

УДК 532.65:621.359.7

Физические закономерности функционирования генератора заряженных монодисперсных капель / А. А. Земсков, А. И. Григорьев // Научное приборостроение.-1992.-Т.2-№ 2.-С. 24-29.

В рамках принципа наименьшего действия проводится физический анализ закономерностей каплеобразования в генераторе монодисперсных капель с вибрирующей иглой. Исследовано влияние на характеристики образующихся капель внешних параметров системы и свойств рабочей жидкости. Показано, что варьированием подаваемого на капилляр электростатического потенциала, скорости движения и диаметра иглы можно в широких пределах регулировать размеры, заряды и начальные скорости образующихся капель. Библ.-7 назв. Ил.-5.

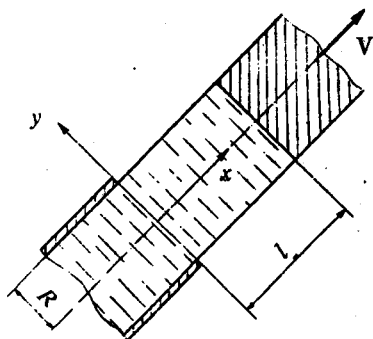
А. А. Земсков, А. И. Григорьев
(Ярославский государственный университет)

ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ГЕНЕРАТОРА ЗАРЯЖЕННЫХ МОНОДИСПЕРСНЫХ КАПЕЛЬ

Как известно, задача получения потоков монодисперсных заряженных капель представляет значительный интерес из-за широкого использования таких потоков в целом ряде научных приборов, технических и технологических приложений: от разработки детекторов нейтрино на основе капель сверхпроводящих жидкостей до ускорителей макрочастиц и устройств для жидкометаллической литографии [1]. Одним из перспективных методов получения монодисперсных капель является генератор с вибрирующей иглой, описанный в работе [2]. Тем не менее, до настоящего времени не существует физически ясной картины принципов его функционирования, хотя в последнее время в этом направлении предпринимаются некоторые шаги и имеется достаточно большое число экспериментальных работ, посвященных этому вопросу [3]. Поэтому представляется интересным теоретический анализ процесса каплеобразования в генераторе указанного типа. Весь последующий разбор проведен по схеме, использованной в работах [3, 4].

Для выяснения основных закономерностей каплеобразования в генераторе с вибрирующей иглой рассмотрим его идеализированную модель, изображенную на рис. 1. Пусть к некоторому моменту времени t_0 игла радиуса R , движущаяся со скоростью v_0 , связана с тонкостенным капилляром внутреннего радиуса R (по которому со скоростью $v \ll v_0$ подается идеальная, идеально-проводящая, несжимаемая жидкость) жидкой перетяжкой цилиндрической формы и длины l . И пусть вся система поддерживается под постоянным электростатическим потенциалом φ_0 . Так как $v \ll v_0$, будем считать объем перетяжки постоянным, начиная с момента t_0 до момента ее разрыва. Примем также, что все действие проходит в паровой среде, перенасыщенность которой такова, что влиянием процессов испарения и конденсации на функцию Лагранжа системы можно пренебречь.

Как известно, для реальных механических движений должен выполняться принцип наименьшего действия. Действие для рассматриваемой системы имеет вид:



$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\rho}{2} \int_V v^2(x) dV - \sigma \int_s ds + \varphi_0 \int_s \omega ds \right] dt, \quad (1)$$

Рис. 1. Схема генератора заряженных монодисперсных капель с вибрирующей иглой

где L — функция Лагранжа; ρ и σ — плотность и коэффициент поверхно-

стного натяжения жидкости, соответственно; ω — поверхностная плотность заряда на перетяжке.

В формуле (1) первое слагаемое определяет кинетическую энергию жидкости, второе — потенциальную энергию сил поверхностного натяжения, третье — электростатическую энергию зарядов на перетяжке. Влиянием силы тяжести будем пренебрегать, считая характерные размеры перетяжки R и l меньшими капиллярной постоянной для рабочей жидкости.

Кроме того, как уже отмечалось, объем перетяжки будем считать неизменным:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V dV dt = \text{const.} \quad (2)$$

Тогда форма образующей перетяжки $y(x)$ для задачи (1) с дополнительным условием (2) будет экстремалью функционала:

$$J[y(x)] = S + \lambda \int_{t_1}^{t_2} \int_V dV dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\rho}{2} \pi \int_0^{x_m} v^2(x) y^2 dx - 2\pi\sigma \int_0^{x_m} y \sqrt{1+y^2} dx + \right. \\ \left. + 2\pi\rho_0 \int_0^{x_m} \omega(x) y \sqrt{1+y^2} dx + \lambda \int_0^{x_m} y^2 dx \right] dt,$$

где λ — неопределенный множитель Лагранжа; $x_m \equiv x_m(t) = l_0 + vt$ — абсцисса точки соединения иглы с перетяжкой в момент времени t .

Имея в виду качественный анализ процесса деформации перетяжки, примем, что скорость движения жидкости в перетяжке есть линейная функция координаты x :

$$v(x) = v_0 \frac{x}{x_m(t)}.$$

Домножим $J[y]$ на $1/2\pi\sigma R^2$ и введем безразмерные переменные: $\xi \equiv \frac{x}{R}$; $v \equiv \frac{v}{R}$; $\tau \equiv \frac{t}{\alpha}$; $\Omega \equiv \frac{v_0\alpha}{l}$; $\alpha \equiv \sqrt{\frac{\rho R^3}{4\sigma}}$; $W \equiv \frac{\rho_0^2}{\sigma R}$; $\psi \equiv \frac{\omega R}{\sigma}$. Получим:

$$J[v] \equiv \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\xi_m} F d\xi dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\xi_m} [\kappa \xi^2 v^2 - (1 - W\psi(\xi)) v \sqrt{1+v^2} + \lambda v^2] d\xi dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt,$$

где \mathcal{L} является функционалом от $y(x)$ и функцией от t .

$$\kappa \equiv \frac{\Omega}{(1 + \Omega\tau)^2}.$$

Уравнение Эйлера для такого функционала имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial (\partial y / \partial x)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial (\partial y / \partial x)} = 0.$$

Но $\frac{\partial F}{\partial (\partial y / \partial x)} = 0$, и экстремум функционала $J [y]$ будет соответствовать экстремуму функционала L , уравнение Эйлера в окончательной форме имеет вид:

$$v'' = (1 + v^2) \left[1 - 2 \frac{(\kappa \xi^2 - \lambda) v}{1 - W \psi} \sqrt{1 + v^2} + \frac{\dot{v} (d\psi/d\xi)}{1 - W \psi} \right]. \quad (3)$$

На концах перетяжки должны выполняться условия

$$y(0) = R; y(x_m) = R. \quad (4)$$

Плотность электрического заряда на поверхности перетяжки можно найти из уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 \Phi \equiv 4\pi \omega,$$

решение которого через функцию Грина можно представить в интегральной форме:

$$\Phi = \int \frac{\omega(r')}{|r' - r|} dr'. \quad (5)$$

С учетом постоянства потенциала на поверхности перетяжки и цилиндрической симметрии системы уравнение (5) примет вид:

$$1 - \frac{\xi_m + \frac{L_2}{R}}{-L_1/R} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(\xi') v(\xi') \sqrt{1 + v^2(\xi')} d\varphi d\xi'}{\left[(\xi - \xi')^2 + v^2(\xi) + v^2(\xi') - 2v(\xi) v(\xi') \omega \sin \varphi \right]^{1/2}} = 0, \quad (6)$$

где φ — азимутальный угол сферической системы координат; L_1 и L_2 — длины капилляра и иглы, соответственно (см. рис. 1).

Полученное дифференциальное уравнение второго порядка (3) с граничными условиями (4) и условием (6) решается численно следующим образом. В качестве начального приближения рассчитывается профиль перетяжки $v_0(\xi)$ при нулевом потенциале ($W = 0 \Rightarrow \psi_0(\xi) = 0$). Затем для этого профиля из уравнения (6) находится распределение заряда при заданном потенциале W , после чего находится профиль капли, но уже с $W_1 = W$ и $\psi = \psi_1(\xi)$. Затем из формулы (6) находится $\psi_2(\xi)$, и процесс повторяется, пока $\Delta v = (v_i - v_{i-1}) / v_i$ для всех ξ не становится меньше заданной точности ϵ .

Результаты численных расчетов показывают, что система (3), (4), (6) имеет решения трех типов (рис. 2). Причем решения 1-го типа непрерывно переходят в решения 2-го типа по мере увеличения длины перетяжки x_m . Затем при некотором критическом значении x_m решения 2-го типа исчезают, но возникают решения 3-го типа. Решения 3-го типа не связаны с решениями 1 и

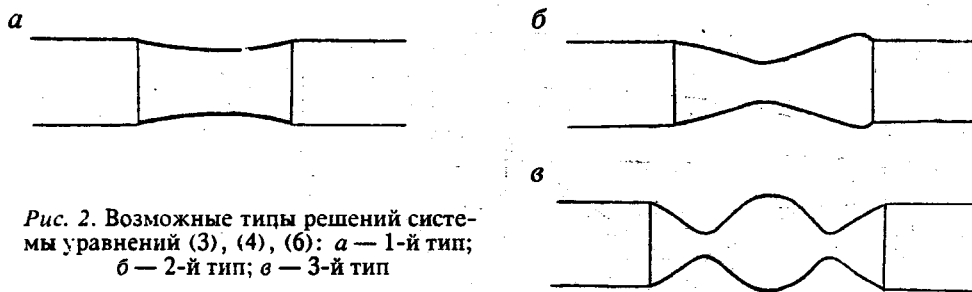


Рис. 2. Возможные типы решений системы уравнений (3), (4), (6): а — 1-й тип; б — 2-й тип; в — 3-й тип

2-го типа, и переход к ним может осуществляться скачком. График зависимости величины функции \mathfrak{L} от x_m для решений всех трех типов приведен на рис. 3.

Физический смысл этого сводится к следующему: увеличение расстояния между иглой и капилляром до некоторой критической величины l_* , при которой исчезают решения задачи 2 или 3-го типов, приводит к тому, что поверхность перетяжки становится неустойчивой, и в результате развития этой неустойчивости перетяжка разрывается. Причем при разрыве перетяжки 2-го типа жидкость делится на две части: одна остается на срезе капилляра, другая — на конце иглы. Если же будет разрываться перетяжка 3-го типа, она разорвется на три части, в том числе капля, не связанная ни с иглой, ни с капилляром.

Как показывает анализ, равновесными будут лишь поверхности, соответствующие решениям 1 и 2-го типов. Поверхности же, соответствующие решениям 3-го типа (которые и обеспечивают образование капли), являются метастабильными. Реализация такой метастабильной формы поверхности возможна лишь в том случае, если характерное время развития неустойчивости в перетяжке 2-го типа τ_* будет больше, чем характерное время удлинения перетяжки l/v_0 . Тогда за время гидродинамической релаксации τ_0 , гораздо меньшее τ_* , происходит переход от неустойчивой перетяжки 2-го типа к энергетически более выгодно форме, соответствующей решению 3-го типа. И уже такая перетяжка разрывается, образуя свободную каплю.

Характерное время развития неустойчивости в короткой цилиндрической струе определяется известным выражением [5]:

$$\tau_* = \frac{1}{2\gamma_*} \ln \frac{\sigma}{Tk_m^2}, \quad (7)$$

где $\gamma_* = \frac{0.34}{R} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R}}$ — инкремент нарастания неустойчивости; T — температура; k_m — волновое число. Подставляя формулу (5) в условие, легко получить критерий каплеобразования:

$$\frac{l}{v_0} < \frac{1}{0.68} \sqrt{\frac{\rho R^3}{\sigma}} \ln \frac{\sigma}{Tk_m^2}$$

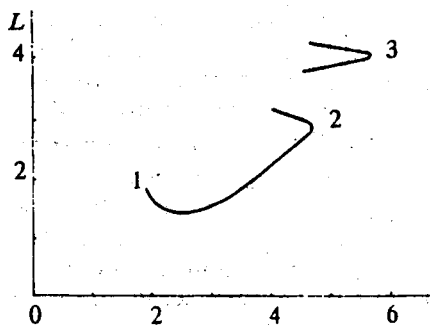


Рис. 3. Зависимость величины функции Лагранжа от длины перетяжки x_m : 1, 2, 3 — типы решений

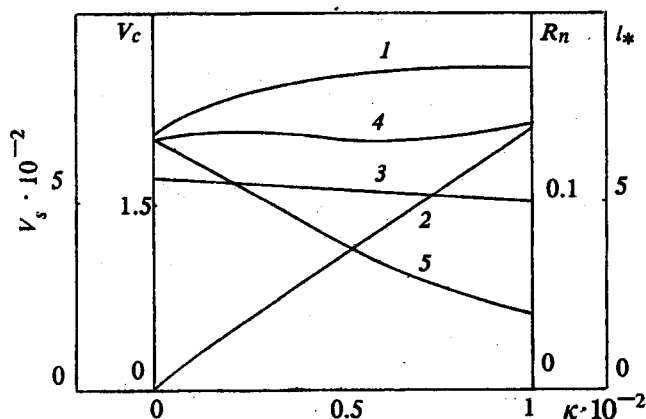


Рис. 4. Зависимость объема капли (1), ее скорости (2), величины максимальной устойчивой длины перетяжки (3) и двух минимальных радиусов перетяжки (4, 5) от параметра κ

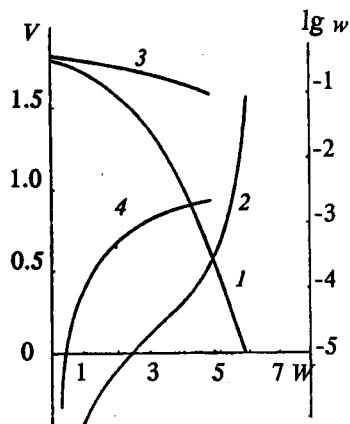


Рис. 5. Зависимость безразмерного объема капли (1, 3) и величины параметра Рэлея w , характеризующего заряд капли (2, 4), от W , для двух значений параметра κ

или в безразмерном виде:

$$\frac{1}{\Omega} < \frac{\alpha}{0.34} \ln \frac{\sigma}{T k_m^2}.$$

В частном случае капилляра радиуса $R = 1$ мм для воды условие каплеобразования имеет вид: $\Omega > 0.05$. Если же характерное время нарастания неустойчивости τ_* мало по сравнению с характерным временем удлинения l/v_0 , то в момент разрыва перетяжка имеет форму 2-го типа, и капли не образуются, так как в этом случае за время τ_* длина перетяжки не успевает заметно увеличиться, и к решениям 3-го типа скачка не происходит.

Итак, пусть в момент разрыва перетяжка имеет форму 3-го типа. Примем, что ее разрыв происходит по тем сечениям, где образующая $u(x)$ имеет минимум, и что переноса массы между тремя частями, образуемыми при разрыве перетяжки, не происходит. Тогда несложно посчитать объем образующейся капли V_c и скорость ее центра масс v_s . На рис. 4 кривыми 1 и 2 представлены, соответственно, зависимости V_c и v_s от параметра κ , характеризующего скорость иглы. Кривая 3 дает зависимость максимальной длины перетяжки l_* от κ , при которой существуют решения 3-го типа. По зависимостям двух минимальных радиусов перетяжки (кривые 4 и 5) происходит разрыв. Видно, что при отличном от нуля κ эти радиусы различны, и очевидно, что разрыв перетяжки будет неодновременным (более тонкое место разорвется быстрее, чем толстое), что и отмечается в экспериментах [6, 7].

На рис. 5 приводятся графики зависимости безразмерного объема и параметра Рэлея $w \equiv \frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3}$ капель от безразмерного параметра W , характеризующего подаваемый на капилляр электростатический потенциал, для двух значений κ (кривые 1, 2: $\kappa = 0.05$, кривые 3, 4: $\kappa = 0.1$). Интересным является

факт уменьшения до нуля размера образующихся капель при увеличении потенциала, подаваемого на капилляр, до некоторого критического значения $W = W_*$. Это связано с тем, что образование капель при разрыве перетяжки вызвано конкуренцией между кинетической и потенциальной энергиями жидкости в перетяжке. При этом образование капель становится возможным лишь при наличии у жидкости достаточно большой кинетической энергии. Увеличение же потенциальной энергии системы за счет появления электростатической добавки приводит к уменьшению вклада кинетической энергии в функцию Лагранжа, что вызывает уменьшение объема, а затем и исчезновение одиночных капель. Это подтверждается тем, что, как показывают расчеты, увеличение скорости движения иглы даже при больших значениях потенциала делает возможным разрыв перетяжки с образованием капли (см. рис. 5). При докритических потенциалах увеличение скорости движения иглы приводит к увеличению объема образующихся капель.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев А. И. Неустойчивости заряженных капель в электрических полях. (Обзор) // ЭОМ. -1990. -N 6. -С. 23-32.
2. Контуш С. М. Поверхностные явления в физике водных грубодисперсных аэрозолей. Автореф. дисс. д-ра физ. -мат. наук. Л.: 1987. -31 с.
3. Григорьев А. И., Земсков А. А., Сыщиков Ю. В., Ширяева С. О. К получению монодисперсных капель в генераторе с вибрирующей иглой // ЖПХ. -1990. -Т.63, N 7. - С. 1529-1533.
4. Григорьев А. И., Земсков А. А., Ширяева С. О. Отрыв капли от капилляра под действием силы тяжести // Научное приборостроение. -1991. -Т. 1, N 2. - С. 50-58.
5. Бадан В. Е., Владимиров В. В., Порицкий В. Я. Неустойчивость макро-струй, возбуждаемых на поверхности жидкого металла // ЖТФ. -1987. -Т. 57, N 6.- С. 1197-1198.
6. Колпаков А. В., Дмитриева Е. М., Салов В. А. Электродинамические процессы, способствующие зарядке капель воды при дроблении и соударении // Атмосферное электричество. Тр. III Всесоюзн. симпоз. -Л.: Гидрометеоиздат. -1988. -С. 66.
7. Верещаго Н. Г., Жбанкова С. Л., Колпаков А. В. и др. - IV Всесоюзн. симпоз. по атмосф. электричеству. Тез. докл. Нальчик. -1990. - С. 337-338.

Рукопись поступила 28.10.91