УДК 681. 7. 06

Применение методов псевдогеометрической оптики для расчета полей от дифракционных оптических элементов / М. А. Голуб, Л. Л. Досколович, Н. Л. Казанский, В. А. Сойфер, С. И. Харитонов // Научное приборостроение. — 1993. —Т. 3. — N 1: Дифракционная плоская оптика и обработка изображений. — С. 43—51.

В статье рассмотрены поправки к геометрической оптике, основанные на уравнениях псевдогеометрической оптики. Показано, что структура волнового поля световой волны имеет геометрооптический характер даже вблизи фокальных точек. Предложен метод получения асимптотик для полей квазигауссовским распределением амплитуды плоскости $z = 0$.

На основе локально–гауссовской аппроксимации получены уравнения для псевдолучей и аналитические выражения для светового поля от фокусаторов гауссова пучка в отрезок. Библ. 6 назв. Ил. 2.

М. А. Голуб, Л. Л. Досколович, Н. Л. Казанский,
В. А. Сойфер, С. И. Харитонов
(Самарский филиал ЦКБ уникального приборостроения РАН)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ПСЕВДОГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ ДЛЯ РАСЧЕТА ПОЛЕЙ ОТ ДИФРАКЦИОННЫХ ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

The correction factors to the geometrical optics based on the equations of pseudo-geometrical optics have been considered. The structure of the light wave field is khown to be of geometrical optics character even in the vicinity of focal points. A method for computing the asymptotics for the fields with the quasi gaussian intonoity distribution in the optical element plane has been proposed. Using a local-gaussian approximation the equations for the pseudo-rays and the analytical expressions describing the light field from the focusator of the gaussian beam into a straight-line segment have been obtained.

Введение

В приближении геометрической оптики уравнения, описывающие поведение комплексной амплитуды в пространстве, имеют вид [1]

$$|\Delta\Psi(x, y, z)|^2 = 1 ,$$

$$\operatorname{div}(A^2(x, y, z)\,\Delta\Psi(x, y, z)) = 0,$$

где $A(x, y, z)$ и $\Psi(x, y, z)$ — амплитуда и эйконал световой волны. Анализируя уравнение эйконала, мы видим, что в него не входит функция $A(x, y, z)$. Это приводит к тому, что распределение фазы световой волны во всем пространстве обусловлено лишь начальным распределением фазы на некоторой двумерной поверхности и не зависит от начального распределения амплитуды. Независимость амплитуды и фазы составляет сущность геометрической оптики. В действительности эта связь существует и именно она приводит к возникновению дифракционных эффектов в окрестности каустических поверхностей и фокальных точек.

В данной статье рассмотрим поправки к геометрической оптике. Анализируя полученные уравнения, мы увидим, что структура волнового поля световой волны имеет геометрооптический характер даже вблизи фокальных точек. С учетом этих поправок будут получены аналитические выражения для светового поля от фокусаторов гауссова пучка в отрезок.

Основные уравнения псевдогеометрической оптики

Пусть световая волна с комплексной амплитудой $E(x, y, z)$ распространяется вдоль оси z декартовой системы координат; $E(x, y, z)$ подчиняется уравнению Гельмгольца [1]

$$\Delta E(x, y, z) + k^2 E(x, y, z) = 0 .$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны.

Представим комплексную амплитуду светового пучка в виде

$$E(x, y, z) = A(x, y, z) \exp(i k \Psi(x, y, z)) .$$

Подставляя это выражение в уравнение Гельмгольца, получим систему уравнений относительно модуля комплексной амплитуды $A(x, y, z)$ и фазы $k\Psi(x, y, z)$ (по аналогии с [2])

$$|\Delta\Psi(x, y, z)|^2 = 1 + \frac{\Delta A(x, y, z)}{k^2 A(x, y, z)},$$
$$\operatorname{div}(A^2(x, y, z)\Delta\Psi(x, y, z)) = 0 . \tag{1}$$

Первое уравнение можно рассматривать как обобщенное уравнение эйконала. Однако, в отличие от геометрооптического случая, в него входит модуль комплексной амплитуды. Следует отметить, что при $\Delta A/(k^2 A) << 1$ (1) переходит в обычное уравнение эйконала. Второе уравнение представляет собой дифференциальную форму закона сохранения энергии.

Для дальнейшего анализа системы уравнений (1) введем понятие псевдолучей и псевдолучевых трубок. Псевдолуч —это линия, касательная к которой совпадает с направлением вектора $\Delta\Psi(x, y, z)$. Псевдолучевая трубка — это поверхность, состоящая из псевдолучей.

Исходя из уравнения (1), можно записать закон сохранения светового потока в псевдолучевых трубках

$$\int A^2(u, v)\vec{\Delta}\Psi(u, v)\, d\,\mathbf{S} = \int A^2(x, y)\vec{\Delta}\Psi(x, y)\, d\,\mathbf{S} .$$

(в геометрооптическом случае закон сохранения светового потока имел вид

$$\int A^2(u, v)\vec{\tau} d\,\mathbf{S} = \int A^2(x, y)\vec{\tau} d\,\mathbf{S} ,$$

где $\vec{\tau}$ — направление геометрооптического луча).

Из приведенного выше анализа системы уравнений следует,что световое поле подчиняется уравнениям, похожим по внешнему виду на уравнения, используемые в геометрической оптике неоднородных сред [3]. Далее более детально рассмотрим уравнение псевдоэйконала

$$|\Delta\Psi(x, y, z)|^2 = \overline{U}(x, y, z) ,$$

где $\overline{U}(x, y, z) = 1 + \dfrac{\Delta A(x, y, z)}{k^2 A(x, y, z)}$.

Предположим,что функция $\overline{U}(x, y, z)$ нам известна (например, из решения задачи в геометрооптическом приближении). Из общей теории дифференциальных уравнений в частных производных известно,что уравнения для характеристик (в нашем случае характеристики есть не что иное, как псевдолучи) имеют следующий вид [4]:

$$\frac{d\,x}{d\,s} = 2\,p\,, \quad \frac{d\,p}{d\,s} = \Delta U\,, \quad \frac{d\,\Psi}{d\,s} = 2\,p^2\,.$$

Начальные условия для характеристической системы находятся из условия

$$\frac{\partial\,\Psi(u,\,v)}{\partial\,u} = p_x^0 \qquad x\,(0) = u\,,$$

$$\frac{\partial\,\Psi(u,\,v)}{\partial\,v} = p_y^0 \qquad y\,(0) = v\,,$$

$$(\,p_x^0)^2 + (\,p_y^0)^2 + (\,p_z^0)^2 - \overline{U}\,(u,\,v,\,0) = 0\,.$$

Здесь (u,v) — декартовые координаты в плоскости $z = 0$, $\Psi(u,\,v)$ — распределение фазы в плоскости $z = 0$. Вектор $(\,p_x\,,\ p_y\,,\ p_z\,)$ определяет направление псевдолуча в трехмерном пространстве.

Систему уравнений первого порядка можно свести к системе уравнений второго порядка, определяющих траектории псевдолучей и одного уравнения первого порядка для нахождения фазы вдоль псевдогеометрического луча

$$\frac{d^2\,x}{d\,s^2} = -\,\Delta\,U\,(x)\,,$$

где $U\,(x) = -\,2\,\overline{U}(x)$;

$$\frac{d\,\Psi}{d\,s} = 0{,}5\,\left[\frac{d\,x}{d\,s}\right]^2. \tag{2}$$

Анализируя уравнения (2), мы видим, что они похожи на уравнения движения классической частицы в консервативном поле с потенциальной энергией $U(x)$ [5].

По аналогии с классической механикой можно ввести силу, действующую на частицу: $F = \Delta\,U\,(x)$. В геометрооптическом случае $F = 0$, следовательно, и траектории движения свободной частицы есть прямые линии. В общем случае траектории представляют собой кривые. В окрестности фокальных точек или каустик, напротив, траектории псевдолучей наиболее сильно отличаются от прямой линии, так как в этом случае мы не можем пренебречь величиной $\Delta A\,/\,k^2\,A$. Фокальная точка является отталкивающим центром. Наличие последнего приводит к тому ,что псевдолучи не пересекаются в одной точке(в геометрической оптике все лучи пересекаются в фокальной точке) и интенсивность не обращается в бесконечность. Подставляя в уравнение переноса $\Psi\,(x,\,y,\,z)$ и решая его, можно получить выражение для $A\,(x,\,y,\,z)$

$$A^2\,(x,\,y) = \frac{A^2\,(u,\,v)\,|\,\Delta\Psi(u,\,v)\,|\,\tau_z\,(u,\,v)}{|\,\Delta\Psi(x,\,y)\,|\,\tau_z\,(x,\,y)\,J\,(u,\,v)}\,.$$

Здесь (u,v) —декартовые координаты в плоскости $z=0$, (x,y) — декартовые координаты в плоскости $z=0$, (x,y) связаны с (u,v) уравнением псевдолуча следующим образом:

$$x = x(u, v, z_0) \qquad u = x(u, v, 0),$$
$$y = y(u, v, z_0) \qquad v = y(u, v, 0),$$

$J(u, v) = | x_u y_v - y_u x_v |$ — якобиан преобразования от переменных (x, y) к переменным (u,v).

Параксиальное приближение для уравнений псевдогеометрической оптики

В параксиальном приближении распространение комплексной амплитуды световой волны описывается параболическим уравнением [2]

$$2 i k \frac{\partial E(x, y, z)}{\partial z} + \Delta_{xy} E(x, y, z) = 0 .$$

Соответствующие псевдогеометрооптические уравнения имеют вид [2]

$$2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} + | \Delta \Psi(x, y, z) |^2 = \frac{\Delta A(x, y, z)}{k^2 A(x, y, z)},$$
$$\operatorname{div} (A^2(x, y, z) \vec{\tau}_1 (x, y, z)) = 0 , \tag{3}$$

где $\vec{\tau}_1$ — вектор с компонентами

$$\vec{\tau}_1 = \left[1, \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right].$$

Псевдолучи описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 x}{d s^2} = 2 \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2 y}{d s^2} = 2 \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d z}{d s} = 2 .$$

Решая уравнение псевдоэйконала (3) и подставляя его в уравнение переноса, получим выражение для интенсивности

$$A^2(x, y) = \frac{A^2(u, v)}{| x_u y_v - y_u x_v |},$$

где (x, y) связаны с (u, v) уравнениями псевдолуча так:

$$x = x(u, v, s), \quad y = y(u, v, s), \quad z = z(u, v, s).$$

Рассмотрим в качестве примера распространение одномерного гауссова пучка и найдем уравнения псевдолучей. Распространение Гауссова пучка описывается следующим выражением [2]:

$$A = \frac{A_0}{\left[\left(1 - \frac{z}{R}\right)^2 + D^2\right]^{1/4}} \exp\left[\frac{-x^2/a^2}{\left[\left(1 - \frac{z}{R}\right)^2 + D^2\right]}\right].$$

Дифференциальное уравнение, описывающее траекториии псевдолучей, приобретает вид

$$\frac{d^2 x}{d z^2} = \frac{x}{\left[\frac{ka_{\min}^2}{2}\right]^2 \left[1 + \left[\frac{2}{ka_{\min}^2}\right]^2 (z - z_p)^2\right]^2},$$

где $a_{\min}^2 = \dfrac{a^2}{1 + \left[\dfrac{ka^2}{2R}\right]^2}$ — минимальная ширина пучка, $z_p = \dfrac{1}{R\left[\dfrac{1}{R^2} + \left[\dfrac{2}{ka^2}\right]^2\right]^2}$ — положение перетяжки.

Решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = 0$, $x'(z - z_p) = 0$ имеет вид гиперболы [6]

$$x(z) = u\left[\left(\frac{2(z - z_p)}{ka_{\min}^2}\right)^2 + 1\right]^{1/2} \left[\left(\frac{2 z_p}{ka_{\min}^2}\right)^2 + 1\right]^{-1/2}.$$

Дифракция квазигауссовских пучков

Рассмотрим задачу о дифракции квазигауссовского пучка, т. е. пучка, форма которого не сильно отличается от гауссовского. В этом случае амплитуду можно представить в виде

$$A(x, z) = (1 + \varepsilon(x, z))\,\Gamma(x, z),$$

где $\varepsilon << 1$, $\varepsilon_x = \varepsilon_{xx} = 0$, а

$$\Gamma(x, z) = \frac{A_0}{\left[\left(1 - \frac{z}{R}\right)^2 + D^2\right]^{1/4}} \exp\left[\frac{-x^2/a^2}{\left[\left(1 - \frac{z}{R}\right)^2 + D^2\right]}\right]$$

— описывает амплитуду гауссова пучка.

Уравнения псевдоэйконала и обобщенный закон сохранения светового потока в случае дифракции квазигауссова пучка приближенно можно записать следующим образом:

$$2\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\left[\frac{\partial\Psi(x,z)}{\partial x}\right]^2=\frac{\Gamma''(x,z)}{k^2\,\Gamma(x,z)},$$

$$\operatorname{div}\left(A^2(x,z)\,\tau_1(x,z)\right)=0\,.$$

Анализируя систему уравнений, мы видим, что если отличия пучка от гауссова не слишком велики, уравнение псевдоэйконала (а значит, и уравнение псевдолуча) остается неизменным. Однако, как показывает вычислительный эксперимент, предложенный метод хорошо работает только в случае незначительного отклонения исходного пучка от гауссова. Другой метод получения асимптотических разложений на основе уравнений псевдогеометрической оптики состоит в замене правой части в уравнении псевдоэйконала на выражение, полученное из геометрической оптики [1, 2]. Этот подход справедлив не только для квазигауссовских пучков, однако в этом случае возникают значительные трудности, связанные с решением системы уравнений для псевдолучей. Кроме того, в приближении геометрической оптики мы не можем получить решение в области, недоступной для геометрооптических лучей, а также в области, близкой к каустическим и к фокальным точкам. Учитывая вышеупомянутые трудности, в данной работе предлагается метод получения асимтотических разложений для пучков, имеющих при $z=0$ гауссовское распределение по интенсивности.

Пусть при $z=0$ распределение комплексной амплитуды имеет вид

$$E_0(u)=\exp\left[-\frac{u^2}{a^2}+i\,k\,\varphi(u)\right].$$

В окрестности любой точки на фокусаторе пучок можно представить локально гауссовым

$$E_0(u)=\exp\left[-\frac{u^2}{a^2}+i\,k\left[\gamma(u_0)\,u-\frac{u^2}{2\,R(u_2)}\right]\right],$$

где $\gamma(u_0)=[\varphi'(u_0)-\varphi''(u_0)\,u_0]$, $R(u_0)=1/\varphi''(u_0)$.

Псевдолуч, выходящий из точки на фокусаторе, описывается выражением

$$x(z)=u\left[\left[\frac{2\,(z-z_p)}{k\,a^2_{\min}}\right]^2+1\right]^{1/2}\left[\left[\frac{2\,z_p}{k\,a^2_{\min}}\right]^2+1\right]^{-1/2}+\gamma z\,. \qquad (4)$$

Здесь

$$a_{\min}=a^2_{\min}(u)=\frac{a^2}{1+\left[\dfrac{k\,a^2}{2\,R(u)}\right]^2},\quad z_p=z_p(u)=\frac{1}{R(u)\left[\dfrac{1}{R^2(u)}+\left[\dfrac{2}{k\,a^2}\right]^2\right]^2}.$$

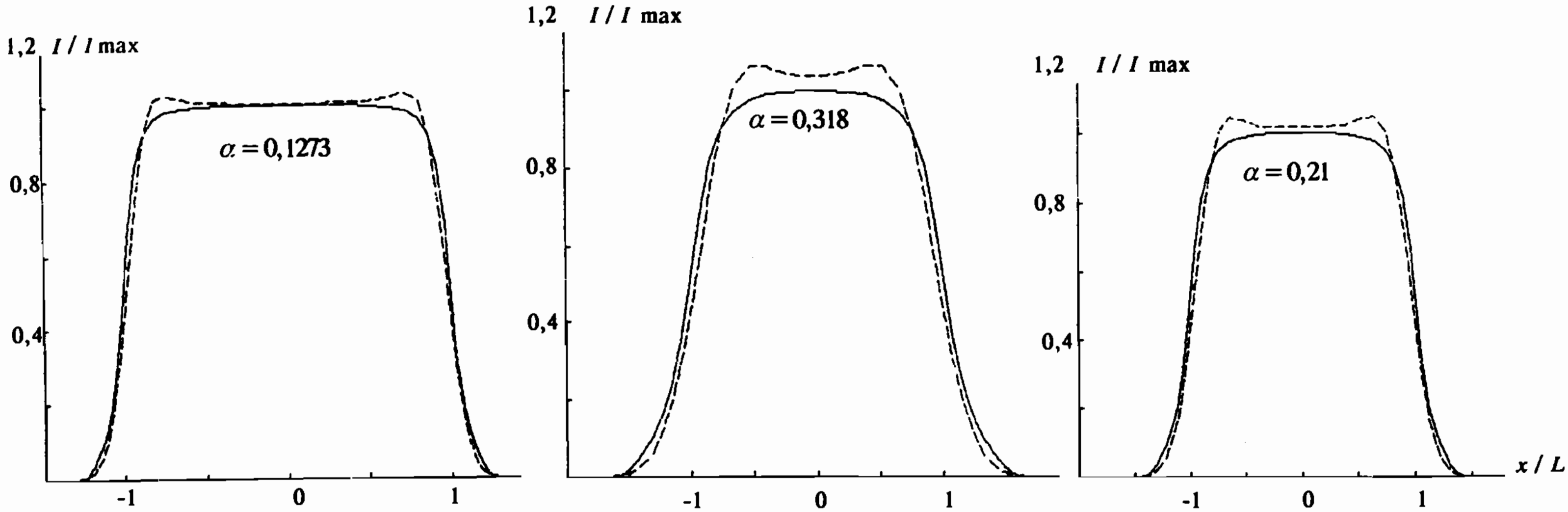

Рис. 1. Распределение интенсивности от фокусатора гауссова пучка в отрезок, полученное с помощью асимптотических методов (непрерывная кривая) и с помощью непосредственного вычисления интеграла Кирхгофа (пунктирная кривая) при различных значениях $\lambda f / (\pi a L)$, где λ — длина волны, f — расстояние от элемента до плоскости фокусировки, L — длина фокального отрезка.

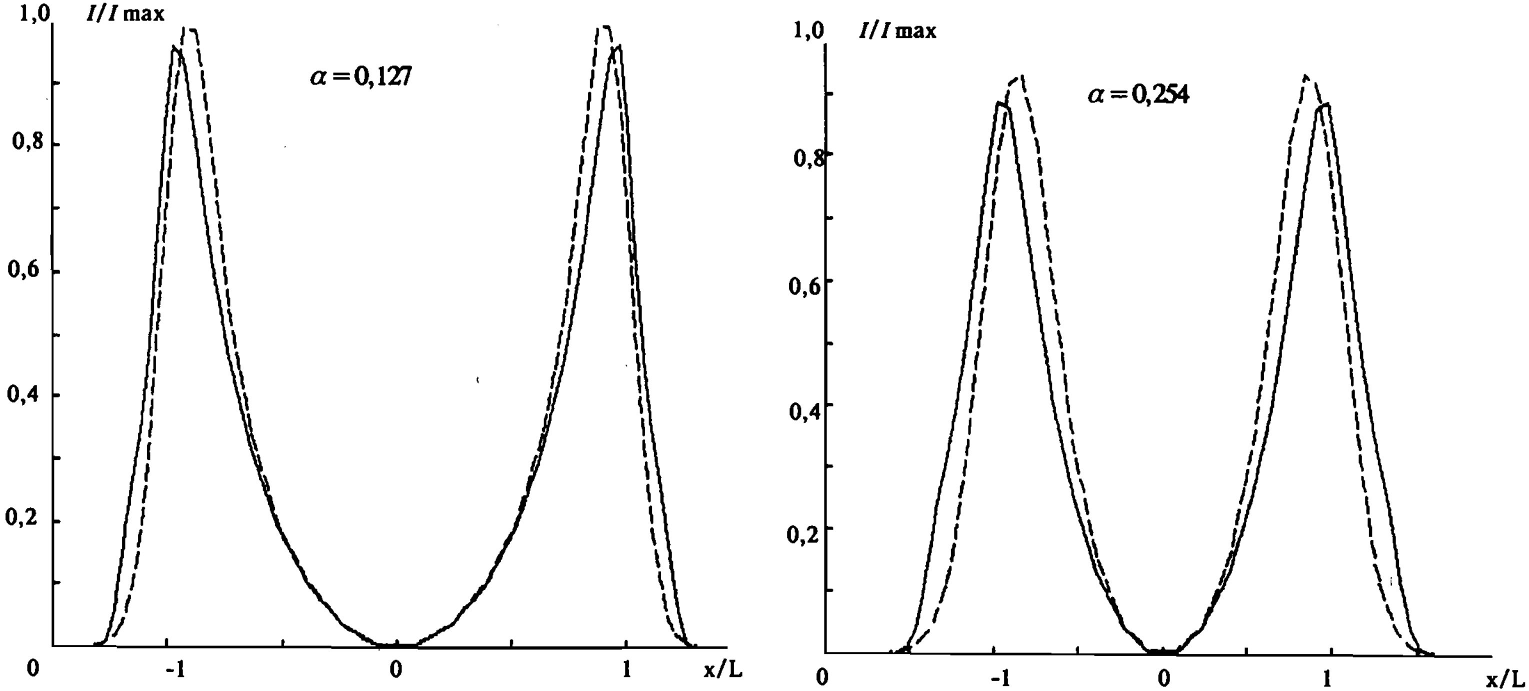

Рис. 2. Распределение интенсивности от фокусатора гауссова пучка в отрезок при освещении первой модой Гаусса—Эрмита, полученное с помощью асимптотических методов (непрерывная кривая) и с помощью непосредственного вычисления интеграла Кирхгофа (пунктирная кривая) при различных значениях $\lambda f/(\pi a L)$, где λ — длина волны, f — расстояние от элемента до плоскости фокусировки, L — длина фокального отрезка.

Далее, используя уравнения псевдолучей и (4), получим выражение для интенсивности в любой точке пространства. В качестве примера было рассчитано распределение интенсивности от цилиндрического фокусатора в отрезок. Для сравнения на рис. 1 приведен также результат, полученный с помощью численного расчета соответствующего интеграла Кирхгофа. Изложенный метод справедлив также в случае освещения фокусатора модами Гаусса—Эрмита. На рис. 2 приведены результаты расчета интенсивности от фокусатора в отрезок (как и в предыдущем примере) при освещении первой модой Гаусса—Эрмита.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М., 1973.

2. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. М., 1979.

3. *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М., 1980.

4. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., 1969.

5. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М., 1974.

6. *Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З.* Основы теории дифракции. М., 1979.

Рукопись поступила 25.01.93