УДК 681. 51 : 681. 327

Двумерные дискретные ортогональные преобразования с рекуррентным базисом / В. М. Чернов / /Научное приборостроение. — 1993. — Т. 3. — N 1: Дифракционная плоская оптика и обработка изображений. — С. 111—117.

Рассматривается класс двумерных ортогональных преобразований, базисные функции которых удовлетворяют рекуррентному соотношению, включающий в качестве частных случаев преобразования Фурье и Хартли. С использованием матричной показательной функции строятся быстрые алгоритмы таких преобразований. Библ. 7 назв.

**В. М. Чернов**
*( Самарский государственный аэрокосмичесий университет )*

# ДВУМЕРНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С РЕКУРРЕНТНЫМ БАЗИСОМ

*A class of 2-D orthogonal transforms with the basis functions that satisfy a linear recurrent relationship including as particular cases Foorjer's and Hartley's transforms has been considered. Using the matrix of an exponential function the fast algorithms of such transforms have been bujlt.*

## Введение

Среди множества различных методов решения класса задач улучшения качества и фильтрации изображений, сокращения избыточности и эффективного кодирования, распознавания образов и т. д. выделяется своей общностью метод ортогональных преобразований, практически берущий начало от известного алгоритма Кули—Тьюки быстрого преобразования Фурье. Однако многообразие задач, решаемых с применением различных дискретных ортогональных преобразований (ДОП), привело к необходимости расширения арсенала таких преобразований, к поиску теоретического и методологического единства ДОП, получению оценок вычислительной сложности, изучению возможности распараллеливания, простой аппаратной реализации и т.д. Возникли специализированные вычислительные средства — спецпроцессоры ДОП. Эти вопросы, на наш взгляд, особенно актуальны сейчас, при создании нового поколения вычислительных машин, в частности, вычислительных машин для обработки изображений и других многомерных синалов.

Настоящая работа ставит своей целью изучение класса двумерных ДОП, включающего в себя наряду с хорошо известными ДОП Фурье, Хартли и другие, в какой-то степени родственные им преобразования, базисные функции которых порождены линейным рекуррентным соотношением. Отметим, что рассматриваемый класс преобразований обладает едиными быстрыми алгоритмами.

## 1. Дискретные ортогональные преобразования с рекуррентным базисом ( ДОП РБ )

Рассмотрим преобразование $N$-периодической комплекснозначной функции $x\ (n)$, определяемое посредством равенства

$$\hat{x}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,\Phi_m(n) \quad (m = 0, 1, \ldots, N-1), \tag{1}$$

где базисные функции $\Phi_m(n)$ удовлетворяют соотношениям

$$\Phi_m(n) = \Phi(m\,n)\,, \tag{2}$$

$$\Phi\ (n) = a_1\ \Phi\ (n-1) + \ldots a_r\ \Phi\ (n-r) \quad (a_r \neq 0) \tag{3}$$

с некоторыми нетривиальными начальными условиями

$$(\Phi(0)\,, \Phi(1)\,, \ldots\,, \Phi(r-1))\,.$$

Преобразования типа (1) с базисными функциями (2), (3) рассматривались, в частности, в [1]. Класс преобразований (1) с базисной функцией $\Phi(n)$, удовлетворяющей соотношению второго порядка

$$\Phi\ (n) = 2\cos\frac{2\pi}{N}\,\Phi\ (n-1) - \Phi\ (n-2)\,, \tag{4}$$

при различном выборе начальных условий $(\Phi(0)\,, \Phi(1))$ включает в себя хорошо известные преобразования Фурье,Хартли и т. д., что дает возможность синтезировать "квазиуниверсальные" быстрые алгоритмы, позволяющие одновременно получать спектры всего класса преобразований с возможностью адаптивного выбора конкретного преобразования, оптимального для решаемой задачи. Такая возможность обеспечивается представлением преобразования (1)—(4) в виде

$$\hat{x}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,\mathbf{e}\,\mathbf{W}^{mn}\,\mathbf{b}^t\,, \tag{5}$$

где $\mathbf{W}$ — так называемая сопровождающая матрица ( см. [2] ) линейного рекуррентного соотношения (3), определяемая в случае выполнимости (4) как

$$\mathbf{W} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos 2\pi/N \end{Bmatrix};$$

вектор-строка $\mathbf{e}$ — фиксированный ( мы далее считаем $\mathbf{e} = (1\,,1)$; вектор-столбец $\mathbf{b}^t$ ( $t$ — знак транспонирования ) однозначно определяется начальными условиями $(\Phi(0)\,, \Phi(1))$ и, таким образом, конкретизирует выбор преобразования (1)—(4). В силу вышесказанного преобразование (5) может реализовываться в два этапа: вычисление "векторного ядра" сразу для всех преобразований (1)—(4)

$$\mathbf{X}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,\mathbf{e}^t\,\mathbf{W}^{mn}\,,$$

и выбор конкретного преобразования в зависимости от вектора $\mathbf{b}^t$

$$\hat{x}(m) = \mathbf{X}(m)\cdot\mathbf{b}^t\,. \tag{6}$$

Вычисление векторов $\mathbf{X}(m)$ для $m = 0\,, 1\,, \ldots\,, N-1$ может быть реализовано по схемам известных быстрых алгоритмов Кули—Тьюки, Гуда—

Томаса и т. д. (см., например, [3]), а вычисление $\hat{x}(m)$ по формуле (6) требует $0(N)$ операций сложения и умножения.

Целью данной работы является развитие вышеизложенной методики для двумерного случая.

## 2. Двумерные ДОП РБ

Основным объектом изучения здесь мы считаем два типа двумерных ДОП РБ ($m_1, m_2 = 0, 1, \ldots, N-1$)

а) с разделимым ядром

$$\hat{x}(m_1, m_2) = \sum_{n_1, n_2 = 0}^{N-1} x(n_1, n_2)\, \Phi(m_1 n_1)\, \Phi(m_2 n_2); \tag{7}$$

б) с неразделимым ядром

$$\hat{x}^*(m_1, m_2) = \sum_{n_1, n_2 = 0}^{N-1} x(n_1, n_2)\, \Phi(m_1 n_1 + m_2 n_2). \tag{8}$$

Здесь, по-прежнему, $x(n_1, n_2)$ — входной сигнал, понимаемый как комплекснозначная двумерная последовательность, $N$ — периодическая по каждому аргументу; базисная функция $\Phi(n)$ удовлетворяет соотношению (4) с некоторыми начальными условиями $(\Phi(0), \Phi(1))$.

Наиболее изученными и применяемыми в цифровой обработке видеоинформации являются дискретное преобразование Фурье, для которого формы (7) и (8) совпадают, а также дискретное преобразование Хартли и косинусное в форме (7). Это во многом определяется возможностью построения быстрых построчно-столбцовых алгоритмов вычисления $\hat{x}(m_1, m_2)$ (см. [4]). Такая ориентация выбора ДОП на существующие алгоритмические возможности является, на наш взгляд, не вполне оправданной. Мультипликативная сложность стандартного построчно-столбцового БПФ массива $N \times N$ равна сложности одномерного ДПФ длины $N^2$ [3], т. е. построчно-столбцовые алгоритмы, совершенно игнорируют двумерную природу преобразуемого сигнала. Отметим также, что для преобразований Фурье и Хартли известны алгоритмы, существенно учитывающие двумерность обрабатываемого сигнала $x(n_1, n_2)$ [3].

Ниже мы покажем, что преобразования (7) и (8), реализуемые в форме, аналогичной (5), обладают единым быстрым "квазиуниверсальным" алгоритмом вычисления спектров $\hat{x}(m_1, m_2)$.

Рассмотрим преобразование (8). Согласно [1] и [3] справедлив аналог равенства (5)

$$\hat{x}(m_1, m_2) = \sum_{n_1, n_2 = 0}^{N-1} x(n_1, n_2)\, \mathbf{e}\, \mathbf{W}^{m_1 n_1 + m_2 n_2}\, \mathbf{b}^t \tag{9}$$

с вектором $\mathbf{e} = (1, 1)$ и вектором $\mathbf{b}$, определяемым начальными условиями $(\Phi(0), \Phi(1))$. Для вычисления векторного ядра преобразования (9)

$$\mathbf{X}(m_1, m_2) = \sum_{n_1, n_2 = 0}^{N-1} x(n_1, n_2)\, \mathbf{e}\, \mathbf{W}^{m_1 n_1 + m_2 n_2}$$

можно воспользоваться подходящим аналогом быстрого преобразования Фурье: Райворда ( [3, с. 262] ), построчно-столбцовым или алгоритмом работы [5], требующим в 1,5— 2,5 раза меньше умножений, чем два других. Последующее умножение на вектор $\mathbf{b}^t$ требует существенно меньших вычислительных затрат и конкретизирует выбор преобразования (8).

Быстрое вычисление спектра $\hat{x}(m_1, m_2)$ преобразования (7) может быть реализовано, конечно, с помощью построчно-столбцового алгоритма, т.е. сведением к последовательному нахождению одномерных ДОП РБ

$$\hat{x}(m_1, m_2) = \sum_{n_1 = 0}^{N-1} \Phi(m_1, n_1) \left[ \sum_{n_2 = 0}^{N-1} x(n_1, n_2)\, \Phi(m_2, n_2) \right].$$

Однако, на наш взгляд, перспектива аппаратной реализации класса двумерных ДОП РБ требует построения общей схемы вычисления спектров преобразований (7) и (8).

### 3. Связь двумерных ДОП РБ с разделимым и неразделимым ядрами

Как известно [2], общее решение рекуррентного уравнения (4) имеет вид

$$\Phi(n) = C_1\, \omega^n + C_2\, \omega^n, \quad \omega = \exp\{2\pi i / N\},$$

где $C_1$ и $C_2$ — комплексные постоянные, определяемые однозначно начальными условиями ( $\Phi$ (0), $\Phi$ (1)). Поэтому базисные функции $\Phi(m_1 n_1 + m_2 n_2)$ преобразования (8) имеют вид

$$\Phi(m_1 n_1 + m_2 n_2) = C_1\, \omega^{m_1 n_1 + m_2 n_2} + C_2\, \omega^{-m_1 n_1 - m_2 n_2}. \tag{10}$$

Покажем возможность преобразования (8) к виду (7) с разделимым ядром. В самом деле,

$$\Phi(m_1 n_1)\, \Phi(m_2 n_2) = (A_1\, \omega^{m_1 n_1} + A_2\, \omega^{-m_1 n_1})(B_1\, \omega^{m_2 n_2} + B_2\, \omega^{-m_2 n_2}) \tag{11}$$

и константы $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} A_1 B_1 = C_1 , \\ A_2 B_2 = C_2 , \\ A_1 B_2 + A_2 B_1 = 0 , \end{cases}$$

откуда, например, $A_1 = B_1 = \sqrt{-C_1}$ , $A_2 = B_2 = \sqrt{C_2}$ ( выбирается главное значение комлексного квадратного корня ). Обратно, из (11) имеем

$$\Phi(m_1 n_1)\Phi(m_2 n_2) = (A_1 B_1 \omega^{m_1 n_1 + m_2 n_2} + A_2 B_2 \omega^{-m_1 n_1 - m_2 n_2}) +$$

$$+ (A_1 B_2 \omega^{m_1 n_1 - m_2 n_2} + A_2 B_1 \omega^{-m_1 n_1 + m_2 n_2}) ,$$

и, следовательно,

$$\hat{x}(m_1 , m_2) = \hat{x}_1^*(m_1 , m_2) + \hat{x}_2^*(m_1 , -m_2) ,$$

где значения $\hat{x}_j^*(m_1 , m_2)$ получаются согласно (8) с константами $C_i^{(j)}$ $(i , j = 1 , 2)$ в (10) равными

$$C_1^{(1)} = A_1 B_1 , \quad C_2^{(1)} = A_2 B_2 , \quad C_1^{(2)} = A_1 B_2 , \quad C_2^{(2)} = A_2 B_1 .$$

Таким образом, по желанию пользователя и в зависимости от аппаратных и алгоритмических ресурсов возможно вычисление как спектров преобразований (8) с неразделимым ядром по обычной построчно-столбцовой схеме, так и спектров преобразований (7) с разделимым ядром с использованием упомянутых выше более быстрых, но структурно более сложных двумерных алгоритмов.

## 5. Некоторые приложения ДОП РБ

Помимо традиционных задач обработки двумерной информации, где давно и успешно применяются ДОП, отметим два примера, в которых возможность гибкого выбора начальных условий ДОП РБ является эффективной и существенной.

*Пример 1.* Погрешность многих квадратурных и интерполяционных формул для функций двух переменных, построенных с помощью теоретико-числовых методов, определяется, согласно [5], величиной суммы $R(N)$ ( штрих означает отсутствие слагаемого с $m_1 = m_2 = 0$)

$$R(N) = \sum_{m_1 , m_2 = 0}^{N-1}{}' \hat{x}(m_1 , m_2)\sigma_N(a_1 m_1 + a_2 m_2) ,$$

где $a_1 , a_2$ — так называемые оптимальные коэффициенты. Величина $\sigma_N(u)$ определяется равенством

$$\sigma_N(u) = \begin{cases} 0\,, & u \neq 0 \pmod{N}\,, \\ 1\,, & u \equiv 0 \pmod{N}\,, \end{cases}$$

а $\hat{x}(m_1, m_2)$ — коэффициенты Фурье. При наличии априорной информации о порядке убывания этих коэффициентов в [5] получены практически неулучшаемые оценки для некоторых классов функций $x(n_1, n_2)$. Варьирование начальных условий ДОП РБ, а следовательно, и коэффициентов $\hat{x}(m_1, m_2)$ позволяет минимизировать $R(N)$ для функций $x(n_1, n_2)$ и в случае отсутствия теоретических оценок порядка убывания коэффициентов ДОП РБ.

*Пример 2*. Пусть преобразование последовательности отсчетов входного сигнала цифровым фильтром с конечной импульсной характеристикой описывается соотношением свертки

$$y(n) = \sum_{k=K}^{K+N-1} h(k)\,x(n-k)\,,$$

где $h(k)$ — импульсная характеристика фильтра, величина $K$ задает положение, а $N$ — размер "скользящего окна" обработки сигнала относительно формируемого отсчета. Аппроксимация импульсной характеристики функциями вида

$$h^*(k) = \sum_{m=0}^{r-1} a_m h_m(k)$$

в случае, когда каждая из функций $h_m(k)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению типа (3), позволяет реализовать КИХ-фильтры параллельно-рекурсивным образом [7]. Такая реализация дает значительный выигрыш в эффективности реализации и вычислительной сложности по сравнению с КИХ-фильтрами, реализуемыми в форме простой свертки.

Задача выбора функций $h_m(k)$ решается эвристически с учетом удобства программной или аппаратной реализации фильтра. Предложенная в [7] методика, особенно в двумерном случае, предполагает наличие достаточно обширного класса ДОП с рекуррентными соотношениями для базисных функций преобразований. Результаты данной работы как раз и описывают один из таких классов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Чернов В. М.*// 1 Всес. конф. "Распознавание образов и анализ изображений": Тезисы докл. Минск, 1991. Ч.1. С. 132—135.

2. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М., 1967.

3. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М., 1989.

4. *Ахмед Н., Рао К. Р.* Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М., 1989.

5. *Chernov V. M.* // Pattern Recogn. and Image Anal. 1991. Vol.1, N 4. P. 426—429.

6. *Коробов Н. М.* Теоретикочисловые методы в приближенном анализе. М., 1963.

7. *Сергеев В. В.* // Радиотехника. 1990. N 8. С. 38—41.

*Рукопись поступила 25.01.93*