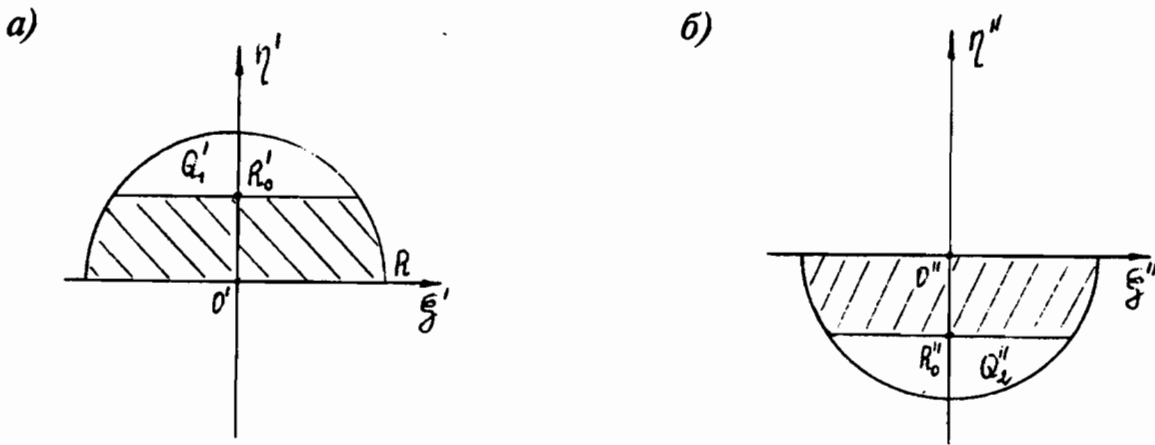


Рис.4. Области интегрирования с учетом теневой и дополнительной зон.

Получим:

$$\iint_{(Q_1)} e^{-ikw\eta} d\xi d\eta = e^{ikw\frac{\Delta_1}{2}} \iint_{(Q_1')} e^{-ikw\eta'} d\xi' d\eta'. \quad (11)$$

Здесь Q_1' — сегмент, показанный на рисунке 4(а), где $R_0' = R_0 + \Delta_1/2$.

Аналогичным образом получаем:

$$\iint_{(Q_2)} e^{-ikw\eta} d\xi d\eta = e^{ikw\frac{\Delta_2}{2}} \iint_{(Q_2'')} e^{-ikw\eta''} d\xi'' d\eta'' \quad (12)$$

где Q_2'' — сегмент, изображенный на рисунке 4(б), причем $R_0'' = R_0 - \Delta_2/2$.

Интегралы в выражениях (11) и (12) могут быть преобразованы по формулам (6) и (7).

Таким образом, во всех рассмотренных случаях расчет дифракционной картины сводится к формулам (2), (6), (7), (10).

Распределение интенсивности света, дифрагирующего на плоском круглом отверстии, хорошо известно [9]. Вышеприведенная методика расчета дифракционной картины позволяет учесть протяженность отверстия. На рисунке 5 показано приращение угловой координаты первого максимума дифракционной картины с увеличением глубины отверстия радиусом 100 мкм. Из рисунка видно, что с увеличением глубины отверстия монотонно увеличивается приращение угловой координаты экстремума. С увеличением номера экстремума приращение увеличивается.

На рисунке 6 показано приращение угловой координаты первого максимума с изменением радиуса отверстия. Увеличение радиуса отверстия приводит к уменьшению угловой координаты первого максимума дифракционной картины.

При изменении радиуса протяженных отверстий необходимо учитывать влияние глубины отверстия на дифракционную картину, в противном случае неизбежна погрешность измерения тем большая, чем больше глубина и меньше радиус отверстия.

Как уже указывалось, с увеличением радиуса отверстия угловые координаты экстремумов дифракционной картины уменьшаются, а амплитуда максимумов, начиная с первого, мала по сравнению с нулевым максимумом. Все это приводит к трудностям измерения радиуса отверстия.

При экранировании отверстия непрозрачным препятствием можно существенно увеличить угловую координату и относительную амплитуду максимумов дифракционной картины.

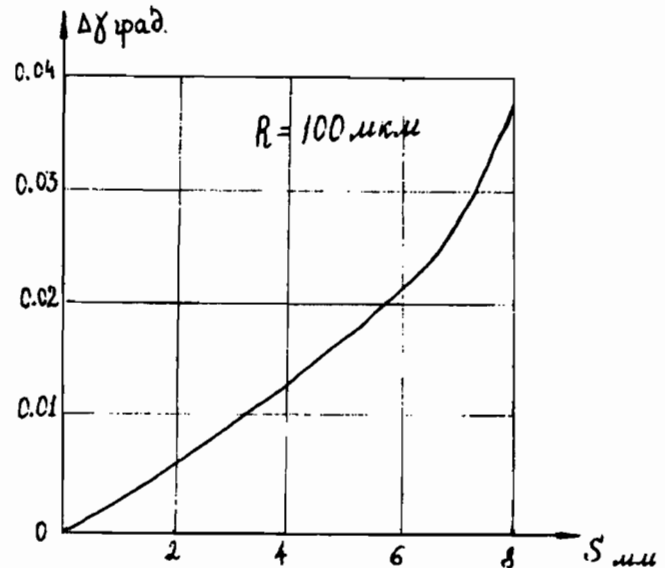


Рис.5. Приращение угловой координаты первого максимума дифракционной картины с увеличением глубины отверстия радиусом 100 мкм.

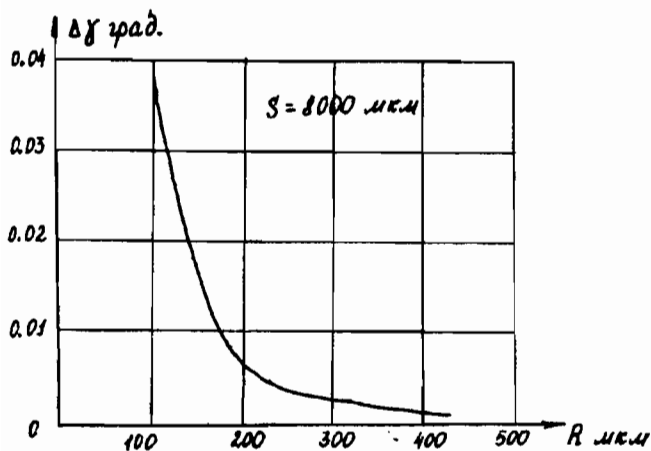


Рис.6. Приращение угловой координаты первого максимума дифракционной картины с изменением радиуса отверстия при глубине отверстия $S=8000$ мкм.

Угловая координата увеличивается вследствие того, что отверстие делится экраном на две части, каждая из которых заметно меньше самого отверстия, и кроме того, часть отверстия перекрывается. Амплитуда максимумов, кроме нулевого, увеличивается для дифракционной картины в направлении, перпендикулярном краю экрана, вследствие влияния на нее самого экрана.

На рисунке 7 показано изменение интенсивности света первого максимума дифракционной картины для отверстий радиусом $R=200$ мкм и $R=400$ мкм с увеличением ширины экрана. Как видно из рисунка, наибольшее значение интенсивности первого максимума достигается при соотношении радиуса отверстия и ширины экрана 2,5:1. При малой относительной ширине экрана она мало отличается

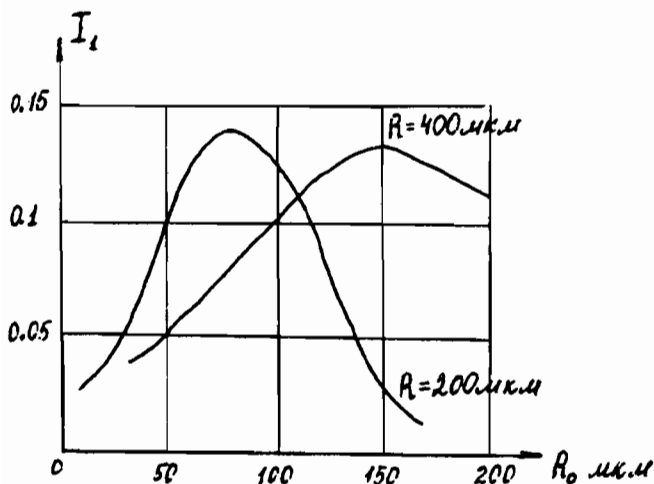


Рис.7. Изменение интенсивности первого максимума дифракционной картины для отверстий $R=200$ мкм и $R=400$ мкм с увеличением ширины экрана.

от дифракционной картины для плоского круглого отверстия. С увеличением ширины экрана характер дифракционной картины изменяется, она все больше становится похожей на интерференционную картину. Все максимумы, включая и нулевой, выравниваются по интенсивности, а расстояния между экстремумами для всей картины становятся одинаковыми.

На рисунке 8 показаны три дифракционные картины для одного и того же отверстия радиусом $R=200$ мкм. Полуширина экрана соответственно равна для первой дифракционной картины $R_0=5$ мкм, для второй $R_0=75$ мкм и для третьей $R_0=175$ мкм. Глубина отверстия оказывает примерно равное влияние на дифракционную картину отверстия с экраном или без экрана.

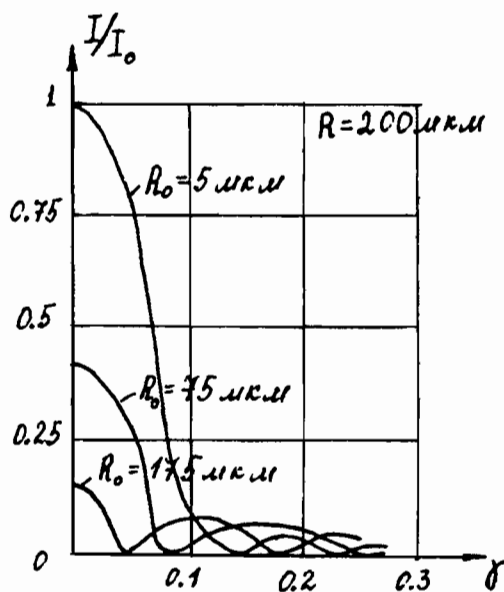


Рис.8. Изменение характера дифракционной картины с увеличением ширины экрана.

Расстояние от отверстия до экрана почти не оказывает влияния на дифракционную картину. Так изменение расстояния от отверстия до экрана в один миллиметр практически невозможно обнаружить в изменении дифракционной картины как в расчетах, так и в эксперименте.

На основании расчетных данных были построены зависимости координат экстремумов дифракционной картины от радиуса отверстия.

На рисунке 9 показаны зависимости координат экстремумов от радиуса отверстия при перекрытии отверстия экраном полуширины 66 мкм (кривые 1 и 2).

На рисунке 9 также показана зависимость отношения нулевого максимума к первому максимуму от радиуса отверстия при ширине экрана 60 мкм (кривая 3).

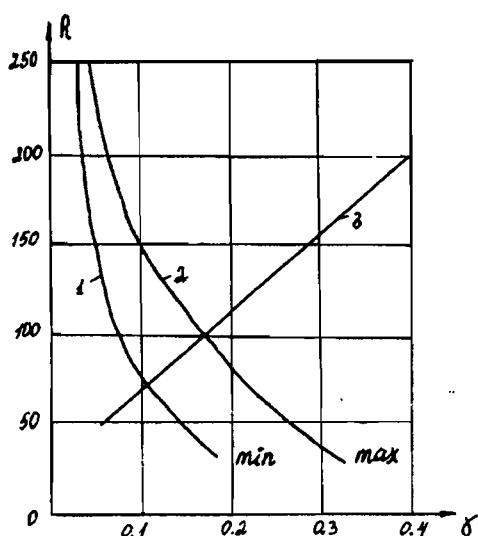


Рис.9. Зависимость параметров дифракционной картины от радиуса отверстия.

Расчетные зависимости, показанные на рисунке 9, проверялись на реальных отверстиях. Измерялись отверстия, выполненные на алмазных волокнах для протягивания проволоки. Предварительно радиус отверстия измерялся на оптическом микроскопе, а затем отверстие экранировалось калиброванной проволокой, освещалось лазерным пучком света. С помощью фотопленки дифракционная картина вводилась в ЭВМ, и по координатам экстремумов вновь определялся радиус отверстия.

Для отверстия одного радиуса использовалось несколько калиброванных проволок (экранов) разного диаметра. Сравнение результатов измерения радиусов отверстий на микроскопе и дифракционным методом совпадают с погрешностью 2-3 мкм для отверстий радиусом $R=150-200$ мкм, что соответствует суммарной погрешности обоих методов измерения.

Анализ дифракционного метода с применением экранирования отверстия позволяет сделать вывод о том, что предложенный метод обладает рядом преимуществ:

1) Диапазон измеряемых отверстий существенно увеличивается.

2) Большая часть световой энергии сосредоточена в линейной дифракционной картине в заданном направлении.

3) Неровности края отверстия меньше искажают линейную дифракционную картину, чем круговую.

4) Представляется возможным измерение протяженных отверстий.

5) Метод может быть применен и на других объектах — шарики, канавки круглого сечения и т.д..

Литература

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., 1970.
2. Фиксгенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1966, т.2.
3. Старостенко Б.В., Никитин В.В.//Научное приборостроение. 1992. 3. С.21-29.
4. Ландсберг Г.С. Оптика. М., 1976.

MEASUREMENT OF OPTICAL DIFFRACTION IN FIXED DIRECTION ON THE DEEP HOLES WITH OBSTACLES

B.V.Starostenko, E.B.Aleksandrova

Altay Polytechnical Institute, Barnaul

A.I. Herzen Russian State Education University, St.-Peterburg

The paper deals with the optical method for the measurement parameters of the deep holes with rectangle obstacles. The dependence of the parameters of the diffraction portrait on the diameter and depth of the hole and on the width of the obstacle is investigated.