

УДК 519.651

Дискретизация и восстановление непрерывных сигналов. Метод В-сплайнов/ Т.А.Сахарук// Научное приборостроение. — 1991. — Т. 1. — N 3. — С. 142-155.

Изучаются методы квантования по времени и восстановления сигналов путем аппроксимации непрерывных функций В-сплайнами. Предлагаемый подход позволяет существенно сократить частоту квантования, уменьшить ошибку восстановления и повысить помехоустойчивость по сравнению с традиционными методами, а также получить восстановленную функцию заданной гладкости. Библ. — 5 назв. Ил. — 3.

Т.А.Сахарук

(Институт аналитического приборостроения АН СССР, С.-Петербург)

**ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ
СИГНАЛОВ.
МЕТОД В-СПЛАЙНОВ**

Введение

В любую техническую систему информация поступает в виде сигналов. Различные параметры физических процессов при помощи датчиков обычно преобразуются в электрические сигналы. В большинстве случаев ими являются непрерывно меняющиеся ток или напряжение. Хотя поступающую информацию можно хранить и обрабатывать в непрерывном виде, но эффективность работы с дискретными данными благодаря современному развитию вычислительной техники существенно выше. Кроме того, для конкретных задач наблюдения и управления обычно требуется значительно меньше информации, чем ее поступает с датчиков в виде аналоговых сигналов. С целью представления их в доступной для ЭВМ форме и сжатия информации непрерывные сигналы подвергаются квантованию (дискретизации). Под дискретизацией будем понимать преобразование непрерывной функции времени в дискретную, задаваемую последовательностью величин, называемых координатами. Подразумевается, что по координатам исходная функция может быть восстановлена с заданной точностью.

Предметом этой статьи является изучение свойств квантования по времени и восстановление исходных сигналов методом, основанным на аппроксимации непрерывных функций B -сплайнами. Такой подход позволяет существенно сократить частоту квантования, уменьшить ошибку восстановления и повысить помехоустойчивость по сравнению с традиционными методами квантования, а также получить восстановленную функцию заданной гладкости.

Постановка задачи

В ряде прикладных задач, например, при моделировании на ЭВМ, численным решением дифференциальных уравнений и т.д., необходимо иметь адекватное конечномерное описание сигналов и уметь восстанавливать непрерывные сигналы по их дискретному представлению. При решении такой задачи возникает ряд вопросов. Во-первых, нужно решить, по какому правилу получать из непрерывной функции дискретные значения. Во-вторых,

как по ним восстановить исходный сигнал, имеющий заданную гладкость. В-третьих, какова необходимая частота квантования.

В самом общем случае представление непрерывной функции дискретной последовательностью может быть записано в виде $U = \mathcal{D}[u(t)]$, где \mathcal{D} - оператор дискретизации, $U = \{u_k\}_{k=1}^n$ - последовательность отсчетов, $u(t)$ - исходная функция. Будем рассматривать функции с интегрируемым квадратом, т.е. с ограниченной энергией, и заданные на конечном промежутке \mathbb{T} ($u(t) \in L^2(\mathbb{T})$). Процедура восстановления сводится к получению $\hat{u}(t) = \mathcal{B}[U]$, минимизирующей квадрат нормы ошибки.

С математической точки зрения задача заключается в выборе пары $(\mathcal{D}, \mathcal{B})$ такой, чтобы обеспечивалась заданная точность восстановления ϵ на определенном классе функций:

$$\|u(t) - \mathcal{B}\mathcal{D}[u(t)]\| \leq \epsilon.$$

Идея представления непрерывной функции в дискретном виде состоит в следующем. Пусть в бесконечномерном функциональном пространстве $L^2(\mathbb{T})$ задано конечномерное подпространство $M_n(\mathbb{T})$. Введем в $M_n(\mathbb{T})$ базис $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ и спроектируем произвольную функцию $u(t) \in L^2(\mathbb{T})$ на подпространство. Таким образом, $u(t)$ может быть представлена в виде суммы $u(t) = \tilde{u}(t) + e(t)$, где $\tilde{u}(t) \in M_n(\mathbb{T})$ - ортогональная проекция, $e(t)$ - ошибка приближения функции $u(t)$ функцией $\tilde{u}(t)$. В анализе доказано, что такая проекция удовлетворяет критерию минимума квадрата нормы ошибки. Разложим теперь $\tilde{u}(t)$ по элементам базиса:

$$\tilde{u}(t) = \sum_{k=1}^n u_k \varphi_k(t).$$

Будем называть последовательность $\{u_k\}_{k=1}^n$ дискретным представлением $u(t)$, а функцию $\tilde{u}(t)$ аппроксимацией или конечномерным приближением функции $u(t)$.

Итак, при заданной ошибке задача квантования сводится к вычислению проекции на конечномерное подпространство, заданию базиса в нем и разложению функции по элементам этого базиса.

Теория. Традиционные методы квантования

В этом разделе изучается дискретное представление функций из $L^2(\mathbb{T})$, получаемое путем выборки ее значений с постоянным шагом.

Рассмотрим приближение

$$u_{\delta}(t) = \sum_k u(kT_0) \delta(t - kT_0),$$

где $\delta(t)$ - дельта-функция. Из теоремы Котельникова известно, что, если спектр функции $u(t)$

$$u(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt$$

имеет конечную ширину, и T_0 выбрано так, что $T_0 \leq \pi / \omega_s$, где ω_s — максимальная частота, содержащаяся в спектре, тогда $u(t)$ однозначно определяется величинами $u(kT_0)$ и может быть восстановлена в $L^2(\mathbb{R})$ рядом

$$u(t) = \sum_k u(kT_0) \operatorname{sinc}(\pi/T_0(t - kT_0)).$$

При этом спектр $u_s(t)$ имеет вид

$$u_s(\omega) = \frac{T_0}{\sqrt{2\pi}} \sum_k u(kT_0) e^{-iT_0\omega k}$$

и является периодическим продолжением $\hat{u}(\omega)$ с периодом $2\pi/T_0$. Отсюда следует, что восстановление должно заключаться в ограничении спектра, т.е. умножении на функцию, равную 1 на интервале $[-\pi/T_0, \pi/T_0]$, и нулю вне его, так называемую характеристическую функцию интервала. А это преобразование как раз и эквивалентно свертке с функцией $\operatorname{sinc}(x)$, которая есть Фурье-образ характеристической функции, т.е. идеальный низкочастотный фильтр. Так что описанный метод является по своей сути приближением сигналов в базисе $\varphi_k(t) = \operatorname{sinc}(\pi/T_0(t - kT_0))$. Однако он обладает рядом существенных недостатков. Во-первых, как известно, sinc -ряд плохо сходится, т.е. функция имеет бесконечный носитель, и попытки ограничить ряд конечным числом членов приводят к искажению результата, причем максимальная величина этой ошибки не стремится к нулю при увеличении числа членов ряда (явление Гиббса). Второй существенный недостаток описанного метода заключается в том, что такой процесс квантования чувствителен к ошибкам исходных данных, которые всегда присутствуют в реальных сигналах.

Остановимся теперь на некоторых простых способах восстановления сигналов по дискретной выборке, часто используемых на практике. В их основу положена идея оценки производных сигнала по его отсчетам. Разложим исходную функцию в ряд Тейлора в окрестности точки kT_0 :

$$u(kT_0 + \tau) = u(kT_0) + \frac{\tau^1}{1!} u^{(1)}(kT_0) + \frac{\tau^2}{2!} u^{(2)}(kT_0) + \dots + \frac{\tau^{m+1}}{m+1!} u^{(m+1)}(kT_0) + o(\tau^{m+2}).$$

В качестве оценки производной возьмем разность соответствующего порядка. Для интерполяции между узлами используют первые несколько членов ряда, обычно не более двух. В результате получаются следующие формулы: $m = 0$ $\tilde{u}(kT_0 + \tau) = u(kT_0)$, $\tau \in [-T_0/2, T_0/2]$, $m = 1$ $\tilde{u}(kT_0 + \tau) = u(kT_0)(1 - \tau/T_0) + u(kT_0 + T_0)\tau/T_0$, $\tau \in [0, T_0]$, определяющие интерполяцию полиномом порядка m . Так, при $m = 0$ будем иметь восстановление ступенчатой функцией, а при $m = 1$ ломаной. В обоих случаях $\tilde{u}(kT_0) = u(kT_0)$. Примеры применения этих методов приведены на рис. 1. Квантование проводилось с периодом $T_0 = (2/5)\pi/\omega_s$, ошибка составляет 59.6 % (а) и 19.5 % (б). На основе вводимой ниже техники несложно показать, что такое восстановление эквивалентно низкочастотной фильтрации с передаточной функцией фильтра

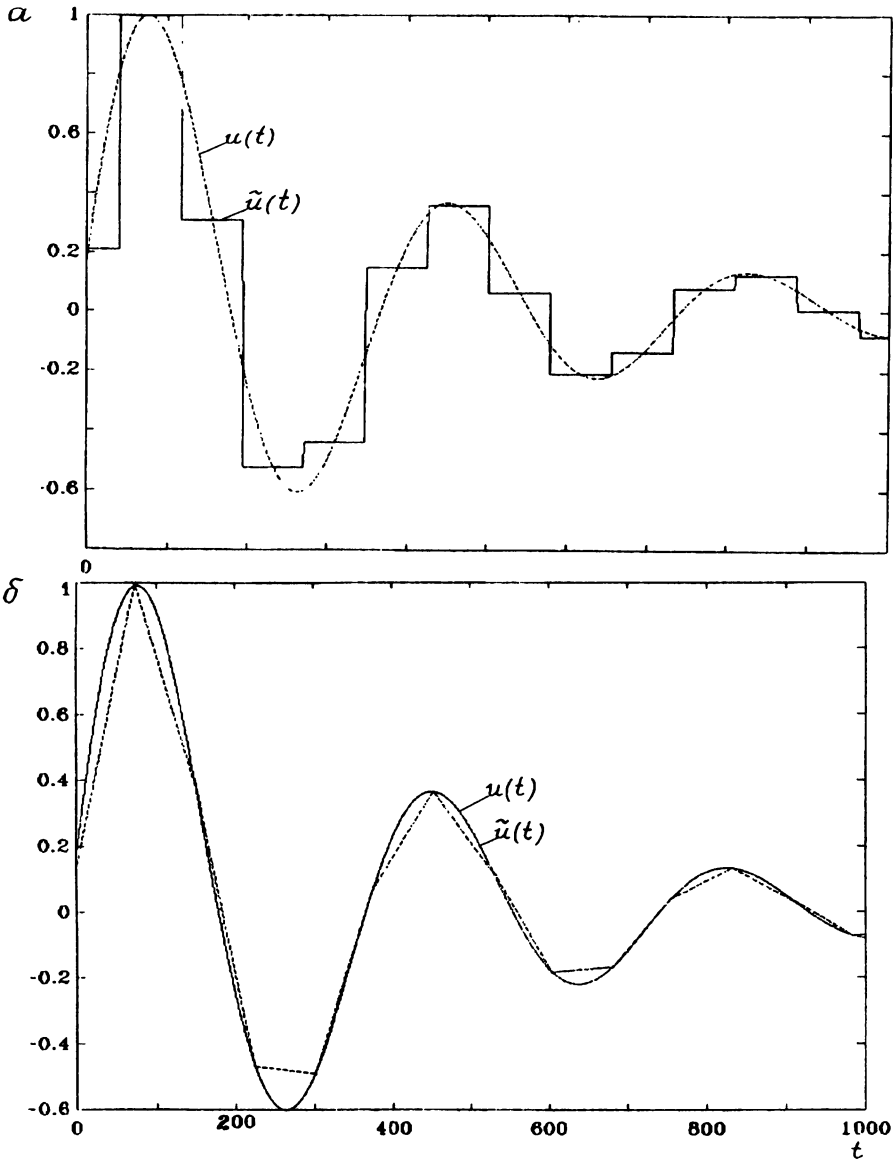


Рис. 1. Примеры восстановления функции интерполяционным сплайном: а - порядка $m = 1$; б - порядка $m = 2$

$$\left(\frac{\sin(\pi T_0 \omega)}{\pi T_0 \omega} \right)^m,$$

которая может рассматриваться как не очень удачное приближение идеально-го фильтра с частотой среза π / T_0 .

Основные свойства B -сплайнов и их описание при помощи интегральных преобразований

Введем необходимые для дальнейшего изложения определения и понятия, касающиеся сплайнов.

Определение 1. Полиномиальным сплайном S^{m+1} степени $m \in \mathbb{N}$ дефекта r ($0 < r \leq m$) на сетке $X = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ называется такая кусочно-полиномиальная функция, которая на любом промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ совпадает с некоторым алгебраическим полиномом степени не выше m и имеет $m - r$ непрерывных производных ($S^{m+1} \in C^{m-r}$).

В дальнейшем будем иметь дело только со сплайнами, заданными на равномерной сетке, т.е. на сетке с постоянным шагом $T_0 = x_{k+1} - x_k$.

Рассмотрим в пространстве функций с интегрируемым квадратом $L_2[a, b]$ подпространство $S^{m+1}[a, b]$ полиномиальных сплайнов степени m минимального дефекта, заданных на равномерной сетке $a = x_1 < x_2 < \dots < x_p = b$. Известно [1], что функции $1, x, x^2, \dots, x^m, (x - x_1)_+^m, \dots, (x - x_p)_+^m$, где

$$x_+^m = \begin{cases} x^m, & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

образуют базис в пространстве $S^{m+1}[a, b]$. Таким образом, размерность пространства $S^{m+1}[a, b]$

$$n = \dim S^{m+1}[a, b] = m + p + 1.$$

Определим функцию

$$B^m(x) = \frac{1}{T_0^m(m-1)!} \delta_{T_0}^m(x_+^{m-1}),$$

где $\delta_{T_0}^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{-k} C_m^k f(x + mT_0/2 - kT_0)$ — центральная разность.

Тогда после подстановки

$$B^m(x) = \frac{1}{T_0^m(m-1)!} \sum_{k=0}^m (-1)^{-k} C_m^k (x + mT_0/2 - kT_0)_+^{m-1}. \quad (1)$$

Полученная функция является линейной комбинацией базисных функций и, следовательно, определяет сплайн степени $m - 1$ дефекта 1 и называется B -сплайном. B -сплайн нулевой степени совпадает с характеристической функцией интервала $[-T_0/2, T_0/2]$:

$$B^1(x) = \chi_{[-T_0/2, T_0/2]},$$

где

$$\chi_{[-T_0/2, T_0/2]} = \begin{cases} 1/T_0, & \text{если } x \in [-T_0/2, T_0/2] \\ 0, & \text{если } x \notin [-T_0/2, T_0/2] \end{cases}.$$

Вернемся к подпространству $S[a, b]$. Рассмотрим сетку $X = \{x_k\}_{k=1}^p$, добавив m узлов справа и m узлов слева от точек a и b . Перенумеруем узлы и получим новую сетку $X' = \{x'_k\}_{k=1}^{p+2m}$. Можно доказать следующую теорему [1].

Теорема 1. B -сплайны $\{B(x - x_k')\}_{k=0}^{p+m}$ образуют базис в $S^{m+1}[a, b]$ с размерностью $n = p + m + 1$.

Приведем основные свойства B -сплайнов:

1. Конечность носителя

$$\text{supp} B^m(x) = (-mT_0 / 2, mT_0 / 2).$$

2. Положительность $B^m(x) \geq 0$.

3. Четность

$$B^m(x) = B^m(-x).$$

4. Условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} B^m(x) dx = 1.$$

Доказательство этих утверждений вытекает из выражения (1) или непосредственно из свойств центральных разностей.

Дальнейшее исследование проведем с использованием интегральных преобразований. Обозначим $\hat{f}(s) := \mathcal{L}\{f(x)\}$ — преобразование Лапласа от функции $f(x)$:

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-sx} dx.$$

Теорема 2. Преобразование Лапласа от B -сплайна имеет следующий вид:

$$B^m \hat{\gamma}(s) = \left\{ \frac{e^{T_0 s / 2} - e^{-T_0 s / 2}}{T_0 s} \right\}^m. \tag{2}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой о сдвиге оригинала

$$\mathcal{L}\{f(x - T_0)\} = \mathcal{L}\{f(x)\} e^{-sT_0}$$

и формулой $\mathcal{L}(x^k) = \frac{k!}{s^{k+1}}$. Тогда из выражения (1) получаем

$$\begin{aligned} B^m \hat{\gamma}(s) &= \frac{(-1)^m}{T_0^m (m-1)!} \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k \frac{(m-1)!}{s^m} e^{(k-m/2)T_0 s} = \\ &= \frac{(-1)^m e^{-msT_0/2}}{T_0^m} \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k e^{kT_0 s} = \left\{ \frac{e^{T_0 s / 2} - e^{-T_0 s / 2}}{T_0 s} \right\}^m. \end{aligned}$$

Подстановка $s = 2\pi i \omega$ в выражение (2) дает формулу для преобразования Фурье B -сплайна:

$$B^m \hat{\gamma}(\omega) = \left(\frac{\sin(\pi T_0 \omega)}{\pi T_0 \omega} \right)^m.$$

Найдем производную от B -сплайна.

Теорема 3. Производная от B -сплайна $(B^m(x))^{(k)}$ является сплайном порядка $m - k$

$$(B^m(x))^{(k)} = \delta_{T_0}^k B^{m-k}(x).$$

Доказательство. Необходимо воспользоваться свойством преобразования Лапласа

$$\mathcal{L}\{f(x)^{(k)}\} = s^k \mathcal{L}\{f(x)\}$$

и формулой для вычисления конечной разности $\delta_{T_0}^k$. Окончательный результат следует непосредственно из теоремы 2.

Из теоремы 2 и теоремы о преобразовании Лапласа от свертки

$$\mathcal{L}\{f_1(x) * f_2(x)\} = \mathcal{L}\{f_1(x)\} \mathcal{L}\{f_2(x)\}$$

вытекает следующий факт:

Теорема 4. B -сплайн $B^m(x)$ является сверточной степенью сплайна $B^1(x)$ или с учетом $B^1(x) = \chi_{[-T_0/2, T_0/2]}$,

$$B^m(x) = B^{m-1}(x) * \chi_{[-T_0/2, T_0/2]}. \quad (3)$$

Отметим, что некоторые авторы используют равенство (3) в качестве определения B -сплайнов.

Займемся теперь описанием B -сплайнов в узлах. Вычислим Z -преобразование от B -сплайна

$$B^{m\wedge}(z) := \mathcal{Z}\{B^m(x)\} = \sum_k B^m(kT_0) z^{-k}.$$

Теорема 6. Z -преобразование от B -сплайна имеет вид

$$B^{m\wedge}(z) = \frac{z^{1-m/2} R_{m-1}(z)}{T_0(m-1)!},$$

где $R_k(z) = \sum_{j=1}^k C_k^j (z-1)^{j-1} R_{k-j}(z)$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой о сдвиге оригинала Z -преобразования

$$\mathcal{Z}\{f(x - kT_0)\} = z^{-k} \mathcal{Z}\{f(x)\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} B^{m\wedge}(z) &= \frac{z^{-m/2}}{T_0^m(m-1)!} \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_m^k z^k F_{m-1}(z) = \\ &= \frac{F_{m-1}(z)}{T_0^m(m-1)!} (z-1)^m. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь введено обозначение

$$\mathcal{Z}\{x^k\} := F_k(z).$$

Для вычисления $F_k(z)$ воспользуемся формулой [2], связывающей известное преобразование Лапласа функции $f(t)$ с Z -преобразованием последовательности $f(kT_0)$:

$$F_k(z) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \frac{1}{1 - e^{-T_0 s}} \Big|_{z=e^{T_0 s}}.$$

Теперь, взяв производные, можно получить общее выражение

$$F_k(z) = \frac{T^k z}{(z - 1)^{k+1}} R_k(z). \tag{5}$$

Подстановка (5) в (4) дает окончательный результат:

$$\begin{aligned} B^m(z) &= \frac{F_{m-1}(z) z^{-m/2}}{T_0^m (m-1)!} (z-1)^m = \\ &= \frac{z^{-m/2} (z-1)^m}{T_0^m (m-1)!} \frac{T_0^{m-1} z}{(z-1)^m} R_{m-1}(z) = \frac{z^{1-m/2} R_{m-1}(z)}{T_0 (m-1)!}. \end{aligned}$$

Приведем несколько первых полиномов $R_k(z)$:

$$\begin{aligned} R_0(z) &= 1, R_1(z) = 1, R_2(z) = z + 1, R_3(z) = z^2 + 4z + 1, \\ R_4(z) &= z^3 + 11z^2 + 11z + 1. \end{aligned}$$

Сформулируем теперь ряд утверждений, касающихся приближения функций сплайнами. Классическая постановка задачи заключается в восстановлении функции по выборке ее значений $\{u(kT_0)\}_k$ сплайном.

Определение 2. Интерполяционным сплайном $(\mathcal{J}_i^m u)(t)$ функции $u(t)$ называется сплайн, совпадающий в узлах с исходной функцией

$$(\mathcal{J}_i^m u)(kT_0) = u(kT_0).$$

Можно показать, что коэффициенты интерполяционного сплайна u_k^i задаются уравнениями

$$u(jT_0) = \sum_k u_k^i B^m((j-k)T_0),$$

или с использованием Z -преобразования

$$\tilde{u}^i(z) = u \hat{(z)} / B^m \hat{(z)},$$

где $\tilde{u}^i(z) = \sum_k u_k^i z^{-k}$ — Z -преобразование последовательности $\{u_k^i\}_k$.

Определение 3. Локальным B -сплайном $(\mathcal{J}_0^m u)(t)$ называется функция вида

$$(\mathcal{J}_0^m u)(t) = \sum_k u(kT_0) B^m(j-k)T_0.$$

В этом случае коэффициенты B -сплайна совпадают со значениями исходной функции в узлах.

Получены оценки [3, 4] для ошибок аппроксимации этими сплайнами

$$\| | u(t) - (\mathcal{J}_i^m u)(t) \| \infty \leq K_i T_0^m \| | u^{(m)}(t) \| \infty$$

$$\| | u(t) - (\mathcal{J}_0^m u)(t) \| \infty \leq K_0 T_0^2 \| | u^{(2)}(t) \| \infty.$$

Локальные сплайны первого и второго порядка являются интерполяционными (см. рис. 1).

Аппроксимация непрерывных функций в базисе B -сплайнов

Рассмотрим $S^m(\mathbb{T})$ подпространство B -сплайнов, натянутое на базис $\{B_k^m; B_k^m(t) = B^m(t - kT_0)\}_{k \in \mathbb{K}}$, где \mathbb{K} — индексное множество мощности n такое, что если $k \in \mathbb{K}$, то $kT_0 \in \mathbb{T}$. Известно, что выбрав n достаточно большим, а T_0 достаточно малым, можно получить произвольно точное представление функции.

Введем оператор проектирования $\mathcal{J}_{T_0}^m: L_2(\mathbb{T}) \rightarrow S^m(\mathbb{T})$. Найдем ортогональную проекцию $\tilde{u}(t)$ функции $u(t)$ на подпространство $S^m(\mathbb{T})$. Результат разложим по базису $\{B_k\}_{k \in \mathbb{K}}$:

$$\tilde{u}(t) = \sum_k u_k B(t - kT_0).$$

Теорема 7. Коэффициенты разложения u_k по базису B -сплайнов ортогональной проекции $\tilde{u}(t)$ произвольной функции $u(t) \in L_2(\mathbb{T})$ на подпространство $S^m(\mathbb{T})$ определяются из следующей системы уравнений

$$(I_B^m u)(jT_0) = \sum_k u_k B^{2m}(j-k)T_0, \quad j \in \mathbb{K}, \quad (6)$$

где $(I_B^m u)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) B^m(\tau - t) d\tau$ — интеграл свертки.

Доказательство. Для ортогональной проекции $\tilde{u}(t)$ функции $u(t)$ выполняется условие минимума квадрата нормы ошибки

$$J = \| | u(t) - \tilde{u}(t) \| |_{L_2}^2,$$

т.е. u_k должны быть выбраны так, что

$$\frac{\partial J}{\partial u_j} = 0.$$

Вычислим частные производные и приравняем их нулю:

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} (u(t) - \tilde{u}(t)) \frac{\partial}{\partial u_j} \tilde{u}(t) dt = 0.$$

С учетом того, что

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \tilde{u}(t) = B^m(t - jT_0),$$

получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) B^m(t - jT_0) dt = \sum_k u_k \int_{-\infty}^{\infty} B^m(t - kT_0) B^m(t - jT_0) dt,$$

а так как $\int_{-\infty}^{\infty} B^m(\tau - t) B^m(\tau) d\tau = B^{2m}(t)$, приходим к окончательному результату.

Перепишем равенство (6) в матричной форме

$$\hat{U} = \mathbf{B}t_{2m} \mathbf{U}, \tag{7}$$

где $\hat{U} := ((I B^m u)(jT_0))_{j=\overline{1, n}}$, $\mathbf{U} := (u_j)_{j=\overline{1, n}}$, $\mathbf{B}t_{2m} := (B_{i-j}^{2m})_{i, j=\overline{1, n}}$ — теплицева матрица. Так как матрица $\mathbf{B}t_{2m}$ не особая, то всегда существует решение уравнения (7):

$$\mathbf{U} = (\mathbf{B}t_{2m})^{-1} \hat{U}.$$

С использованием формализма Z-преобразования уравнение (7) может быть представлено как:

$$\mathfrak{Z}\{u \hat{s} B^m \hat{s}\} = \tilde{u}(z) B^{2m}(z),$$

где $\tilde{u}(z) = \sum_k u_k z^{-k}$ — Z-преобразование последовательности $\{u_k\}_{k \in \mathbb{K}}$. Здесь запись $\mathfrak{Z}\{f \hat{s}\}$ фактически означает вычисление Z-преобразования от последовательности $f(kT_0)$, полученной из $f(t)$ квантованием по ее преобразованию Лапласа $f \hat{s}$.

Анализ частоты квантования

Для дискретизации функции необходимо определить шаг сетки, при котором максимальное отклонение функции от ее оценки не превышало бы заданного.

Как уже отмечалось, достаточная частота квантования при восстановлении функции $\sin c$ -рядом должна равняться удвоенной максимальной частоте, содержащейся в спектре функции. Однако из-за невозможности реализации идеального низкочастотного фильтра точное восстановление невозможно. Кроме того, все функции с конечным носителем имеют бесконечный спектр. Поэтому в практических задачах для достижения заданной точности приходится увеличивать в несколько раз частоту квантования по сравнению с теоретически необходимой. В то же время использование аппроксимации сплайнами позволяет, не увеличивая частоту квантования, получать приемлемую точность восстановления.

Докажем теорему об ошибке аппроксимации функции в базе B-сплайнов.

Теорема 8. Пусть дана функция $u(t) \in C^\infty(\Pi)$. Тогда ошибка ее аппроксимации функцией $\tilde{u}(t) \in S^m(\Pi)$ ограничена по норме $\| \cdot \|_\infty$ ($\|f(t)\|_\infty = \max |f(t)|$):

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_\infty \leq K_m T_0 \|u^{(m)}(t)\|_\infty.$$

Доказательство. Обозначим $e(t)$ функцию ошибки:

$$e(t) := u(t) - \tilde{u}(t),$$

тогда согласно теореме 7, имеет место следующее условие для $e(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e(t) B^m(t - jT_0) dt = 0, \quad j \in \mathbb{K}.$$

Введем обозначение

$$\hat{e}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\theta) B^m(\theta - t) d\theta.$$

Из условия $\hat{e}(jT_0) = 0$ для всех $j \in \mathbb{K}$ и $B^m(t) \geq 0$ следует, что существует такое $t_0 \in [jT_0 - mT_0/2, jT_0 + mT_0/2]$, где $e(t_0) = 0$. Таким образом, функция имеет на каждом промежутке длиной mT_0 , как минимум, один ноль и расстояние между нулями не превосходит $2mT_0$.

По теореме Ролля между двумя нулями функции существует точка, в которой ее производная обращается в ноль. Пусть $e(t_0) = 0$, тогда найдется такое число $0 \leq \tau \leq mT_0$, где $e^{(1)}(t_0 + \tau) = 0$. Разложим функцию $e(t)$ в ряд Тейлора в окрестности $t = t_0$.

$$\begin{aligned} e(t_0 + t) &= e(t_0) + \frac{t^1}{1!} e^{(1)}(t_0) + \frac{t^2}{2!} e^{(2)}(t_0) + \\ &+ \dots + \frac{t^n}{n!} e^{(n)}(t_0) + o(t^{n+1}). \end{aligned} \quad (8)$$

Вычислим производную от этого ряда в точке $t = t_0 + \tau$. Если сумма ряда (8) сходится к $e(t_0 + t)$, то его производная сходится к $e^{(1)}(t_0 + t)$:

$$\begin{aligned} e^{(1)}(t_0 + \tau) &= e^{(1)}(t_0) + \frac{\tau^1}{1!} e^{(2)}(t_0) + \frac{\tau^2}{2!} e^{(3)}(t_0) + \\ &+ \dots + \frac{\tau^{n-1}}{n-1!} e^{(n)}(t_0) + o(\tau^n). \end{aligned}$$

Поскольку $e^{(1)}(t_0 + \tau) = 0$, то можно выразить из предыдущего равенства $e^{(1)}(t_0)$ через производные высших порядков и подставить в исходное разложение:

$$\begin{aligned} e(t_0 + \tau) &= e^{(2)}(t_0) \tau^2 \left(\frac{1}{2!} - 1 \right) + e^{(3)}(t_0) \tau^3 \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!} \right) + \\ &+ \dots + e^{(n)}(t_0) \tau^n \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} \right) + o(\tau^{n+1}). \end{aligned}$$

Повторим эту процедуру еще $m - 2$ раза:

$$e(t_0 + \tau) = K_m \tau^m e^{(m)}(t_0) + K_{m+1} \tau^{m+1} e^{(m+1)}(t_0) + \dots + K_n \tau^n e^{(n)}(t_0) + o(\tau^{n+1}).$$

Теперь, с учетом того, что $(B^m(x))^{(m)} = 0$, получим окончательный результат для оценки ошибки аппроксимации

$$\|u(t) - \sum_k u_k B(t - kT_0)\|_\infty \leq K_m T_0^m \|u^{(m)}(t)\|_\infty.$$

Несложно показать, что с ростом m коэффициент $K_m T_0^m$ будет стремиться к нулю. Этот факт дает теоретическое обоснование уменьшения ошибки аппроксимации при возрастании порядка сплайна. На рис.2 приведены графики зависимости ошибки от шага квантования для различных сплайнов. В качестве исходной была взята функция $u(t) = \sin(\omega_s t)$. Таким образом, при задан-

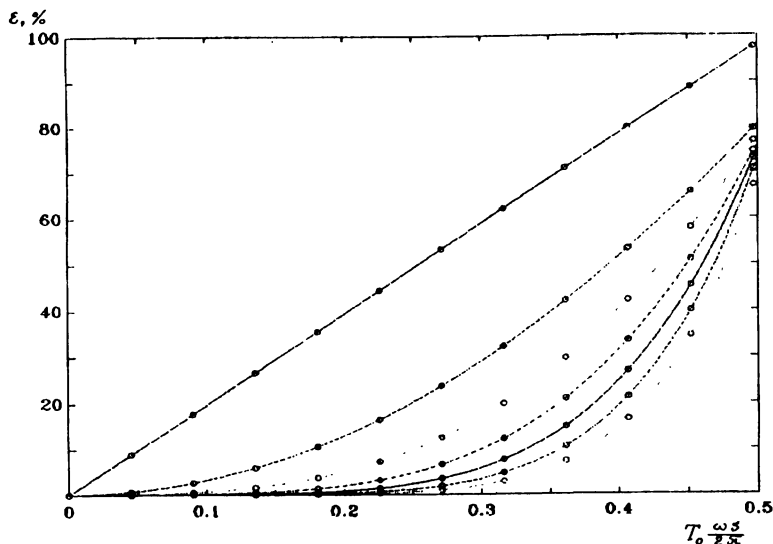


Рис. 2. Зависимость ошибки аппроксимации сплайном функции от шага квантования для порядков $m = 1 - 7$

ном T_0 ошибка может быть произвольно уменьшена. Однако шаг квантования не должен превышать $2\pi / \omega_s$, поскольку любая периодическая функция с частотой $\omega_s = 2\pi / T_0$ переводится оператором $\mathcal{Y}_{T_0}^m$ в константу, и, следовательно, не может быть восстановлена.

Замечания по поводу реализации алгоритма

Реализация алгоритма дискретизации сводится к выбору шага и порядка сплайна в соответствии с теоремой 8 в зависимости от гладкости исходной функции и требуемой точности. Повышение порядка позволяет увеличить точность и уменьшить частоту квантования. Для приближенной оценки можно воспользоваться графиками, приведенными на рис. 2.

Свертка $(I_B^m u)(t)$ должна вычисляться аналоговым (не цифровым) путем. Используя формулу (2), нетрудно показать, что для получения величин

$(I_B^m u)(kT_0)$ необходимо взять m -раз проинтегрированную функцию $u(t)$ и вычислить центральную разность порядка m .

Окончательный результат находится путем решения системы линейных уравнений (7) с треплицевой матрицей. При малой размерности n матрицы можно использовать процедуры точного обращения [5]. В случае больших n лучше воспользоваться приближением фильтра с бесконечной импульсной характеристикой $1/B^{2m}(z)$ фильтром с конечной импульсной характеристикой, тогда результат может быть получен из последовательности $\{(I_B^m u)(kT_0)\}_k$ путем свертки.

Пример аппроксимации функции сплайном порядка $m = 7$ показан на рис.3. Ошибка аппроксимации составляет 9.2 % при шаге квантования $T_0 = (2/3)\pi/\omega_s$.

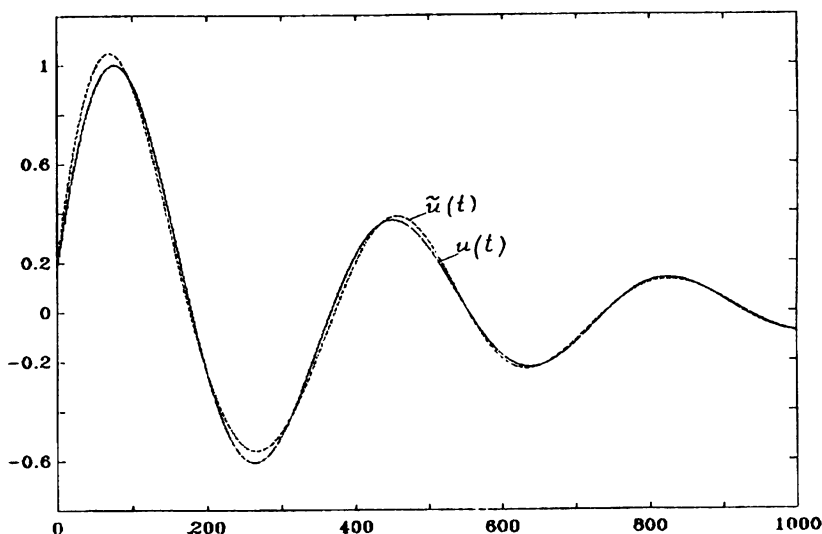


Рис. 3. Пример аппроксимации функции сплайном порядка $m=7$

Обсуждение результатов

Применение сплайн-аппроксимации для решения задачи квантования позволяет существенно сократить число отсчетов при значительно меньших ошибках восстановления, чем при использовании традиционных методов. Так, в рассматриваемом примере использование сплайна $m = 7$ вместо $m = 2$ (ломаная) позволяет сократить необходимое число отсчетов в 1.7 раз при уменьшении ошибки в два раза. При этом реализация не требует больших затрат. Кроме того, существенно возрастает устойчивость к случайному шуму, всегда присутствующему в данных. Оценку фильтрующих свойств можно дать, если учесть, что перед квантованием выполняется свертка с $B^m(t)$, т.е. фильтрация с передаточной функцией фильтра $B^m(\omega)$. Тем самым ослабляются высокие частоты, вносимые шумом, которые при квантовании за счет периодического продолжения спектра оказываются в области частот полезного сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малоземов В.Н., Певный А.Б. Полиномиальные сплайны. - Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986.
2. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Пер. с немецкого. - М.: Наука, 1965.
3. Schonberg I.J. On spline functions. Inequalities. N.Y.: Acad. Press, 1967.
4. Butzer P.L., Stens R.L., Splettstoesser W. The sampling theorem and linear prediction in signal analysis. Jahresber. Deutsch Math.-Verein., 90(1988), 1-70.
5. Zohar Sh. Toeplitz Matrix Inversion: The Algorithm of W.F. Trench. // J. Assoc. Comput. Mach. - V. 16.-P. - 592-601.

Рукопись поступила 13.06.91