

УДК 543.544

Решение задачи о проточном фракционировании в плоском канале с обратимой сорбцией на стенках методом собственных функций/ В.П.Андреев, Л.А.Стефанович// Научное приборостроение. — 1991. — Т. 1. — N 3. — С. 53-63.

Демонстрируется применение удобного в работе метода собственных функций к решению задач, имеющих место при математическом моделировании процессов массопереноса в слоистых средах на примере решения задачи о проточном фракционировании в плоском канале с обратимой сорбцией в стенках канала. Для упомянутой задачи получены аналитические выражения для первых трех моментов концентрации пробы, позволяющие осуществить оптимизацию процесса. Библ. — 9 назв. Ил. — 3. Табл. — 1.

В.П. Андреев, Л.А. Стефанович

(Институт аналитического приборостроения АН СССР, С.-Петербург)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРОТОЧНОМ ФРАКЦИОНИРОВАНИИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ОБРАТИМОЙ СОРБЦИЕЙ НА СТЕНКАХ МЕТОДОМ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящее время широкое распространение получили задачи о различных процессах в слоистых средах, в частности о процессах массопереноса. Как правило, при решении подобных задач приходится прибегать к операционным методам, что приводит к громоздким выкладкам при проведении обратных преобразований. Рассмотрим метод собственных функций к решению такого рода "слоистых" задач на примере задачи о проточном фракционировании в плоском канале при наличии обратимой сорбции на стенках канала.

Метод проточного фракционирования (ПФ) веществ в полях различной физической природы предложен Д.К. Гиддингсом в 1966 г. [1]. Основная идея метода ПФ, а также его физические возможности и преимущества перед традиционными хроматографическими методами достаточно подробно рассмотрены в ряде обзоров [2-6]. Необходимость решения задачи о ПФ при наличии сорбции вещества пробы на стенках канала вызвана тем, что в ряде случаев, в частности при фракционировании вирусов [7], были получены экспериментальные зависимости времени удержания пробы от скорости поперечного потока, которые существенно отличались от теоретических, что объяснялось в [7] взаимодействием вирусов с мембраной, а именно — обратимой сорбцией и попаданием частиц в крупные поры. В настоящей работе исследовано влияние паразитного эффекта — обратимой сорбции пробы на стенках канала на процесс разделения в ПФ.

Постановка задачи и ее решение

Задача состоит в определении концентрации пробы C , движущейся в бесконечном плоском канале ширины l_1 (рис.1) в установившемся ламинар-

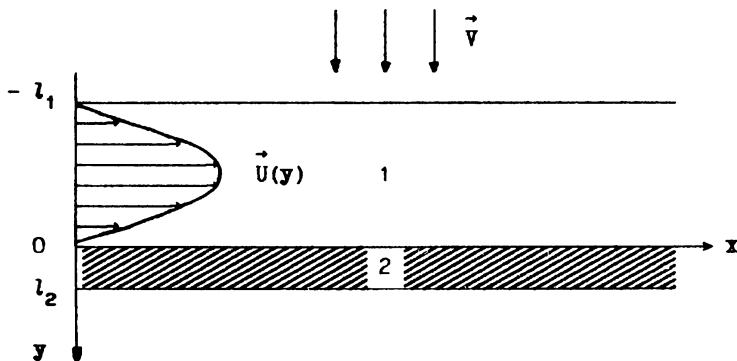


Рис.1. Схема проточного фракционирования в плоском канале с сорбцией на стенках

ном потоке растворителя при наличии внешнего перпендикулярного потока растворителя, обеспечивающего поперечное смещение частиц пробы. В этих условиях концентрация пробы в свободном слое $C^{(1)}$ и в мембране $C^{(2)}$ будет описываться уравнениями конвективной диффузии следующего вида:

$$\frac{\partial C^{(1)}}{\partial t} + U_0 \left(1 - \frac{(2y + l_1)^2}{l_1^2} \right) \frac{\partial C^{(1)}}{\partial x} + V \frac{\partial C^{(1)}}{\partial y} = D_1 \Delta C^{(1)}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial C^{(2)}}{\partial t} = D_2 \Delta C^{(2)} \quad (2)$$

с граничными условиями

$$D_1 \frac{\partial C^{(1)}}{\partial y} - VC^{(1)} = 0 \quad \text{при } y = -l_1; \quad (3)$$

$$D_1 \frac{\partial C^{(1)}}{\partial y} - VC^{(1)} = D_2 \frac{\partial C^{(2)}}{\partial y} \quad \text{при } y = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial C^{(2)}}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = l_2; \quad (5)$$

$$C^{(1)} = kC^{(2)} \quad \text{при } y = 0, \quad (6)$$

где D_1 и D_2 — коэффициенты диффузии в слоях 1 и 2; k — коэффициент распределения частиц пробы между двумя фазами (жидкостью и мембраной). Отметим, что равновесное условие (6) формулируется только для границы раздела фаз, где равновесие устанавливается мгновенно.

Распределение концентрации пробы в начальный момент времени для простоты положим следующим:

$$C^{(1)} = C_0 \delta(x) \quad \text{при } t = 0; \quad (7)$$

$$C^{(2)} = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (8)$$

Перепишем уравнения (1), (2) и условия (3)-(8) в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial \tau} - (Y^2 + 2Y) \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial X} + Pe \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial Y} = \frac{1}{Pe_{11}^2} \frac{\partial^2 \theta^{(1)}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta^{(1)}}{\partial Y^2}; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial \tau} = \frac{D_2}{D_1} \left(\frac{1}{Pe_{11}^2} \frac{\partial^2 \theta^{(2)}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta^{(2)}}{\partial Y^2} \right); \quad (10)$$

$$\frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial Y} - Pe \theta^{(1)} = 0 \quad \text{при } Y = -2; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial Y} - Pe \theta^{(1)} = \frac{D_2}{D_1} \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial Y} \quad \text{при } Y = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial Y} = 0 \quad \text{при } Y = d; \quad (13)$$

$$\theta^{(1)} = k \theta^{(2)} \quad \text{при } Y = 0; \quad (14)$$

$$\theta^{(1)} = \delta(X) \quad \text{при } \tau = 0, \quad (15)$$

$$\theta^{(2)} = 0 \quad \text{при } \tau = 0, \quad (16)$$

где введены следующие обозначения:

$$\tau = t \frac{4D_1}{l_1^2}; \quad X = x \frac{4D_1}{U_0 l_1^2}; \quad Y = y \frac{2}{l_1};$$

$$\theta^{(1)} = \frac{C^{(1)}}{C_0}; \quad \theta^{(2)} = \frac{C^{(2)}}{C_0};$$

$$Pe = \frac{V l_1}{2D_1}; \quad Pe_{11} = \frac{V_0 l_1}{2D_1}; \quad d = 2 \frac{l_2}{l_1}.$$

Систему (9)-(16) будем решать методом моментов, которые введем следующим образом:

$$\mu_m^{(i)} = \int_{-\infty}^{+\infty} X^m \theta^{(i)}(X, Y, \tau) dX, \quad i = 1, 2, \quad m = 0, 1, 2. \quad (17)$$

Полагая $\theta^{(i)}$, $\frac{\partial \theta^{(i)}}{\partial X}$, $\frac{\partial^2 \theta^{(i)}}{\partial X^2}$ равными нулю при $X = \pm \infty$, получим систему уравнений, граничных и начальных условий для моментов:

$$\frac{\partial \mu_m^{(1)}}{\partial \tau} + Pe \frac{\partial \mu_m^{(1)}}{\partial Y} - \frac{\partial^2 \mu_m^{(1)}}{\partial Y^2} = -m(Y^2 + 2Y) \mu_{m-1}^{(1)} + \frac{m(m-1)}{Pe_{11}} \mu_m^{(1)} - 2; \quad (18)$$

$$\frac{\partial \mu_m^{(2)}}{\partial \tau} - \frac{D_2}{D_1} \frac{\partial^2 \mu_m^{(2)}}{\partial Y^2} = \frac{m(m-1)}{Pe_{11}} \frac{D_2}{D_1} \mu_m^{(2)} - 2; \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mu_m^{(1)}}{\partial Y} - Pe \mu_m^{(1)} = 0 \quad \text{при } Y = -2; \quad (20)$$

$$\frac{\partial \mu_m^{(1)}}{\partial Y} - Pe \mu_m^{(1)} = \frac{D_2}{D_1} \frac{\partial \mu_m^{(2)}}{\partial Y} \quad \text{при } Y = 0; \quad (21)$$

$$\frac{\partial \mu_m^{(2)}}{\partial Y} = 0 \quad \text{при } Y = d; \quad (22)$$

$$\mu_m^{(1)} = k \mu_m^{(2)} \quad \text{при } Y = 0; \quad (23)$$

$$\mu_m^{(i)} = \delta_{1,i} \cdot \delta_{0,m} \quad \text{при } \tau = 0, \quad (24)$$

$$i = 1, 2, \quad m = 0, 1, 2.$$

Решение задачи будем искать в виде

$$\mu_m^{(1)} = \exp(Pe \cdot Y / 2) \sum_{(n)} T_{mn}(\tau) \Phi_n^{(1)}(Y); \quad (25)$$

$$\mu_m^{(2)} = \sum_{(n)} T_{mn}(\tau) \Phi_n^{(2)}(Y), \quad (26)$$

где $\Phi_n^{(1)}$ и $\Phi_n^{(2)}$ — собственные функции сформулированной ниже задачи Штурма — Лиувилля. Действительно, однородные уравнения, полученные из (18), (19) путем отбрасывания правых частей

$$\frac{\partial \mu_m^{(1)}}{\partial \tau} + Pe \frac{\partial \mu_m^{(1)}}{\partial Y} - \frac{\partial^2 \mu_m^{(1)}}{\partial Y^2} = 0; \quad (27)$$

$$\frac{\partial \mu_m^{(2)}}{\partial \tau} - \frac{D_2}{D_1} \frac{\partial^2 \mu_m^{(2)}}{\partial Y^2} = 0, \quad (28)$$

и граничные условия (20)–(23) допускают разделение переменных. Подставляя выражения (25), (26) в уравнения (27), (28) и условия (20)–(23) и разделяя переменные, получим задачу Штурма — Лиувилля (заметим, что множитель $\exp(Pe \cdot Y / 2)$ в выражении (25) позволяет записать для $\Phi_n^{(1)}$ уравнение, содержащее эрмитов дифференциальный оператор):

$$\frac{d^2 \Phi_n^{(1)}}{dY^2} + \left(\lambda - \frac{Pe^2}{4} \right) \Phi_n^{(1)} = 0; \quad (29)$$

$$\frac{D_2}{D_1} \frac{d^2 \Phi_n^{(2)}}{dY^2} + \lambda \Phi_n^{(2)} = 0; \quad (30)$$

$$\frac{d\Phi_n^{(1)}}{dY} - \frac{Pe}{2} \Phi_n^{(1)} = 0 \quad \text{при } Y = -2; \quad (31)$$

$$\frac{d\Phi_n^{(1)}}{dY} - \frac{Pe}{2} \Phi_n^{(1)} = \frac{D_2}{D_1} \frac{d\Phi_n^{(2)}}{dY} \quad \text{при } Y = 0; \quad (32)$$

$$\frac{d\Phi_n^{(2)}}{dY} = 0 \quad \text{при } Y = d; \quad (33)$$

$$\Phi_n^{(1)} = k\Phi_n^{(2)} \quad \text{при } Y = 0. \quad (34)$$

Решая систему (29) - (34), получим

$$\Phi_n^{(1)} = \cos\left(\frac{\delta_n}{2} Y\right) + \frac{Pe \cos(\delta_n) - \delta_n \sin(\delta_n)}{\delta_n \cos(\delta_n) + Pe \sin(\delta_n)} \sin\left(\frac{\delta_n}{2} Y\right); \quad (35)$$

$$\Phi_n^{(2)} = \frac{1}{k} \left[\cos(\omega_n Y) + \operatorname{tg}(\omega_n d) \sin(\omega_n Y) \right], \quad (36)$$

где обозначено

$$\delta_n = \sqrt{4\lambda_n - Pe^2}; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{D_1}{D_2} \lambda_n}. \quad (37)$$

Уравнение для собственных чисел λ_n с учетом обозначений (37) имеет вид

$$\delta_n \operatorname{ctg}(\delta_n) + Pe = -2k\omega_n \operatorname{ctg}(\omega_n d), \quad \lambda_n \neq 0. \quad (38)$$

Кроме того, система (29)-(34) имеет особое решение при $\lambda_0 = 0$:

$$\Phi_0^{(1)} = \exp(Pe \cdot Y / 2), \quad \Phi_0^{(2)} = \frac{1}{k}.$$

Что касается функций $T_{mn}(\tau)$, то они определяются следующим выражением:

$$T_{mn}(\tau) = \frac{\hat{\mu}_{mn}^{(1)} + k\hat{\mu}_{mn}^{(2)}}{N_n}, \quad (39)$$

где

$$\hat{\mu}_{m1}^{(1)} = \int_{-2}^0 \exp(-Pe \cdot Y/2) \Phi_n^{(1)}(Y) \mu_m^{(1)}(\tau, Y) dY;$$

$$\hat{\mu}_{m1}^{(2)} = \int_0^d \Phi_n^{(2)}(Y) \mu_m^{(2)}(\tau, Y) dY;$$

$$N_n = \int_{-2}^0 \Phi_n^{(1)} \cdot \Phi_n^{(1)} dY + k \int_0^d \Phi_n^{(2)} \cdot \Phi_n^{(2)} dY.$$

Докажем формулу (39): пусть $\Phi_n^{(1)}$ и $\Phi_m^{(1)}$ удовлетворяют уравнению (29), а $\Phi_n^{(2)}$ и $\Phi_m^{(2)}$ — уравнению (30) с условиями (31)–(34) и соответствуют собственным числам λ_n и λ_m . Тогда верно следующее:

$$\int_{-2}^0 \Phi_n^{(1)} \left[\frac{d^2 \Phi_m^{(1)}}{dY^2} + \left[\lambda_m - \frac{Pe^2}{4} \right] \Phi_m^{(1)} \right] dY = 0; \quad (40)$$

$$\int_{-2}^0 \Phi_m^{(1)} \left[\frac{d^2 \Phi_n^{(1)}}{dY^2} + \left[\lambda_n - \frac{Pe^2}{4} \right] \Phi_n^{(1)} \right] dY = 0; \quad (41)$$

$$k \int_0^d \Phi_n^{(2)} \left[\frac{D_2}{D_1} \frac{d^2 \Phi_m^{(2)}}{dY^2} + \lambda_m \Phi_m^{(2)} \right] dY = 0; \quad (42)$$

$$k \int_0^d \Phi_m^{(2)} \left[\frac{D_2}{D_1} \frac{d^2 \Phi_n^{(2)}}{dY^2} + \lambda_n \Phi_n^{(2)} \right] dY = 0. \quad (43)$$

Вычитая (40) из (41) и (42) из (43) и интегрируя по частям получившиеся выражения, получим

$$[\lambda_n - \lambda_m] \int_{-2}^0 \Phi_n^{(1)} \Phi_m^{(1)} dY = \left[\frac{d\Phi_m^{(1)}}{dY} \Phi_n^{(1)} - \frac{d\Phi_n^{(1)}}{dY} \Phi_m^{(1)} \right]_{-2}^0; \quad (44)$$

$$k [\lambda_n - \lambda_m] \int_0^d \Phi_n^{(2)} \Phi_m^{(2)} dY = k \frac{D_2}{D_1} \left[\frac{d\Phi_m^{(2)}}{dY} \Phi_n^{(2)} - \frac{d\Phi_n^{(2)}}{dY} \Phi_m^{(2)} \right]_0^d. \quad (45)$$

Складывая (44) и (45) с учетом граничных условий (31) и (34), будем иметь

$$[\lambda_n - \lambda_m] \left[\int_{-2}^0 \Phi_n^{(1)} \Phi_m^{(1)} dY + k \int_0^d \Phi_n^{(2)} \Phi_m^{(2)} dY \right] = 0.$$

Таким образом, если $\lambda_n \neq \lambda_m$, то

$$\int_{-2}^0 \Phi_n^{(1)} \Phi_m^{(1)} dY + k \int_0^d \Phi_n^{(2)} \Phi_m^{(2)} dY = 0. \quad (46)$$

Теперь несложно доказать справедливость формулы (39): домножим выражение (25) на $\exp[-Pe \cdot Y/2] \Phi_n^{(1)}$, а выражение (26) на $k \Phi_n^{(2)}$, проинтегрируем по соответствующим интервалам и сложим, получим

$$\hat{\mu}_{mn}^{(1)} + k \hat{\mu}_{mn}^{(2)} = \sum_{(n)} T_{mn}(\tau) \left[\int_{-2}^0 \Phi_n^{(1)} \Phi_m^{(1)} dY + k \int_0^d \Phi_n^{(2)} \Phi_m^{(2)} dY \right].$$

С учетом (46) утверждение доказано.

Таким образом, домножая уравнение (18) на $\exp(-Pe \cdot Y/2) \Phi_n^{(1)}(Y)$, а уравнение (19) на $k \Phi_n^{(2)}(Y)$, затем интегрируя их по соответствующим интервалам с учетом (29), (30) и складывая, получим линейное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} (\hat{\mu}_{mn}^{(1)} + k \hat{\mu}_{mn}^{(2)}) + \lambda_n (\hat{\mu}_{mn}^{(1)} + k \hat{\mu}_{mn}^{(2)}) = \\ & = -m \int_{-2}^0 (Y^2 + 2Y) \exp(-Pe \cdot Y/2) \Phi_n^{(1)} \mu_m^{(1)} dY + \\ & + \frac{m(m-1)}{Pe_{11}^2} \int_{-2}^0 \exp(-Pe \cdot Y/2) \Phi_n^{(1)} \mu_m^{(1)} dY + \\ & + k \frac{D_2}{D_1} \frac{m(m-1)}{Pe_{11}^2} \int_0^d \Phi_n^{(2)} \mu_m^{(2)} dY. \end{aligned} \quad (47)$$

Начальное условие (24), преобразованное таким же образом, примет вид

$$\hat{\mu}_{mn}^{(1)} + k \hat{\mu}_{mn}^{(2)} = \delta_{0,m} \int_{-2}^0 \exp(-Pe \cdot Y/2) \Phi_n^{(1)} dY \quad (48)$$

при $\tau = 0$.

Решая систему (47)-(48) последовательно для $m = 0, 1, 2$ относительно неизвестной функции

$$f_{mn}(Y) = \hat{\mu}_{mn}^{(1)} + k \hat{\mu}_{mn}^{(2)},$$

будем иметь с учетом (39), (25), (26) требуемое решение для $\mu_m^{(i)}$. Поскольку нас интересуют прежде всего такие характеристики процесса ПФ, как скорость движения пика пробы по каналу и скорость роста дисперсии, ограничимся нахождением первых трех моментов: $\mu_0^{(i)}, \mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)}$. Осредняя полученные решения по сечению канала, учитывая то, что типичный детек-

тор осуществляет интегрирование концентрации именно таким образом, получим для

$$\mu_m = \int_{-2}^0 \mu_m^{(1)}(\tau, Y) dY$$

выражения следующего вида:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \alpha^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(2)} \exp(-\lambda_n \tau); \\ \mu_1 &= \beta^{(1)} \tau + \beta^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n^{(3)} \tau + \beta_n^{(4)}) \exp(-\lambda_n \tau); \\ \mu_2 &= \gamma^{(1)} \tau^2 + \gamma^{(2)} \tau + \gamma^{(3)} + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^{(4)} \tau^2 + \gamma_n^{(5)} \tau + \gamma_n^{(6)}) \exp(-\lambda_n \tau), \end{aligned}$$

где λ_n найдутся из численного решения уравнения (38), а выражения для коэффициентов приведены нами в работе [8].

Результаты расчета и их обсуждение

Получены аналитические выражения для первых трех моментов концентрации вещества пробы в свободном канале ПФ, характеризующих массу вещества в свободном канале, координату и дисперсию пика пробы, которые позволяют заняться сравнением данных результатов с результатами расчета для ПФ в плоском канале без учета сорбции вещества на стенках, представленными в работе [9]. Для этого нам удобно получить такие характеристики, как скорость движения пика, т.е. вдоль канала и скорость роста дисперсии пика, коэффициенты $K_1(\tau)$ и $K_2(\tau)$, фигурирующие в обобщенном дисперсионном уравнении

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(\tau) \frac{\partial \theta_m^{(i)}}{\partial X^i}, \quad (49)$$

где

$$\theta_m = \int_{-2}^0 \theta(X, Y, \tau) dY.$$

Умножая (49) последовательно на X , $(X - \bar{X})$, где $\bar{X} = \frac{\mu_1}{\mu_0}$, и интегрируя по X в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ с учетом (17), получим

$$-K_1(\tau) = \frac{1}{\mu_0} \frac{d\mu_1}{d\tau};$$

$$K_2(\tau) = \frac{1}{2\mu_0} \frac{d\mu_{2c}}{d\tau},$$

где

$$\mu_{2c} = \mu_2 - \frac{\mu_1^2}{\mu_0}.$$

Как следует из рис. 2, на скорость движения пика пробы (коэффициент $-K_1$) сорбция практически не влияет, если она невелика (случай больших чисел k). Скорость пика при этом хорошо описывается теорией, не учитываю-

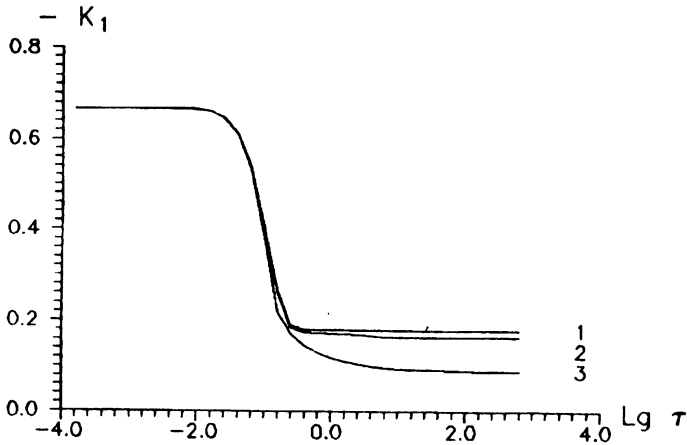


Рис. 2. Зависимость коэффициента $-K_1$ от логарифма безразмерного времени τ ($Pe = 10$, $d = 10^{-2}$, $D_2/D_1 = 10^{-5}$): 1 - $k = 100$; 2 - $k = 1$; 3 - $k = 0.1$

щей сорбцию [9] (кривая 1 (рис.2), соответствующая $k = 100$, фактически совпадает с полученной в [9]). Скорость движения пика пробы меняется от средней скорости движения жидкости в канале до своего стационарного значения за время $\tau \approx Pe/2$. Влиянием сорбции на скорость пика нельзя пренебречь при $k \leq 1$, результат ее действия проявляется тем заметнее, чем толще сорбирующая мембрана. Действительно, в этом случае частицы пробы часть времени проводят в неподвижной фазе, и, следовательно, скорость движения пробы по каналу уменьшается.

Гораздо ошутимее наличие сорбции влияет на скорость роста дисперсии пика: коэффициента K_2 (рис. 3). Однако ее влияние заметно проявляется лишь при приближении коэффициента $K_2(\tau)$ к своему асимптотическому значению $K_2(\infty)$. Имеющиеся на зависимостях $K_2(\tau)$ минимумы соответствуют ситуации, когда равновесное распределение вещества пробы между каналом и мембраной еще не установилось, и близко к значениям $K_2(\infty)$ при отсутствии сорбции на стенках.

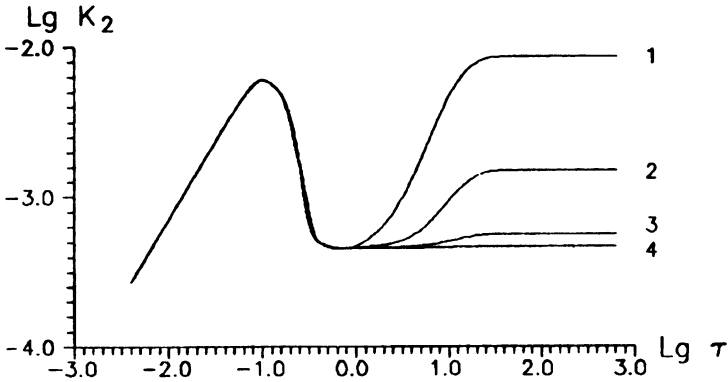


Рис. 3. Зависимость логарифма коэффициента K_2 от логарифма безразмерного времени τ ($Pe = 10$, $d = 10^{-2}$, $D_2/D_1 = 10^{-3}$): 1 - $k = 1$; 2 - $k = 10$; 3 - $k = 100$; 4 - $k = 10^4$

Время $t_{\text{диф}2}$, за которое коэффициент $K_2(\tau)$ достигает своего асимптотического значения $K_2(\infty)$, равно l_2^2/D_2 . Если какую-либо смесь удастся разделить за такое время t^* , что $t_{\text{диф}1} \leq t^* \ll t_{\text{диф}2}$, то сорбцию при этом можно практически не учитывать. Если t^* соизмеримо с $t_{\text{диф}2}$, то необходимо при оптимизации процесса учитывать полученную зависимость $K_2(\tau)$. В таблице представлены результаты расчета времени разделения смеси двух компонент с коэффициентом разрешения $K_r = 1$, где

$$K_r = \frac{\frac{D_2}{D_1} \bar{X}_1(\tau) - \bar{X}_2 \left(\frac{D_2 \tau}{D_1} \right)}{2 \left[\frac{D_2}{D_1} \sigma_1(\tau) + \sigma_2 \left(\frac{D_2 \tau}{D_1} \right) \right]}$$

Зависимость времени разделения τ^* смеси двух компонент с коэффициентами диффузии, соответствующими числам $Pe_1 = 10$ и $Pe_2 = 15$ от коэффициента распределения k (фактора емкости $k' = d/k$). Толщина мембраны $d = 10^{-2}$, отношение коэффициентов диффузии в мембране и в свободном слое для обоих веществ $D_2/D_1 = 10^{-3}$

k	10^3	10^2	10	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
k'	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10
τ^*	5.2	5.3	5.7	72	205	220	580

σ_1^2 и σ_2^2 — вторые центрированные моменты первого и второго вещества, соответственно, а τ^* — безразмерное время разделения, полученное нормированием t^* на $t_{\text{диф1}} = l_1^2 / D_1$ первого вещества ($Pe_1 = 10$). Как видно из таблицы, наличие сорбции существенно увеличивает время разделения компонент.

Полученные результаты, в частности, аналитические выражения для $\mu_0(\tau)$, $\mu_1(\tau)$, $\mu_{2c}(\tau)$, позволяют осуществлять оптимизацию режима проточного фракционирования при заданных параметрах канала ПФ, свойствах мембраны и предположительном составе пробы выбором соотношения скоростей поперечного и продольного потоков, минимизирующих время разделения при заданном разрешении компонент.

Нам представляется, что предложенный метод может быть использован для решения широкого круга задач, описывающих слоистые среды. В том числе это относится к задачам распространения волн в слоистых средах. При этом вместо использования метода моментов целесообразно провести преобразование Фурье по продольной координате, а далее действовать в соответствии с изложенным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Giddings J.C.* A New Separation Concept Based on a Coupling of Concentration and Flow Nonuniformities // *Sep.Sci.* -1966.-N1. -P.123.
2. *Андреев В.П., Рейфман Л.С.* Аналитические возможности метода проточного фракционирования веществ в полях различной физической природы // *Научная аппаратура.* - 1986.- Т.1. - N3. - С.3-36.
3. *Андреев В.П., Семенов С.Н., Кузнецов А.А., Рейфман Л.С.* Метод проточного фракционирования веществ в полях различной физической природы. I. Основная идея и области применения метода // *ЖФХ.* - 1986. - Т.60. - N12. - С.2913-2922.
4. *Андреев В.П., Семенов С.Н., Кузнецов А.А., Рейфман Л.С.* Метод проточного фракционирования веществ в полях различной физической природы. II. Теоретические модели процесса проточного фракционирования // *ЖФХ* - 1987. - Т.61. - N1. - С.1-12.
5. *Janca J.* Field-Flow Fractionation [in:] *Separation Methods*, ed. Deyl Z. New York: Marcel Dekker, 1984.
6. *Janca J. Kleparnic K., Janova V., Chmelik L.* Progress in Field-Flow Fractionation: Theory, Methodology and Applications // *J.Liq. Chromatography.* - 1984. - N7. - Suppl.1. - P.1.
7. *Giddings J.C., Yang F.J., Myers M.N.* Flow FFF: New method for separating, purifying and characterizing the diffusivity of viruses // *J.Virology.* - 1977. - N21. - P.131.
8. *Андреев В.П., Стефанович Л.А.* Проточное фракционирование в плоском канале с учетом обратимой сорбции на стенках канала/Л., 1991. Деп. в ВИНТИ, N1399 - В 91 от 29.03.91.
9. *Krishnamurthy S., Subramanian R.S.* Exact analysis of FFF // *Sep.Sci. and Tech.* - 1977. -V.12- N4. - P.347.