

УДК 519.642

ОБОВЩЕННОЕ ДИСКРЕТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ДАННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

© 1996г. Л.В. Новиков

Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 20.04.96

Рассматривается способ временного квантования, обеспечивающий представление выходных сигналов аналитических приборов в виде обобщенных отсчетов, являющихся по существу коэффициентами Фурье в базисе смещенных во времени финитных функций. Получено выражение для ядра интерполирующего оператора, которое при определенных условиях вырождается в идеальный интерполятор В.А. Котельникова-К. Шеннона. Показано, что представление сигнала в виде обобщенных отсчетов в отличие от традиционного временного квантования позволяет получить текущие значения его производных и интеграла.

Введение

С целью повышения информативности неизвестных параметров выходные сигналы аналитических приборов как правило подвергаются сначала предварительной обработке, включающей такие операции как сглаживание, дифференцирование или интегрирование данных. При этом стремятся достичь максимальной чувствительности прибора при минимальных потерях разрешающей способности, что является противоречивой задачей. Одним из существенных этапов такой обработки с помощью цифровых устройств является дискретизация, которая осуществляется традиционными средствами в соответствии с теоремой В.А.Котельникова-К.Шеннона, с последующим сглаживанием, дифференцированием, интегрированием и т.п. сигнала в реальном времени в текущем окне данных [1,2]. Используемые при этом широко распространенные полиномиальные фильтры, также как и согласованные фильтры, вносят существенную систематическую ошибку [3], что требует тщательного подбора их параметров. С целью уменьшения искажений формы полезных сигналов, что необходимо для сохранения разрешающей способности, и максимального подавления шумов, в настоящей работе на основе спек-

трального подхода к представлению и анализу сигналов [4-6,7], предлагается процесс дискретизации совместить с линейной операцией, в частности, фильтрацией данных. В результате отсчеты сигнала, названные обобщенными отсчетами, будут представлять собой уже не мгновенные значения, а усредненные с некоторым весом величины. В работе рассматривается достаточно простой способ обобщенной дискретизации, основанный на временном квантовании исходных данных, прошедших через фильтр, частотная характеристика которого тем или иным способом согласована со спектром сигнала с целью достижения максимального отношения сигнал/шум. При определенных ограничениях, наложенных на переходную функцию фильтра, такая дискретизация эквивалентна представлению непрерывного сигнала в базисе, образованном смещением этой функции по оси времени с некоторым постоянным шагом, что позволяет разработать семейство алгоритмов согласованной фильтрации и восстановления сигналов по критерию минимума среднеквадратической ошибки.

1. Обобщенная дискретизация данных

Пусть исходные данные $x(t)$, представляющие собой аддитивную смесь полезного

сигнала $S(t)$ и стационарного шума $n(t)$

$$x(t) = S(t) + n(t) \quad (1)$$

поступают на вход фильтра с импульсной переходной функцией $h(t)$. Для большинства применений можно предположить, что функция $S(t)$ известна с точностью до случайных параметров, а ее спектр Фурье $\tilde{z}(\omega)$ непрерывен и сосредоточен в области частот $|\omega| \leq \Omega_s$. Спектр шума $\tilde{n}(\omega)$ чаще всего также лежит в ограниченной области частот $|\omega| \leq \Omega_n$, причем $\Omega_n \gg \Omega_s$.

Назовем обобщенным дискретным представлением временное квантование при $t = k\Delta$ выходного сигнала линейного фильтра, т.е.

$$\begin{aligned} X(k\Delta) &= X_0(k) = \\ &= \int_{k\Delta-T}^{k\Delta+T} x(\tau)h(k\Delta - \tau)d\tau = \\ &= \int_{k\Delta-T}^{k\Delta+T} x(\tau)u_k(\tau)d\tau = \\ &= \int_{k\Delta-T}^{k\Delta+T} S(\tau)u_k(\tau)d\tau + \\ &+ \int_{k\Delta-T}^{k\Delta+T} n(\tau)u_k(\tau)d\tau = \\ &= S_0(k) + N_0(k), \end{aligned} \quad (2)$$

где $u(t/\mu_0) = h(-t)$; $u_k(t) = u((t - k\Delta)/\mu_0)$ – набор смещенных с шагом Δ функций $u(t/\mu_0)$, образующий базис; μ_0 – второй момент (ширина) функции $u(t/\mu_0)$; $2T$ – размер текущего окна данных; $X_0(k)$, $S_0(k)$ и $N_0(k)$ – обобщенные отсчеты исходных данных, сигнала и шума.

Восстановление входного сигнала по обобщенным отсчетам осуществляется с помощью линейного оператора

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \sum_k X_0(k)\Theta_k(t) = \\ &= \sum_k S_0(k)\Theta_k(t) + \end{aligned}$$

$$\sum_k N_0(k)\Theta_k(t) = \hat{S}(t) + \hat{n}(t), \quad (3)$$

где $\Theta_k(t)$ – сопряженный базис-ядро оператора такое, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta_k(t)u_l(t)dt = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases},$$

$\hat{n}(t)$ – остаточный шум,

$\hat{S}(t)$ – восстановленный полезный сигнал.

Критерием качества восстановления сигнала является обычно величина среднеквадратической ошибки (СКО)

$$\epsilon_s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (S(t) - \hat{S}(t))^2 dt.$$

Возможность восстановления сигнала по обобщенным отсчетам с минимальной величиной этой ошибки зависит от вида функции $h(t)$ и, также как и в классическом случае временного квантования, – от величины шага квантования Δ .

От функции $h(t)$ потребуем, чтобы ее спектр Фурье $\tilde{h}(\omega)$ и все $n - 1$ производных спектра были интегрируемы, непрерывны на всей оси и стремились к нулю при $|\omega| \rightarrow \infty$. Тогда, как показано в [1], $t^n h(t) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$, и можно предположить, что при некотором $|\omega| > \Omega_h$ $\tilde{h}(\omega) = 0$ и при $|t| = T$ $h(t) \approx 0$, т.е. функция $h(t)$ должна принадлежать классу функций с финитным спектром и быть ограниченной по длительности.

Кроме того, для однозначного восстановления входного сигнала фильтра по его выходу необходимо, чтобы спектр $\tilde{h}(\omega)$ не обращался в нуль внутри и на концах частотного диапазона, занимаемого сигналом, т.е. $|\tilde{h}(\omega)| \neq 0$ при $\omega \in [-\Omega_s, \Omega_s]$ [1] и в то же время, с целью максимального подавления шума, был не намного шире спектра сигнала. С другой стороны, шаг квантования $\Delta = \pi/\Omega_d$ на выходе фильтра с целью избежания эффекта наложения шумов должен быть таким, чтобы спектр $\tilde{h}(\omega)$ на частоте квантования Ω_d был приблизительно равным нулю.

Следовательно, частота квантования Ω_d должна находиться в диапазоне $\Omega_h > \Omega_d > \Omega_s$. Это означает, что спектр функции $u(t/\mu_0)$, равный $\tilde{u}(\mu_0\omega)$, внутри интервала $\omega \in [-\Omega_d, \Omega_d]$ не должен обращаться в

нуль, а на границах интервала $|\omega| = \Omega_d$ должен быть близким, но не равным нулю.

Предположим, что это условие удовлетворяется при некотором β таком, что $\mu_0 \Omega_d = \pi/\beta$. Тогда для шага квантования получим

$$\Delta = \beta \mu_0 < \frac{\pi}{\Omega_s}. \quad (4)$$

Из (4) следует, что при уменьшении μ_0 и постоянном β величина Δ также уменьшается, что приводит к увеличению числа базисных функций, т.е. к увеличению размерности пространства, натянутого на эти функции, и, соответственно, к уменьшению величины СКО. Однако, с другой стороны, с уменьшением μ_0 расширяется полоса фильтра, что приводит к увеличению шумовой составляющей $\hat{n}(t)$.

Остановимся далее на выборе функции $h(t)$, которая порождает базис $u_k(t)$. Пусть $h(t)$ удовлетворяет известному в теории согласованной фильтрации интегральному уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t - \tau) h(\tau) d\tau = s(t), \quad (5)$$

где $K_n(\tau)$ – симметричное ядро (типа корреляционной функции), $s(t)$ – некоторая финитная функция единичной интенсивности¹.

Для получения ядра восстанавливающего оператора $\Theta_k(t)$ сначала с помощью модифицированного алгоритма Грамма–Шмидта из множества пар функций $\{u_k(t), s_k(t)\}$ синтезируем ортогональную базисную систему $\{\Phi_k(t), \varphi_k(t)\}$ [8]. Вследствие финитности исходных функций выражения для ортого-

нальных функций имеют вид

$$\Phi_k(t) = \sum_{\tau=0}^m b_\tau u_{k-\tau}(t), \quad (6a)$$

и

$$\varphi_k(t) = \sum_{\tau=0}^m b_\tau s_{k-\tau}(t), \quad (6b)$$

причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_k(t) \varphi_l(t) dt = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases}, \quad (7)$$

где b_r – коэффициенты ортогонализации.

Подставляя (6) в (7) для ядра преобразования (3) получим

$$\Theta_k(t) = \sum_{r=-m}^m \gamma_r s_{k+r}(t), \quad (8)$$

где $\gamma_r = \sum_{i=0}^m b_i b_{i+r}$.

Выбор $h(t)$ по (5) позволяет учитывать различную априорную информацию о сигнале и шумах. В частности, при известных форме сигнала $s(t)$ и корреляционной функции шума $K(\tau)$ выбор $h(t)$ по (5) обеспечивает согласованную фильтрацию, что позволяет достичь максимального подавления шума. При этом сам сигнал с минимальной ошибкой может быть восстановлен по формуле (3). При отсутствии какой-либо априорной информации полагают, что $K(\tau) = \delta(\tau)$ ("белый" шум), при этом $h(t) = s(t)$ и $\hat{h}(t)$ выбирают произвольно из класса финитных функций (например, гауссовой или лоренцовой формы). Ширину μ_0 функции $h(t)$ и шаг квантования Δ в обоих случаях выбирают такими, чтобы $\hat{h}(\mu_0 \omega)$ при $|\omega| = \pi/\Delta$ была близкой, но не равной нулю и выполнялось условие $\Delta > \pi/\Omega_s$.

¹ Следует отметить, что решения уравнения (5) при заданной функции $s(t)$ для экспоненциальных и экспоненциально-косинусных корреляционных функций хорошо известны. В частности, при $K_n(\tau) = \sigma_n^2 e^{-|\tau/\tau_0|}$

$$u(t) = \frac{1}{2\sigma_n^2} \left(s(t) - \tau_0^2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} \right),$$

а в случае белого шума $K_n(\tau) = G_0 \delta(\tau)$

$$u(t) = \frac{1}{G_0} s(t)$$

Если задача фильтрации шумов в процессе дискретизации не ставится, то можно положить, что функция $h(t)$ является бесконечно узким импульсом, т.е. δ -функцией. Тогда $u_k(t) = \delta(t - k\Delta)$ и, если предположить что $n(t)$ — "белый" шум с ограниченной полосой $|\omega| < \pi/\Delta$, то из (5) и (8) следует

$$\Theta_k(t) = s_k(t) = \frac{\sin \pi(t-k\Delta)/\Delta}{\pi(t-k\Delta)/\Delta},$$

т.е. ядро оператора (3) является идеальной функцией интерполяции В.А.Котельникова-К.Шеннона.

2. Восстановление сигнала и его линейных преобразований

Таким образом при соответствующем выборе функции $h(t)$ и шага квантования Δ обобщенные отсчеты полезного сигнала $S_0(k)$ содержат всю необходимую информацию о сигнале, так как с помощью обратного преобразования (3) он может быть полностью восстановлен. Восстановление шума при этом происходит частично, так как вследствие фильтрующего свойства свертки (2) его высокочастотная часть подавляется.

Подставляя в (3) выражение (2) получим для полезного сигнала

$$\begin{aligned} \hat{S}(t) &= \sum_{k=-m}^m \int_{k\Delta-T}^{k\Delta+T} s(\tau) u_k(\tau) \Theta_k(t) = \\ &= \int_{t-m\Delta}^{t+m\Delta} S(\tau) d\tau \sum_{k=-m}^m u_k(\tau) \Theta_k(t), \end{aligned} \quad (9)$$

где $H(t) = \sum_{k=-m}^m u_k(0) \Theta_k(t)$ — импульсная переходная функция линейной системы дискретизации-восстановления, которая носит название ядра Дирихле.

На практике часто необходимо иметь как сами значения исходного сигнала, так и текущие значения производных или интеграла, т.е. некоторое его линейное преобразование

$$Z(t) = \vec{H} S(t),$$

где \vec{H} — оператор преобразования.

Весовая функция этого оператора $H(t)$

для базиса (6) в классе линейных интегральных преобразований

$$Z(t) = \int_{t-T_0}^{t+T_0} H(t, \tau) S(\tau) d\tau \quad (10)$$

определяется как [7]

$$H(\tau) = \sum_{r=-m}^m h_r \Phi_k(\tau), \quad (11)$$

где в рассмотренном выше случае восстановления сигнала

$$h_r = \varphi_r(0); \quad (12a)$$

при ν -кратном дифференцировании сигнала

$$h_r = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi_r^\nu(-t); \quad (12b)$$

при текущем интегрировании сигнала в интервале $[t - T_0, t + T_0]$

$$h_r = \int_{-T_0}^{T_0} \varphi_r(-t) dt. \quad (12b)$$

Подставляя в (10) выражение (11) и выполняя преобразования с учетом (12), получим:

для восстановления сигнала — выражение

$$Z(t) = \hat{S}(t) = \sum_{k=\text{int}(t/\Delta)-m}^{\text{int}(t/\Delta)+m} S_0(k) \Theta_k(t), \quad (13a)$$

где $\Theta_k(t)$ определяется по (8);

для дифференцирования сигнала

$$Z(t) = \hat{S}^\nu(t) = \sum_{k=\text{int}(t/\Delta)-m}^{\text{int}(t/\Delta)+m} S_0(k) \Theta_k^\nu(t), \quad (13b)$$

где

$$\Theta_k^\nu(t) = \sum_{r=-m}^m \gamma_r s_{k+r}^\nu(t)$$

— ядро восстанавливающего оператора ν -ой производной сигнала;

для интегрирования сигнала

$$Z(t) = \int_{t-T_0}^{t+T_0} \hat{S}(\tau) d\tau = \sum_{k=int(t/\Delta)+m}^{int(t/\Delta)+m} S_0(k) \Theta_k^*(t), \quad (13в)$$

где

$$\Theta_k^*(t) = \sum_{r=-m}^m \gamma_r \int_{t-T_0}^{t+T_0} s_{k+r}(\tau) d\tau$$

- ядро восстанавливающего оператора текущего интегрирования сигнала.

В выражениях (13) $int(t/\Delta)$ -целая часть отношения текущего времени t к шагу квантования Δ .

3. Пример обобщенной дискретизации

Проиллюстрируем изложенный выше подход примером дискретного представления сигнала гауссовой формы в присутствии белого шума. Предположим, что в этом случае $u_k(t) = \exp\{-(t - k\Delta)^2/2\mu_0^2\}$. Тогда $F_u(\mu_0\omega) = \mu_0\sqrt{2\pi} \exp\{-\mu_0^2\omega^2/2\}$.

Таблица Коэффициенты ортогонализации γ_r при шаге квантования $\Delta = 1,2\mu_0$

r	γ_r	r	γ_r
0	2,334987	13	-0,035170
1	-2,086324	14	0,024537
2	1,643905	15	-0,017119
3	-1,216946	16	0,011943
4	0,873874	17	-0,008331
5	-0,618295	18	0,005811
6	0,434325	19	-0,004052
7	-0,304026	20	0,002824
8	0,212455	21	-0,001967
9	-0,148341	22	-0,001368
10	0,103534	23	-0,000302
11	-0,072246	24	0,000198
12	0,050409		

Выберем $\beta = 1,2$; тогда $\Delta = 1,2\mu_0$ и при $\omega = \Omega_d = \pi/1,2\mu_0$ имеем $F_u(\mu_0\Omega_d) =$

$0,032 F_u(0)$. Коэффициенты γ_r для ядра $\Theta_k(t)$ приведены в таблице. Выполнение условия ортогональности функций $\Theta_k(t)$ и $u_k(t)$ можно проверить непосредственным вычислением. В таблице приведены коэффициенты γ_r только для положительных значений r , так как $\gamma_r = \gamma_{-r}$. Для практических целей можно пользоваться значительно меньшим числом коэффициентов γ_r в зависимости от требуемой погрешности вычислений.

На рис.1 приведены: а) - реализация гауссового сигнала $S(t) = a \exp\{-(t - t_s)^2/2\mu_s^2\}$ при $a=10$, $\mu_s = 1,6\mu_0$ и $t_s = 30\mu_0$ в смеси с шумом при $\sigma_n = 1$ (отношение сигнал/шум равно 10); б) - обобщенные отсчеты $X_0(k)$ в виде вертикальных линий. Моделирование проводилось при $\mu_0 = 5\Delta_t$, где Δ_t -шаг временного квантования.

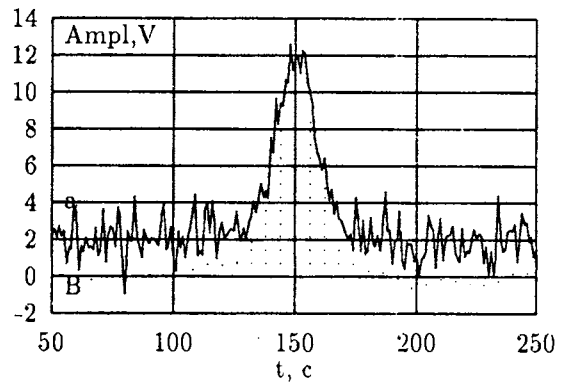


Рис. 1 Реализация гауссового сигнала в смеси с шумом; точками обозначены обобщенные отсчеты.

На рис.2 показаны результаты восстановления по обобщенным отсчетам сигнала с шумом $\hat{x}(t)$ а), а также (для сравнения)- сигнал $S(t)$ б) и восстановленный сигнал $\hat{S}(t)$ в).

На рис.3 приведены аналогичные кривые по восстановлению по обобщенным отсчетам текущих значений первой производной,

а на рис.4 - текущего значения интеграла при $T_0 = 2\mu_s$. Совпадение на рисунках кривых б) и в) свидетельствует о том, что, основная погрешность оценок привносится составляющей шума. Как показывают непосредственные вычисления систематической ошибкой восстановления можно пренебречь.

и с), а также интеграла *d*).

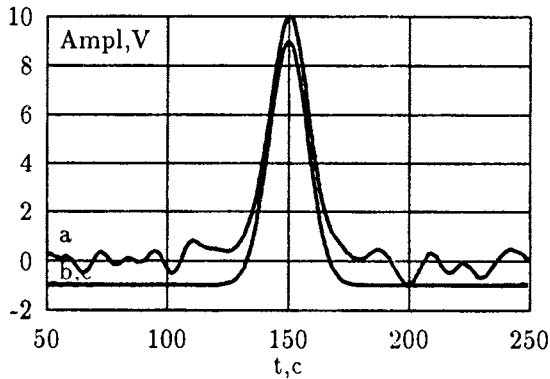


Рис. 2 Восстановленная по обобщенным отсчетам реализация гауссового сигнала: а – с шумом, б – без шума. Для сравнения приведена реализация исходного сигнала без шума – с.

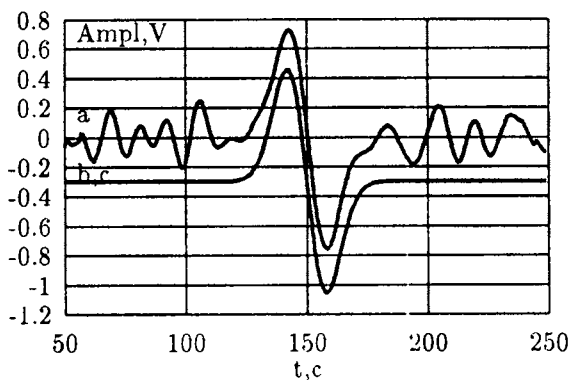


Рис. 3 Восстановленная по обобщенным отсчетам реализация производной гауссового сигнала: а – с шумом, б – без шума. Для сравнения приведена реализация производной исходного сигнала без шума – с.

На рисунках хорошо видно, что остаточный шум носит явно низкочастотный характер. На рис.5 показан вид ядер восстанавливающих операторов истинного значения сигнала *a*), его первой и второй производных *b*)

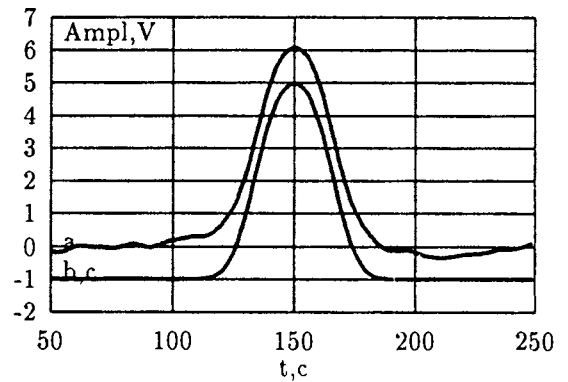


Рис. 4 Восстановленная по обобщенным отсчетам реализация текущего значения интеграла гауссового сигнала: а – с шумом, б – без шума. Для сравнения приведена реализация текущего значения интеграла исходного сигнала без шума – с.

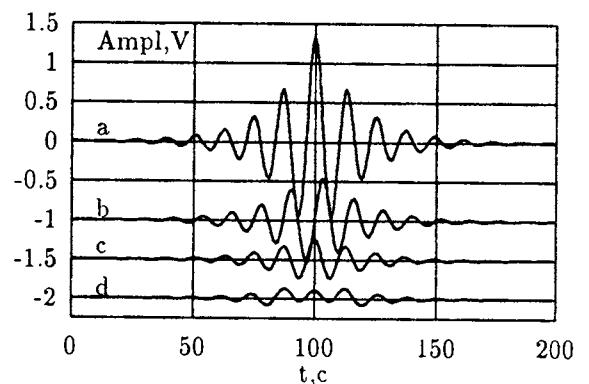


Рис. 5 Ядра восстанавливающих операторов: а – исходного сигнала, б – его первой производной, с – текущего значения его интеграла.

Заключение

В работе показана возможность согласованной фильтрации сигналов аналитических приборов (повышения чувствительности путем обработки данных) при сохранении разрешающей способности путем временного квантования выходного сигнала фильтра, с финитной во временной и частотной областях импульсной переходной функцией. Получены выражения для ядер восстанавливающих операторов исходного сигнала, текущих значений его производных и интеграла.

Исследование алгоритмов показало, что систематическая ошибка, вызванная искажениями сигнала, во всех случаях обработки практически отсутствует. Полученные результаты могут быть использованы для обработки в реальном масштабе времени по текущей выборке данных смеси квазидетерминированных полезных сигналов с высокочастотным шумом с целью его подавления или для обработки двух случайных процессов, один из которых, информативный, имеет низкочастотный характер.

Литература

1. Хургин Я.И., Яковлев В.П. // ТИИЭР. 1977. Т.65, №7. С.16.

2. Дудин С.А., Бороноев В.В., Цыдыпов Ч.Ц. // Радиотехника. 1994. №7. С.57.
3. Rzhnevskii A.M., Mardilovich P.P. // Applied Spectroscopy. 1994. Vol.48, №1. С.13.
4. Трахтман А.М. Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М., 1972.
5. Френкс Л. Теория сигналов. М., 1974.
6. Омельченко В.А., Колесников Д.А. // Отбор и обработка информации. 1990. №81. С.1.
7. Перов В.П. Прикладная спектральная теория оценивания. М., 1982.
8. Русинов Л.А., Новиков Л.В. Спектральный подход к первичной обработке сигналов аналитических приборов. Л., 1984.

GENERALIZED DISCRETE REPRESENTATION OF ANALOG DATA FROM ANALYTICAL INSTRUMENTS

L.V. Novikov

Institute for Analytical Instrumentation RAS

A time quantization method is discussed for representation of analytical instrument outputs in the form of generalized samples being essentially Fourier coefficients in the basis of time-biased finite functions. An expression for the interpolating operator kernel is found, which under certain conditions is reduced to the ideal Kotelnikov-Shannon interpolator. It is shown that, unlike conventional time quantization, the signal representation based on generalized samples allows one to obtain the current values of its derivatives and integral.