УДК 537.2

Диод Пирса с частичной нейтрализацией заряда / А. Л. Санин // Научное приборостроение.-1992.-Т.2.-N 2.-С. 30-36.

Рассматривается динамика электронов в плоско-параллельном диоде с нейтрализующим зарядом. Найдены точные решения уравнений движения, электрического поля и граничных условий. Анализируются пространственно-периодические свойства решений для частично нейтрализованного потока электронов. Установлены условия, при которых самосогласованное электрическое поле на эмиттере диода равно нулю. Библ. - 6 назв.

А. Л. Санин
(Государственный технический университет, С.-Петербург)

ДИОД ПИРСА С ЧАСТИЧНОЙ НЕЙТРАЛИЗАЦИЕЙ ЗАРЯДА

Плоский электронный диод представляет собой модель ограниченной динамической системы. Изучение ее продолжается в настоящее время и необходимо для разработок различных приборов. В научной литературе рассматриваются вакуумный и плазменный диоды, например, [1-5].

В вакуумном диоде отсутствует найтрализующая среда положительных ионов, и поток электронов является нейтрализованным. Для простой модели полагаем, что скорость электронов в плоскости эмиттера равна нулю; на коллекторе, если приложено напряжение внешнего источника, отлична от нуля. Зависимость переменных от координаты является монотонной, поскольку имеет место закон "3/2". В плазменном диоде электроны транспортируются в нейтрализующей среде положительных ионов. При этом возможна полная или частичная нейтрализация электронного заряда ионами.

Классический диод Пирса является примером плазменного диода. В диоде Пирса электроны транспортируются без столкновений в пространстве между эмиттером и коллектором, которое заполнено неподвижными ионами с однородной плотностью n_i. Электроны покидают эмиттер с постоянными плотностью $n_в$ и скоростью $v_в$. Эмиттер и коллектор являются короткозамкнутыми, т. е. оба электрода поддерживаются при одном и том же потенциале.

Более сложные модели содержат элементы внешней цепи, источники напряжения и т. д. В работах [3, 4] исследованы нелинейные стационарные режимы движения электронов, когда в плоскости эмиттера $n_в$ равна плотности ионов n_i. Это равенство выражает локальную нейтрализацию в плоскости эмиттера. Для определенных длин диода поле в плоскости эмиттера $\mathcal{E}_в$ равно нулю, а плотность электронов n в каждой точке равна n_i. Состояние потока электронов будет однородным и нейтрализованным. Если же $\mathcal{E}_в$ не равно нулю, то возможно периодически неоднородное состояние. Плотность электронов периодически зависит от координаты. В действительности $n_в$ и n_i могут быть разными, например, $n_i < n_в$. Частичная нейтрализация заряда имеет место в плоскости эмиттера и в межэлектродном пространстве диода.

Модель нейтрализованного потока электронов

Динамика электронов в стационарном режиме для одномерного плоского диода при отсутствии среды нейтрализующих ионов определяется уравнением движения

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{e}{m}E, \qquad (1)$$

где $-e$, m — заряд и масса электрона;
выражением плотности тока

$$J = -env, \tag{2}$$

уравнением Максвелла для электрического поля

$$\frac{dE}{dx} = -4\pi en \tag{3}$$

и граничными условиями: плотностью тока $J_в$, скоростью $v_в = 0$ в плоскости эмиттера, электрическим полем $\mathcal{E}_в$ и уравнением для разности потенциалов

$$\int_0^L Edx = -\varphi_к, \tag{4}$$

где x — координата.

Разность потенциалов $\varphi_к$ на диоде обусловлена внешним источником напряжения и определяет конечную скорость электронов $v_к$ на коллекторе, при этом плотность электронов на нем $n_к$.

Уравнение непрерывности можно представить в следующем виде:

$$nv = n_к v_к. \tag{5}$$

В любой точке межэлектродного пространства плотность потока одна и та же. Если между электродами электроны отсутствуют, а разница потенциалов $\varphi_к$, то электрическое поле в диоде будет однородным и равно

$$E_l = -\varphi_к/L,$$

где L — расстояние между эмиттером и коллектором.

E_l определяется внешним источником. Величины и уравнения (1)—(5) нормируются на значения n, v в плоскости $x = L$, т. е. на значения $n_к$, $v_к$ в плоскости коллектора. Это приводит к нормированным величинам скорости V, плотности электронов N, электрического поля $\mathcal{E}$ и разности потенциалов $U_к$ как $V = v/v_к$, $N = n/n_к$, $\mathcal{E} = E/E_\delta$,$U_к = \varphi_к/\varphi_\delta$. При этом $E_\delta = 4\pi en_к/к_р$, $\varphi_\delta = E_\delta/к_р$, $к_р = \omega_р/v_к$, $\omega_р = (4\pi e^2 n_к/m)^{1/2}$, $\zeta = к_р X$. Нормированное граничное поле в плоскости эмиттера обозначим $\mathcal{E}_в$, а однородное поле в диоде при отсутствии электронов в нем $\mathcal{E}_l$. Используя определение для скорости $dx/dt = v$, удобно перейти в уравнениях (1)—(5) от пространственной координаты x к временному параметру t. При этом введем нормированное время $\tau = \omega_р t$, $V = d\zeta/d\tau$. Теперь уравнения примут вид

$$\frac{dV}{d\tau} = -\mathcal{E},\ NV = 1,\ \frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = -1, \tag{6}$$

а граничное условие (4) перейдет в уравнение

$$\int_0^{\tau_L} V d\tau = -U_\text{к}, \tag{7}$$

где τ_L — время, необходимое для транспортировки электрона от плоскости эмиттера до плоскости коллектора. Используя первое и третье уравнения системы (6), получаем уравнение для скорости

$$d^2V/d\tau^2 = 1. \tag{8}$$

Двухкратное интегрирование уравнения (8) дает решение для скорости в следующем виде:

$$V = 1/2\,\tau^2 + A\tau + B. \tag{9}$$

Произвольные постоянные A и B могут быть найдены из условий для $V = 0$, $dV/d\tau = -\mathcal{E}_\text{в}$ в плоскости эмиттера при $\tau = 0$. В результате решение (9) имеет вид:

$$V = 1/2\,\tau^2 - \mathcal{E}_\text{в}\tau. \tag{10}$$

Используя первое уравнение системы (6) и (10), получаем следующее выражение для электрического поля:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\text{в} - \tau. \tag{11}$$

Подставляя в уравнение (7) выражения (10), (11) и выполняя интегрирование, находим соотношение:

$$\frac{1}{2}\,\mathcal{E}_\text{в}\,\tau_L^3 - \frac{1}{2}\,\mathcal{E}_\text{в}^2\,\tau_L^2 - \frac{1}{8}\,\tau_L^4 = -U_\text{к}. \tag{12}$$

Интегрируя выражение (10) по величине τ, получаем соотношение между ζ_L и τ_L в следующем виде:

$$\zeta_L = \frac{1}{6}\,\tau_L^3 - \frac{1}{2}\;{}_\text{в}\,\tau_L^2. \tag{13}$$

Используя соотношение (13), исключаем в выражении (12) либо ζ_L, либо τ_L. По теореме о среднем значении функции $\mathcal{E}(\zeta)$ на интервале $[0, \zeta_L]$ в формуле (12) $-U_\text{к}$ заменяем на $\mathcal{E}_l\zeta_L$ и получаем нелинейное соотношение между $\mathcal{E}_\text{в}$ и $\mathcal{E}_l$. Электрическое поле на эмиттере $\mathcal{E}_\text{в}$ равно нулю при условий

$$\mathcal{E}_l = -\frac{3}{4}\,\tau_L. \tag{14}$$

С другой стороны, для $\mathcal{E}_\text{в}$ условие экстремума $d\mathcal{E}_\text{в}/d\tau_L = 0$ имеет место также при выполнении соотношения (14), при этом $d^2\mathcal{E}_\text{в}/d\tau_L^2 = -3/2\,\mathcal{E}_l^2 < 0$, а само экстремальное значение $\mathcal{E}_\text{в} = 0$. Это означает, что обычно принимаемое

$\mathcal{E}'_в = 0$ на эмиттере возможно только в экстремальном случае. Из условия (14) следует связь между $U_к$ и ζ_L в виде $U_к^{3/2}/\zeta_L^2 = 9\sqrt{2}/8$, которая выражает закон "3/2".В остальных случаях $\mathcal{E}_в < 0$, а связь между $U_к$ и ζ_L определяется как

$$\frac{1}{3}\left(\sqrt{U}+\frac{\sqrt{2}}{4}\mathcal{E}_в^2\right)^{1/2}\left(\sqrt{U}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{E}_в^2\right)+\frac{2^{-5/4}}{3}\mathcal{E}_в^3=\frac{\zeta}{2^{5/4}}.$$

Частичная нейтрализация заряда

Характер решений для электронного потока изменяется, если нейтрализующий заряд вводится в межэлектродное пространство. Полагаем, что плотность нейтрализующего однородного заряда есть n_i, а электроны покидают эмиттер с плотностью $n_в$ и скоростью направленного движения $v_в$. Теперь в уравнение Максвелла для электрического поля добавится слагаемое $4\pi e n_i$, а уравнение непрерывности представим в виде $n_в v_в = nv$. В отличие от предыдущего случая нормирование проводится с помощью $n_в$, $v_в$. Уравнения для электронов принимают следующий вид:

$$dV/d\tau = -\mathcal{E},\ NV = 1,\ d\mathcal{E}/d\tau = (-N+\gamma)\,V, \tag{15}$$

где $\gamma = n_i/n_в$— параметр нейтрализации.

Граничное условие (7) сохраняет свой прежний вид. Из уравнений (15) можно получить уравнение для скорости

$$\frac{d^2V}{d\tau^2}+\gamma V = 1. \tag{16}$$

Используя условия при $\tau = 0$, $V = 1$, $dV/d\tau = -\mathcal{E}_в$, получим решение (16) в виде

$$V = \gamma^{-1} + (1-\gamma^{-1})\cos\gamma^{1/2}\tau - \gamma^{-1/2}\mathcal{E}_в\sin\gamma^{1/2}\tau. \tag{17}$$

Интегрируя (17) по τ, получаем для ζ_L выражение

$$\zeta_L = \gamma^{-1}\tau_L + (1-\gamma^{-1})\gamma^{-1/2}\sin\gamma^{1/2}\tau_L + \mathcal{E}_в\gamma^{-1}(\cos\gamma^{1/2}\tau_L - 1). \tag{18}$$

Подставляя решение для скорости (17) в первое уравнение системы (15), найдем электрическое поле

$$\mathcal{E} = (1-\gamma^{-1})\gamma^{1/2}\sin\gamma^{1/2}\tau + \mathcal{E}_в\cos\gamma^{1/2}\tau. \tag{19}$$

Выражение для электрического поля $\mathcal{E}$ состоит из двух слагаемых: первое определяется условием частичной нейтрализации, а второе — наличием электрического поля в плоскости эмиттера $\zeta = 0$. Если в плоскости эмиттера имеет место локальная нейтрализация ($\gamma = 1$), то электрическое поле в межэлектродном пространстве зависит лишь от $\mathcal{E}_{\text{в}}$. Используя первое уравнение системы (15) для замены $\mathcal{E}$ в граничном условии (7), можно получить уравнение для разницы потенциалов в виде

$$\int_0^{\tau_L} d\left(\frac{1}{2}V^2\right) = U_{\text{к}}. \tag{20}$$

С другой стороны, явный вид зависимости $U_{\text{к}} = U_{\text{к}}(\mathcal{E}_{\text{в}})$, учитывающей емкостные свойства диода, необходим для полностью согласованной задачи. Емкостные свойства диода с электронным потоком обсуждаются и моделируются численно в работе [4].

$$\gamma^{-1}(1-\gamma^{-1})(1-\cos\gamma^{1/2}\tau_L) + [(1-\gamma^{-1})^2 - \gamma^{-1}\mathcal{E}_{\text{в}}^2]\,\frac{1}{2}\sin^2\gamma^{1/2}\tau_L +$$
$$+\mathcal{E}_{\text{в}}(1-\gamma^{-1})\frac{1}{2}\gamma^{-1/2}\sin 2\gamma^{1/2}\tau_L + \mathcal{E}_{\text{в}}\gamma^{-3/2}\sin\gamma^{1/2}\tau_L = -U_{\text{к}}. \tag{21}$$

Таким образом, уравнение (21) определяет связь между $\mathcal{E}_{\text{в}}$ и $U_{\text{к}}$ в параметрической форме. Исключение параметра τ из соотношений (18), (21) позволяет выразить $\mathcal{E}_{\text{в}}$ через ζ_L. В частном случае, когда $\gamma = 1$, т. е. имеет место локальная нейтрализация заряда в плоскости эмиттера, из (21) и (18) следует

$$-\frac{1}{2}\,{}_{\text{в}}\sin^2\tau_L + \mathcal{E}_{\text{в}}\sin\tau_L = -U_{\text{к}}, \tag{22}$$

$$\zeta_L = \tau_L + \mathcal{E}_{\text{в}}(\cos\tau_L - 1). \tag{23}$$

Для короткозамкнутого диода $U_{\text{к}} = 0$ и соотношение (22) преобразуется в произведение трех множителей, равное нулю:

$$\left(-\frac{1}{2}\mathcal{E}_{\text{в}}\sin\tau_L + 1\right)\mathcal{E}_{\text{в}}\sin\tau_L = 0. \tag{24}$$

Эти частные результаты согласуются с работой [4], отличие определяется нормированием величин. Ограничимся динамическими режимами, когда $V \geq 0$. Из выражения (17) при $\gamma = 1$ следует, что $V \geq 0$ при $|\mathcal{E}_{\text{в}}| \leq 1$. Поэтому из рассматриваемого уравнения исключается $-\frac{1}{2}\mathcal{E}_{\text{в}}\sin\tau_L + 1 = 0$, которое ведет к $V(\zeta_L) = -1$. Из формул (23), (24) следует, что возможны решения с $\mathcal{E}_{\text{в}} = 0$, $\zeta_L = \tau_L$. Решения уравнения $\sin\tau_L = 0$ при условии (23) различны. Если $\tau_L = 2k\pi$, k — целое, то из условия (23) следует, что $\mathcal{E}_{\text{в}}$ неопределенное. Для $V \geq 0$ ограничим $|\mathcal{E}_{\text{в}}| \leq 1$. Если $\tau_L = (2k+1)\pi$, то из условия (23) следует, что

$$\mathcal{E}_{\text{в}} = \frac{1}{2}(2k+1)\pi - \frac{1}{2}\zeta_L. \tag{25}$$

Величина $\mathcal{E}_{\text{в}} = 0$ при $\zeta_L^{(p)} = (2k+1)\pi$, а в точках $\zeta_L = (2k+1)\pi \pm 2$ величина $\mathcal{E}_{\text{в}} = \mp 1$, соответственно. Характер зависимости $\mathcal{E}_{\text{в}}$ от ζ_L повторяется через 2π для всех целых k. Подбирая длину промежутка ζ_L, можно управлять величиной $\mathcal{E}_{\text{в}}$. Заметим, что нормированная длина ζ_L совпадает с параметром Пирса, а величина 2π при $\gamma = 1$ определяет пространственный период стационарных колебаний [6]. Поэтому, например, $\zeta_L^{(p)}$ означает, что на длине L укладывается нечетное число $(2k+1)$ полупериодов π стационарных колебаний. Для этого частного случая имеет место нейтрализация заряда в каждой точке и однородное состояние. Численное моделирование емкостных свойств, проведенное в работе [4], модифицирует решения для короткозамкнутого диода, например, зависимость $\mathcal{E}_{\text{в}}(\zeta)$.

Если же $\gamma \neq 1$, то динамика электронов и самосогласованное электрическое поле $\mathcal{E}_{\text{в}}$ определяются из соотношений (17)— (19), (21). Изучение пространственных колебаний, проведенное в работе [6], показывает, что величины V, N, $\mathcal{E}$ есть функции от $\gamma^{3/2}\zeta$, а пространственный период равен $2\pi/\gamma^{3/2}$. Временные зависимости V, N, $\mathcal{E}$ есть функции от $\gamma^{1/2}\tau$. Так как периодические процессы определяют динамику электронов и $\mathcal{E}_{\text{в}}$ как для $\gamma = 1$, так и для $\gamma \neq 1$, то рассмотрим решения для значений

$$\gamma^{1/2}\tau_L = (2k+1)\pi . \tag{26}$$

Подставляя (26) в (21), получаем следующее условие:

$$2\gamma^{-1}(1-\gamma^{-1}) = -U_{\text{к}}, \tag{27}$$

при котором выражение (26) удовлетворяет (21).

Подстановка (26) в (18) дает выражение самосогласованного электрического поля $\mathcal{E}_{\text{в}}$ на эмиттере:

$$\gamma^{1/2}\mathcal{E} = \frac{1}{2}(2k+1)\pi - \frac{\gamma^{3/2}}{2}\xi_L, \tag{28}$$

при этом соблюдается условие (27).

Если сопоставить (25) с (28), то можно отметить масштабное преобразование: $\mathcal{E}_{\text{в}} \to \gamma^{1/2}\mathcal{E}_{\text{в}}$, $\zeta_L \to \gamma^{3/2}\zeta_L$. В предельном случае, когда $\gamma \to 1$, выражение (28) переходит в (25). Электрическое поле $\mathcal{E}_{\text{в}}$ равно нулю для $\zeta_L^{(p)}$, удовлетворяющих условию

$$\gamma^{3/2}\zeta_L^{(p)} = (2k+1)\pi . \tag{29}$$

Другими словами, длина $\zeta_L^{(p)}$, определяемая (29), равна нечетному числу полупериодов $\pi/\gamma^{3/2}$ пространственных колебаний. При этом из (17) следует, что

$$V = \gamma^{-1} + (1-\gamma^{-1})\cos\gamma^{1/2}\tau, \tag{30}$$

а из выражения (19)

$$\mathcal{E}=(1-\gamma^{-1})\gamma^{-1/2}\sin\gamma^{1/2}\tau. \qquad (31)$$

Для того, чтобы величина V не изменяла знак, необходимо выполнение условия $\gamma \le 2$. Как видно из выражений (30), (31), периодические решения имеют место при $\mathcal{E}_{\text{в}} = 0$; они обусловлены тем, что $\gamma \ne 1$, т. е. эффектом частичной нейтрализации заряда. Если $\zeta_L \ne \zeta_L^{(p)}$, то $\mathcal{E}_{\text{в}} \ne 0$; оба слагаемых в решении (19) одновременно отличны от нуля и выражают пространственные колебания. Если $\gamma \to 0$, то необходимо перейти к модели диода без нейтрализующего заряда, но с граничным условием $V = 1$. Данное исследование проведено в рамках существующих гидродинамических моделей диода и для однородного распределения ионов. Если распределение ионов становится неоднородным, регулярным или случайным, то картина процессов усложняется [6]. Возможны резонансы на неоднородностях распределения и дополнительные механизмы воздействия на $\mathcal{E}_{\text{в}}$. Микроскопическое моделирование динамики электронов, учет дискретного характера размещения ионов в пространстве диода позволит получить более детальное описание процессов, включающее эффекты отражения.

Заключение

Для плоского диода изучены различные режимы движения и пространственно-периодические колебания. Эти колебания обусловлены полем $\mathcal{E}_{\text{в}}$ на эмиттере, а при частичной нейтрализации заряда, когда $\gamma \ne 1$, возможны при отсутствии поля на эмиттере. В свою очередь, периодический характер самосогласованного движения электронов и соответствующего ему распределения заряда в межэлектродном пространстве определяет специфические условия на эмиттере. Величина $\mathcal{E}_{\text{в}}$ зависит от соотношения между периодом пространственных колебаний и длиной диода, а также управляется напряжением на диоде. Представленные результаты включают режимы движения при частичной нейтрализации заряда, когда $\gamma \ne 1$; они дополняют теорию диода **Пирса**, сформулированную ранее для режимов движения при $\gamma = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pierce J. R.*//J. Appl. Phys.-1944.-V.15, N 10.-P. 721-726.
2. *Смирнов В. М.*//ЖЭТФ.-1966.- Т. 50, N 4.-С. 1005-1012.
3. *Godfrey B.*//Phys. Fluids.-1987.-V. 30, N 5.-P. 1553-1560.
4. *Lawson W. S.*//Phys. Fluids.-1989.-V.1, N 7.-P.1483-1492.
5. *Hörnhager M., Kuhn S.*//Phys. Fluids.-1990.-V.2, N 11.-P. 2741-2763.
6. *Ермолаев Ю. Л., Санин А. Л.* Электронная синергетика.-Л.: ЛГУ, 1989.

Рукопись поступила 22.05.92