

Отрыв капли от капилляра под действием силы тяжести
А.И. Григорьев, А.А. Земсков, С.О. Ширяева // Научное приборостроение. — 1991. — Т. 1. — № 2. — С. 50-58.

В связи с разработкой новых технологий стал актуальным вопрос о механизме отрыва капли жидкости от капилляра, по которому жидкость подается. Внимательное рассмотрение существовавших до недавнего времени представлений показало, что они основаны на полуфеноменологическом подходе, разработанном еще в прошлом столетии. Тогда как в настоящее время появилась возможность строгого теоретического анализа явления на основе принципа минимума свободной энергии. Численный анализ на ЭВМ нелинейного уравнения Эйлера, к которому сводится задача об определении равновесной формы капли, висящей на срезе капилляра, показал, что собственно отрыв капли представляет собой неравновесный процесс и использование условия баланса сил на пределе отрыва капли, как это делалось ранее, неправомерно. Рассчитаны равновесные формы капель для различных значений отношения капиллярной постоянной жидкости к радиусу капилляра. Из принципа наименьшего действия найдены критические условия отрыва капли. Библ. — 13 назв. Ил. — 4.

А.И. Григорьев, А.А. Земсков, С.О. Ширяева
(Ярославский государственный университет)

ОТРЫВ КАПЛИ ОТ КАПИЛЛЯРА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

1. Явление отрыва капли от капилляра, по которому жидкость подается, используется в разнообразных приборах, устройствах и аппаратах: при электроструйной печати, жидкостной масс-спектрометрии, электроокраске, в химической технологии (см., например, [1-5] и указанную там литературу). Кроме того, явление отрыва капли от капилляра лежит в основе наиболее простого и достаточно точного метода определения коэффициента поверхностного натяжения, успешно применяемого в химической, биологической и медицинской практике [6]. Недавно [7] на основе обсуждаемого явления предложен метод определения вязкости жидкости. Однако, несмотря на такое широкое использование, ясности в механике самого акта отрыва капли от капилляра нет.

Существующие представления о механизме явления созданы в конце прошлого века Рэлеем и основаны на идее баланса сил, удерживающих каплю, $2\pi r_n \sigma$, и сил, отрывающих ее (в простейшем случае mg)

$$2\pi r_n \sigma = mg,$$

где r_n — радиус перетяжки, связывающей отрывающуюся каплю с капилляром; σ — коэффициент поверхностного натяжения; m — масса отрывающейся капли; g — ускорение силы тяжести. Но, как показала практика [6], условие баланса сил на пределе отрыва, как правило, не выполняется, и для практического использования этого условия, которое представлялось физически весьма прозрачным, Ганкинс и Браун [6] ввели в условие баланса дополнительный эмпирический множитель, величина которого зависит от отношения радиуса капилляра к радиусу оторвавшейся капли. Собственно говоря, то обстоятельство, что условие баланса сил на пределе отрыва капли не выполняется, было известно и Рэлею, который объяснял это не учитываемым гидростатическим давлением жидкости в капилляре.

В последнее время, в связи с разработкой новых технологий появился целый ряд работ, посвященных различным аспектам явления отрыва капли от капилляра при учете действующих сил разной природы (см., например, [7-13]). Однако в большинстве работ рассмотрение носит либо частный характер, либо используются весьма грубые приближения и модели. Так, в [11] исследуется отрыв жидкометаллических капель под действием сил магнитного поля. Однако задача решается в размерных переменных, что ограничивает область применимости полученных результатов.

В [10] рассматривается механизм роста и отрыва осесимметричных капель и газовых пузырей, получено уравнение поверхности в параметрическом виде, однако в качестве условия отрыва без обоснования берется условие баланса сил в перегрузке (так же, как и в [7-9]), которое, как уже отмечалось, дает значительную погрешность в определении объема отрывающихся капель. К тому же использование авторами [10] размерных переменных не позволяет говорить о какой-либо общности полученных результатов.

Отрыв капли от капилляра гравитационным и электрическим полями рассматривается в работах [12, 13]. Однако эти работы могут претендовать лишь на качественное описание этого явления, так как в них используется ряд достаточно грубых допущений: 1) предполагается, что нижняя часть капли имеет сферическую форму; 2) в качестве условия отрыва используется условие равенства сил, действующих на каплю, которое для равновесной поверхности может и не выполняться.

В связи со сказанным, в настоящей работе предпринята попытка разобраться в механизме отрыва капли от капилляра, исходя из принципа минимума свободной энергии системы при $T = \text{const.}$, $V = \text{const.}$

2. Пусть по вертикальному капилляру радиуса R подается жидкость плотности ρ . И пусть скорость подачи жидкости настолько мала, что объем висящей на срезе капилляра капли можно считать постоянным хотя бы в течение интервала времени порядка нескольких периодов собственных колебаний основной ее моды. Равновесная форма поверхности такой капли в любой момент времени определится условием минимальности суммы ее энергии в поле сил тяжести и энергии сил поверхностного натяжения:

$$u = \sigma \int_S dS - \rho g \int_V X dV \quad (1)$$

при дополнительном условии постоянства на оговоренном временном интервале объема капли:

$$\int_V dV = V^0 = \text{const.} \quad (2)$$

В (1) первое слагаемое дает поверхностную энергию, второе — потенциальную энергию капли в поле сил тяжести, если начало системы координат помещено на срезе капилляра, а ось абсцисс направлена вниз (рис. 1).

Введем капиллярную постоянную жидкости $\alpha \equiv \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}}$ и, учитывая осевую симметрию задач, выражения (1) и (2) запишем в виде

$$u = \pi \rho g \int_0^X v \left[\alpha^2 \sqrt{1 + \dot{y}^2} - xy \right] dX; \quad (3)$$

$$\pi \int_0^{X_m} y^2 dX = V^0 = \text{const}, \quad (4)$$

где X_m — нижняя точка капли (см. рис. 1).

Уравнение Эйлера для вариационной задачи (3)-(4) имеет вид

$$\ddot{y} \dot{F}_{\dot{y}\dot{y}}^* + \dot{y} \ddot{F}_{y\dot{y}}^* + \ddot{F}_{x\dot{y}}^* - \dot{F}_y^* = 0; \quad (5)$$

$$F^* \equiv F - \lambda G = y \left[\alpha^2 \sqrt{1 + \dot{y}^2} - xy \right] - \lambda y^2,$$

где λ — неопределенный множитель Лагранжа. Вычисляя все производные в (5), получим дифференциальное уравнение Эйлера в явной форме

$$y \ddot{y} = (1 + \dot{y}^2) \left[1 - \frac{2y}{\alpha^2} (x + \lambda) \sqrt{1 + \dot{y}^2} \right]. \quad (6)$$

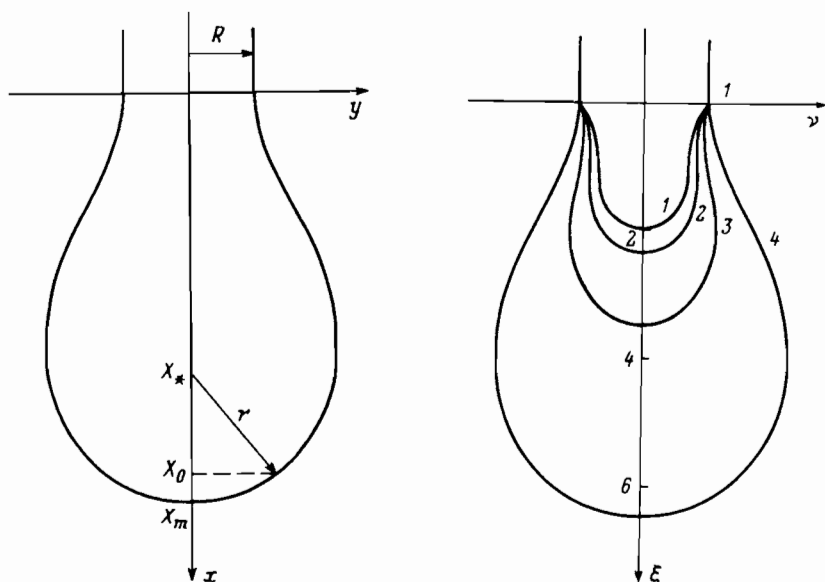


Рис. 1. Схематическое изображение капли, висящей на срезе капилляра, в системе декартовых координат с началом на срезе капилляра

Рис. 2. Предельные равновесные формы капель, висящих на срезе капилляра:

1 — $a = 1$; 2 — $a = 1.265$; 3 — $a = 2$; 4 — $a = 5$

Граничное условие к уравнению (6) при $x = 0$ имеет вид

$$y(0) = R.$$

Граничное условие на нижнем конце при $x = X_m$ записывается сложнее. Здесь искомая кривая $y(x)$ пересекает ось абсцисс перпендикулярно последней, т.е. при $x = X_m$ должно выполняться условие трансверсальности

$$F^* - (\dot{y}(x) - \tilde{y}) \dot{F}_y^* = 0, \quad (7)$$

где $\tilde{y} = 0$ — уравнение оси абсцисс, т.е. $\dot{\tilde{y}} = 0$.

Подставляя F^* и \dot{F}_y^* в (7), получаем

$$(X_m + \lambda) y^2(X_m) = \frac{\alpha^2 y(X_m)}{\sqrt{1 + \dot{y}_m^2}}. \quad (8)$$

Теперь учтем, что $y(X_m) = 0$, а $\dot{y}(X_m) \rightarrow \infty$, и выражение (8), вообще говоря, содержит неопределенность. Чтобы как-то обойти ее, предлагается заменить искомую кривую $y(x)$, начиная с некоторой точки $x = x_0$, степень близости которой к $x = X_m$ определится лишь с точностью машинного счета, окружностью с радиусом кривизны, совпадающим с радиусом кривизны искомой кривой $y(x)$ при $x = x_0$. Такая замена представляется приемлемой, так как из экспериментальных наблюдений известно, что на нижнем конце форма капли достаточно близка к сферической. Радиус r и центр аппроксимирующей окружности X_* легко находятся из элементарного геометрического построения

$$r = - \frac{y(x_0)}{\cos(\arctg \dot{y}(x_0))}; \quad X_* = X_0 - \sqrt{r^2 - y^2(x_0)}.$$

В итоге искомая кривая, описывающая равновесную форму капли, висящей на капилляре, будет иметь вид

$$y(x) = \begin{cases} y(x), & \text{при } 0 \leq x \leq y; \\ \sqrt{r^2 - (x - X_m)^2}, & \text{при } X_0 \leq x \leq X_m. \end{cases} \quad (9)$$

Тогда, подставляя (9) в условие трансверсальности (8), найдем

$$X_m = \frac{\alpha^2}{r} - \lambda.$$

Перейдем теперь к безразмерным переменным

$$\xi \equiv \frac{x}{R}; \quad v \equiv \frac{y}{R}; \quad \zeta \equiv \frac{r}{R}; \quad a \equiv \frac{\alpha}{R}; \quad \chi \equiv \frac{\lambda}{R}$$

и выпишем решаемую экстремальную задачу в окончательном виде

$$wv = (1 + v^2) \left[1 - \frac{2v}{a} - (\xi + \chi) \sqrt{1 + v^2} \right]; \quad (10)$$

$$v(0) = 1; \quad (11)$$

$$\xi_m = \frac{a^2}{\zeta} - \chi; \quad (12)$$

$$\int_0^{\xi_m} v^2 d\xi = \frac{V^0}{\pi R^3} = \text{const.} \quad (13)$$

Эта задача нелинейная и должна считаться численно на ЭВМ.

При численных расчетах кроме формы поверхности капли, висящей на капилляре, будем находить также полную свободную энергию жидкости (см. выражение (3)), а также в каждой точке поверхности проверять условие баланса сил, удерживающих и отрывающих каплю:

$$2\pi\sigma y_n \cos \theta = \rho g \pi \int_{X_n}^{X_m} y^2 dx + \pi y_n^2 \rho g x_n \quad (14)$$

Здесь $y_n \equiv y(X_n)$ и X_n — ордината и абсцисса точки, для которой проверяется условие баланса сил. В левой части уравнения (14) стоит проекция силы поверхностного натяжения на ось абсцисс, удерживающей жидкость, θ — угол наклона касательной к поверхности жидкости. Первое слагаемое в правой части соответствует весу жидкости, расположенной ниже точки X_n , второе — гидростатическое давление столба жидкости, находящейся над рассматриваемой точкой. В безразмерных переменных (14) имеет вид

$$a^2 v_n \cos \theta = \int_{\xi_n}^{\xi_m} v^2 d\xi + \pi v_n^2 \xi_n.$$

3. В результате численных расчетов на ЭВМ были получены формы капель для разных значений объема жидкости V^0 и разных значений a . Было установлено, что для каждого значения a существует некий предельный максимальный объем V_{\max}^0 , для которого система (10)–(13) имеет решение. Для объемов,

больших V_{\max}° , система (10)–(13) решений не имеет. С физической точки зрения это означает, что при объемах, больших V_{\max}° , не существует устойчивых равновесных форм, жидкость становится неустойчивой, и начинается процесс динамического отрыва капли от капилляра. Формы предельных поверхностей для $a = 1$, $a = 1.265$, $a = 2$, $a = 3.9$, $a = 5$ приведены на рис. 2.

Интересными являются результаты проверки условия баланса сил для жидкости с максимальным объемом V_{\max}° для разных a . Оказалось, что при $a > 1.265$ для максимального устойчивого объема ни в одной точке поверхности капли силы, отрывающие каплю, не превосходят сил, ее удерживающих. Для $a < 1.265$ существует такое $x = X_*$, при котором выполняется условие отрыва: силы, отрывающие каплю, больше сил удерживающих. Очевидно, для $a > 1.265$ условие равенства сил начинает выполняться только после развития неустойчивости. Теперь становится понятным источник большой погрешности при экспериментальном определении коэффициента поверхностного натяжения из условия баланса сил в перетяжке, соединяющей каплю с капилляром.

При построении зависимости полной свободной энергии виссящей капли от ее объема выяснилось, что по мере увеличения объема от нуля свободная энергия вначале уменьшается, проходит через минимум, а затем увеличивается, достигая максимума при $V = V_{\max}^{\circ}$. Это обстоятельство позволяет предложить новый метод теоретического определения объема отрывающейся капли: по результатам численных расчетов для разных объемов строится график зависимости энергии от объема $u = u(V)$. Графики таких зависимостей для $a = 1$, $a = 1.265$, $a = 3.9$, $a = 5$ приведены на рис. 3. Из графиков видно, что для каждого значения a существуют две выделенные точки кривой: точка с максимальным объемом (V_{\max} , E_0) и точка с минимальной энергией (V_r , E_{\min}). Из этого факта можно предположить, что при отрыве капли в силу принципа наименьшего действия система должна переходить в состояние с минимальной энергией, т.е. в точку (V_r , E_{\min}). Тогда объем оторвавшейся капли будет равен:

$$V_f = V_{\max} - V_r.$$

Полученные таким образом значения V_f сравнивались с экспериментальными на основе эталонной таблицы значений множителя f [6]. Оказалось, что результаты теоретического расчета полностью совпадают с данными экспериментов в пределах погрешности экспериментов. На основе расчета V_f для всего интервала a была построена кривая зависимости $V_f = V_f(a)$, приведенная на рис. 4.

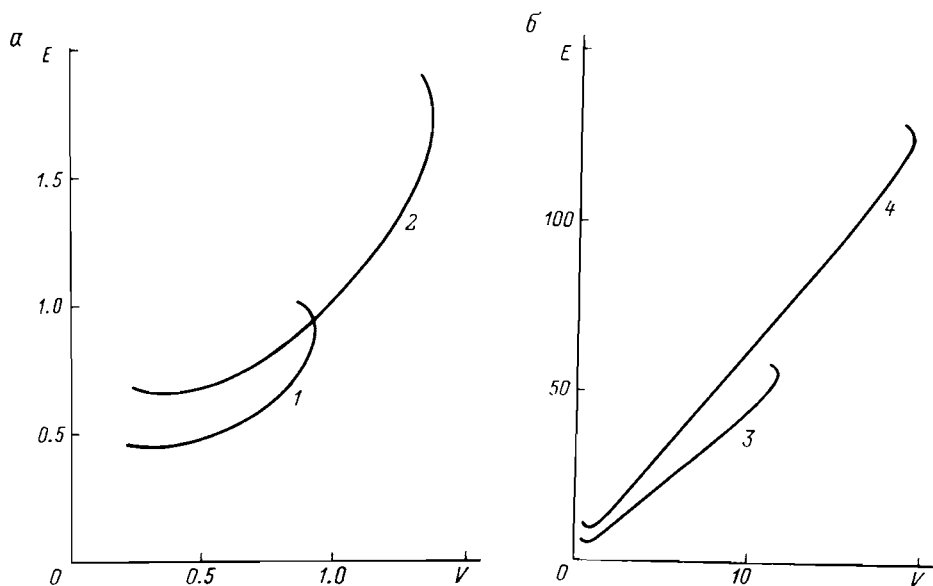


Рис. 3. Зависимость полных свободных энергий капли, висящей на срезе капилляра, от ее объема:

1 — $a = 1$; 2 — $a = 1.265$; 3 — $a = 3.9$; 4 — $a = 5$

Сказанное выше позволяет более ясно осознать физическую суть цитированного метода определения коэффициента поверхностного натяжения (точнее говоря, капиллярной постоянной жидкости). Да и сама процедура упрощается и становится более прозрачной. Все необходимые измерения теперь сводятся к определению массы одной отрывающейся капельки. Плотность жидкости обычно известна с высокой точностью, поэтому несложно найти объем капли, и на рис. 4 значение $a \equiv \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g R}}$. Отсюда для коэффициента поверхностного натяжения легко найти

$$\sigma = \frac{a^2 \rho g R}{2}.$$

А так как радиус капилляра R и плотность жидкости ρ известны, то процедура нахождения σ сводится к арифметике.

Описанный выше метод может легко быть применен и для улучшения экспериментов по измерению вязкости жидкости, описанному в [7], в частности, для определения объема отрывающихся капель при бесконечно малом расходе жидкости в капилляре в [7] применяется приближенная формула Ландо и Окли. Поэтому, если вместо нее использовать данные проведенного расчета, то точность определения коэффициента вязкости повысится.

В заключение следует отметить, что решения системы (10)–(13) существуют не для любых малых значений параметра a , и

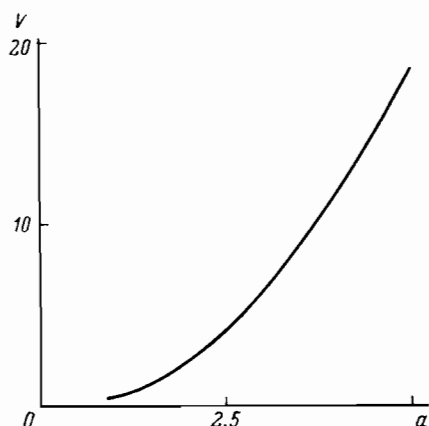


Рис. 4. Зависимость объема оторвавшейся капли от отношения радиуса капилляра к капиллярной постоянной жидкости

при $a \leq 0.59$ эта система решений не имеет ни для каких значений объемов. Физический смысл этого обстоятельства достаточно очевиден: когда радиус капилляра достаточно велик по сравнению с капиллярной постоянной жидкости, мениск жидкости на срезе капилляра неустойчив (в смысле неустойчивости Тейлора) по отношению к возбуждению в нем капиллярных волн с характерным линейным размером порядка капиллярной постоянной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Baily A.Y. Electrostatic spraying of liquid // Phys. Bull. — 1984. — V. 35. — N 4. — P. 146-148.
2. Ahire D.V., Kamra A.K. Production of charged monodisperse water droplets by electrical dispersion // Mausam. — 1984. — V. 35. — N 1. — P. 27-32.
3. Ширяева С.О. Дробление капель проводящих жидкостей в электрических полях: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук/ Одесский гос. ун-т, 1989. — 16 с.
4. Сыщиков Ю.В. Электродиспергирование фаз в процессе жидкостной экстракции: Автореф. дис. канд. техн. наук/ Лен. техн. ин-т, 1987. — 20 с.
5. Нагорный В.С., Безруков В.И. Исследования эмиссии капель в электростатическом поле // Магнитн. гидродин. — 1980. — № 3. — С. 111-117.
6. Адам К.К. // Физика и химия поверхностей. М.: Химия, 1947. — 552 с.
7. Watanabe J. Growth and breakaway of viscous liquid drops // Japanese J. Appl. Phys. — V. 27. — N 3. — 1988. — P. 434-437.
8. Wilson S.D.R. The slow dripping of a viscous fluid // J. Fluid Mech. — 1988. — V. 190. — P. 561-570.

9. *Ramesh Baby S.* Determination of surface tension of liquid using pendent drop profiles at conical tips // *J. Phys. Chem.* — 1986. — V. 90. — P. 4337-4340.

10. *Илларионов В.Е., Коганов Б.М.* О механизме роста и отрыва осесимметричных капель и газовых пузырей // *ИФЖ.* — 1984. — Т. 46. — № 5. — С. 724-729.

11. *Колесниченко А.Ф., Казачков Н.В., Водянюк В.О., Лысак Н.В.* Капиллярные МГД течения со свободными границами. — Киев: Наукова Думка, 1988. — 176 с.

12. *Земсков А.А., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* К механизму отрыва капли от капилляра: Тез. докл. Всес. конф. / Моск. энерг. ин-т, 1988. — С. 58-60.

13. *Григорьев А.И., Земсков А.А., Ширяева С.О.* Гидродинамическая спецфизика отрыва капли от капилляра: Сб. Электрокаплеструйная технология в реализации программы „Интенсификация-90“. — Л.: Знание, 1989. — С. 67-73.

Рукопись поступила 03.12.9